

Modélisation d'une pompe d'assistance cardiaque

Corrigé UPSTI

MODÉLISATION DU COEUR, UN ORGANE INDISPENSABLE ET PARFOIS DÉFAILLANT

- Objectif -

L'objectif de cette partie est de comparer les performances d'un coeur sain à celles du coeur d'un patient atteint d'hypertrophie myocardique ; l'intérêt de la pompe d'assistance cardiaque sera ainsi mis en avant pour compenser les effets de ce type de pathologie.

1 Modélisation d'un coeur sain

Question 1 Justifier le sens de parcours de ce cycle dans le diagramme (p, V) au vu du rôle du coeur dans le corps humain. Identifier alors la signification de W_p , l'aire algébrique grisée définie positive :

$$W_p = - \oint_{\Gamma_{th}} p dV$$

Le cycle est parcouru dans le sens trigonométrique, donc le travail reçu W_p est positif (cycle récepteur). Ce qui est logique car le coeur a besoin d'énergie pour fonctionner.

Question 2 Pour les trois schémas de la figure 4, préciser le lien qui existe entre W_n , W_{n-1} , p_n , p_{n-1} , V_n et V_{n-1} en fonction du schéma de discrétisation choisi pour le calcul de l'intégrale en utilisant l'équation (2).

- Schéma 1 :

$$-\frac{W_n - W_{n-1}}{V_n - V_{n-1}} = p_{n-1}$$

- Schéma 2 :

$$-\frac{W_n - W_{n-1}}{V_n - V_{n-1}} = p_n$$

- Schéma 3 :

$$W_{n-1} - W_n = \frac{p_n + p_{n-1}}{2} (V_n - V_{n-1})$$

Question 3 Par un raisonnement graphique sur le diagramme (p, V) , montrer que cette valeur obtenue est cohérente. Préciser son signe et son unité.

$$\begin{aligned} W_p &\approx p_1(V_1 - V_0) - p_0(V_1 - V_0) \\ &\approx (1,70 \cdot 10^4 - 1 \cdot 10^4) \cdot (140 \cdot 10^{-6} - 70 \cdot 10^{-6}) \\ &\approx 0,7 \cdot 10^{-2} \\ &\approx +0,49 J \end{aligned}$$

La valeur obtenue est donc cohérente.

Question 4 En supposant que la partie droite du cœur a un fonctionnement similaire à la partie gauche, exprimer et calculer numériquement la puissance mécanique $\mathcal{P}_{\text{cœur}}$ développée par le cœur pour pomper le sang à une fréquence de $f = 60 \text{ batt.min}^{-1}$.

$$\mathcal{P}_{\text{cœur}} = 2 \cdot \frac{W_p}{\frac{1}{f}} = 2 \cdot \frac{0,5}{\frac{1}{1}} = 1W$$

Question 5 En prenant un rendement $\eta = 20\%$ du muscle cardiaque, estimer la fraction x de l'énergie consommée par le cœur pour un individu ayant un apport énergétique journalier de $\mathcal{E} = 2,4 \text{ kWh}$ (ce qui représente environ 2 000 kcal, soit l'apport énergétique journalier moyen d'un adulte).

$$x = \frac{24 \cdot \mathcal{P}_{\text{cœur}}}{\mathcal{E}} \cdot \frac{1}{\eta} = \frac{24 \cdot 1}{2,4 \cdot 10^3} \cdot \frac{100}{20} = \frac{1}{20} = 5\%$$

2 Modélisation d'un cœur déficient

Question 6 En effectuant l'application numérique associée, comparer le volume $V_{1h} - V_0$ d'éjection systolique à chaque battement de cœur d'un individu malade à celui d'un individu sain. En déduire l'influence de la maladie sur le volume de sang éjecté à chaque battement du cœur. Proposer une compensation naturelle du cœur pour maintenir un débit moyen de sang dans le corps égal à celui d'un individu sain.

- Pour un individu sain : $V_{1h} - V_0 = 70 \text{ mL}$
- Pour un individu malade : $V_{1h} - V_0 = 30 \text{ mL}$

Pour un individu malade, le volume éjecté est plus de deux fois plus faible. On peut supposer que le cœur bat alors plus vite pour compenser ce problème.

Question 7 En modélisant les cycles de la figure 3 et de la figure 5 par des rectangles de hauteur [AD] et en déterminant leurs aires, estimer la perte maximale de puissance hydraulique (en watt - W) du ventricule gauche d'un cœur de patient atteint d'hypertrophie myocardique par rapport à un patient avec un cœur sain pour une même fréquence de battement $f = 60 \text{ batt.min}^{-1}$. En déduire la valeur de la puissance hydraulique supplémentaire qu'une pompe d'assistance cardiaque doit fournir, sachant qu'elle assiste uniquement le ventricule gauche.

Nous avons évalué à la question 3 $W_{psain} = 0,49J$ d'où $\mathcal{P}_{sain} = \frac{0,49}{\frac{1}{1}} = 0,49W$.

On fait de même pour un individu malade :

$$\begin{aligned} W_{p\text{malade}} &\approx (1,70 \cdot 10^4 - 1 \cdot 10^4) \cdot (100 \cdot 10^{-6} - 70 \cdot 10^{-6}) \\ &\approx 0,730 \cdot 10^{-2} \\ &\approx 0,21J \end{aligned}$$

et $\mathcal{P}_{malade} = 0,21W$.

On a alors $\mathcal{P}_{perte} = \mathcal{P}_{sain} - \mathcal{P}_{malade} = 0,28W$. La pompe doit donc être en mesure de fournir 0,28 W.

DIMENSIONNEMENT DE L'ACTIONNEUR

- Objectif -

L'objectif de cette partie est de dimensionner l'actionneur électromagnétique afin que la pompe fournisse la puissance hydraulique d'appoint suffisante pour combler les déficiences du cœur. Pour cela, il est nécessaire de déterminer le rendement hydraulique de la pompe et de construire un modèle de connaissance de l'effort d'induction engendré par le passage du courant dans les bobines.

1 Détermination du débit nécessaire d'appoint fourni par la pompe

Question 8 Quel volume de sang doit éjecter la pompe, par battement de cœur, pour compenser la déficience d'un cœur malade ? En déduire le débit moyen de la pompe en mL.s^{-1} pour un individu au repos.

Le cœur malade éjecte 40 mL de sang en moins par battement. Par ailleurs, il y a 1 battement de cœur par seconde. On peut donc en conclure que $V_{pompe} = 40 \text{ mL.s}^{-1}$

Question 9 En exploitant les graphes sur la figure 11, exprimer les débits Q_1 et Q_2 de sang éjecté par la pompe pour chacune des deux phases d'un cycle en fonction de C_y , f_{p1} et de f_{p2} . Réaliser l'application numérique pour Q_1 et Q_2 , en mL.s^{-1} . Le débit moyen de la pompe de 40 mL.s^{-1} est-il assuré ? Justifier votre réponse.

$$Q_1 = C_y \cdot f_{p1} = \frac{6}{7} \cdot 70 = 60 \text{ mL.s}^{-1}$$

$$Q_2 = C_y \cdot f_{p2} = \frac{6}{7} \cdot 40 = 34 \text{ mL.s}^{-1}$$

$$\begin{aligned} Q_{moyen} &= \frac{t_1 \cdot Q_1 + (T - t_1) Q_2}{T} \\ &= 0,3 \times 60 + 0,7 \times 34 \\ &= 41,8 \text{ mL.s}^{-1} \approx 40 \text{ mL.s}^{-1} \end{aligned}$$

Le débit moyen de la pompe est donc assuré.

Question 10 Justifier que, pour assurer un débit de 40 mL.s^{-1} , la fréquence moyenne f_{pm} à laquelle la pompe devrait fonctionner dans le cas d'un mode de fonctionnement continu (mode non pulsatile avec f_p constante) est proche de 50 Hz.

$$f_{pm} = \frac{Q_{moyen}}{C_y} = \frac{40}{6/7} = 46,6 \text{ Hz} \approx 50 \text{ Hz}$$

2 Modélisation de la force exercée par le fluide sur la membrane

Question 11 En exploitant les courbes sur la figure 12, proposer une valeur numérique pour h en expliquant la démarche retenue. Le relevé des points sera borné à l'intervalle de temps $[2,5 \text{ ms}; 17,5 \text{ ms}]$. Proposer, en expliquant la démarche retenue, une valeur numérique de h en précisant son unité.

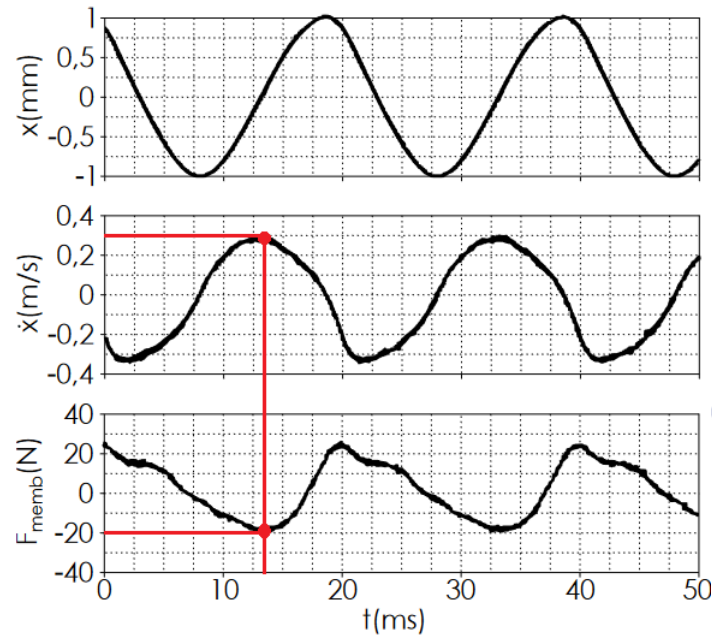
On isole la membrane et on lui applique le théorème de la résultante dynamique :

$$\overrightarrow{R(\text{ext} \rightarrow \text{membrane})} = M \cdot \ddot{x} \cdot \vec{x}$$

En projection sur $\vec{x}$:

$$-h.\dot{x} + F_{motrice} = M.\ddot{x}$$

Pour le relevé de points, on se place à $\ddot{x} = 0$. Le TRD devient alors : $h\dot{x} = F_{motrice}$



Nous pouvons voir sur la figure que pour $t \approx 13,5$ mS, $\dot{x} = 0,3$ m/s et $F_{memb} = -20$ N.

$$h = -\frac{F_{memb}}{\dot{x}} = \frac{20}{0,3} = 66 \text{ N.s.m}^{-1}$$

Question 12 En supposant que $x(t)$ soit une fonction sinusoïdale $x(t) = X_0 \cos(2\pi f_{pm}t + \varphi)$, déterminer l'expression de $\mathcal{P}_{meca}(t)$ correspondant à la puissance instantanée transmise par la membrane au sang pour une fréquence de fonctionnement de la pompe $f_{pm} = 50$ Hz, en fonction de f_{pm} , ϕ , X_0 et de h . Exprimer alors $\mathcal{P}_{moy} = \langle \mathcal{P}_{meca}(t) \rangle$ sur une période correspondant à un battement de cœur, en fonction de f_{pm} , X_0 et de h . Réaliser l'application numérique, avec $X_0 = 1$ mm et $h = 65$ USI

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{meca} &= \vec{F} \cdot \vec{v} \\ &= -h(\dot{x})^2 \\ &= -h(-X_0 2\pi f_{pm} \sin(2\pi f_{pm}t + \varphi))^2 \\ &= -h(X_0 2\pi f_{pm})^2 \frac{1 - \cos(2(2\pi f_{pm}t + \varphi))}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{moy} &= f_{pm} \int_0^{1/f_{pm}} \mathcal{P}_{meca}(t) dt \\ &= -h f_{pm} (X_0 2\pi f_{pm})^2 \int_0^{1/f_{pm}} \frac{1 - \cos(4\pi f_{pm}t + 2\varphi)}{2} dt \\ &= -h f_{pm} (X_0 2\pi f_{pm})^2 \frac{1}{2f_{pm}} \\ &= \frac{-h}{2} (X_0 2\pi f_{pm})^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{moy} &= \frac{-65}{2} (10^{-3} \cdot 2\pi \cdot 50)^2 \\ &\approx \frac{-65}{2} (3 \cdot 10^{-1})^2 \\ &\approx \frac{-65}{2} 0,09 \\ &\approx -2,925 \text{ W} \end{aligned}$$

Question 13 Quel phénomène dissipatif peut justifier la différence entre la puissance mécanique $\mathcal{P}_{moy}$ transmise par la membrane au sang et la puissance hydraulique $\mathcal{P}_{hydro} = 0,3 \text{ W}$ mesurée en sortie de pompe ? En déduire le rendement hydraulique r_{hydro} de la pompe.

La différence entre la puissance mécanique et la puissance hydraulique peut s'expliquer par l'inertie $M.\ddot{x}$ et les efforts élastiques des ressorts. Néanmoins, ce ne sont pas de phénomènes dissipatifs.

Les phénomènes de siruposité/frottement du sang au contact des diverse parois, phénomènes dissipatifs, peuvent également expliquer la différence.

$$r_{hydro} = \frac{\mathcal{P}_{hydro}}{\mathcal{P}_{meca}} = \frac{0,3}{2,925} \approx 10\%$$

3 Détermination de l'effort d'induction nécessaire

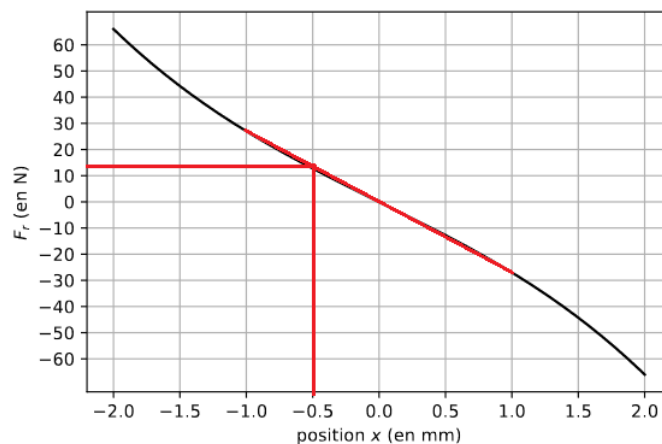
Question 14 En notant l_0 la longueur à vide du ressort, exprimer sa longueur l_{eq} à l'équilibre, en l'absence d'excitation magnétique, en fonction de l_0 , m , k et de l'accélération de la pesanteur g .

PFS projeté sur $\vec{x}$:

$$-mg - k(l_{eq} - l_0) = 0$$

$$\text{d'où } l_{eq} = l_0 - \frac{mg}{k}$$

Question 15 La force exercée par le ressort sur le système est représentée figure 14. Proposer un modèle linéaire de cette force sur la plage $x \in [-1,0 \text{ mm}; +1,0 \text{ mm}]$ pour l'exprime sous la forme $F_r(x) = -kx$ en précisant la valeur numérique de k en N.mm^{-1} .



$$k = \frac{-F_r(x)}{x} = -\frac{13}{-0,5} = 26 \text{ N.mm}^{-1}$$

Question 16 Montrer que la fonction de transfert du système oscillant peut s'écrire sous la forme de la formule (3)

PFD projeté sur $\vec{x}$:

$$-mg - k((x + l_{eq}) - l_0) + F_{mag}(t) - h\dot{x} = m\ddot{x}$$

or, $l_{eq} = l_0 - \frac{mg}{k}$, d'où

$$-kx + F_{mag}(t) - h\dot{x} = m\ddot{x}$$

Méthode 1 : façon physique

$$-kX_0 \frac{e^{j(\omega.t+\varphi)} + e^{-j(\omega.t+\varphi)}}{2} + F_0 \frac{e^{j(\omega.t)} + e^{-j(\omega.t)}}{2} - hX_0(j\omega) \frac{e^{j(\omega.t+\varphi)} - e^{-j(\omega.t+\varphi)}}{2} = m.(j\omega)^2 \frac{e^{j(\omega.t+\varphi)} + e^{-j(\omega.t+\varphi)}}{2}$$

$$F_0 \frac{e^{j(\omega.t)} + e^{-j(\omega.t)}}{2} = \left[k + h.(j\omega) + m.(j\omega)^2 \right] \frac{e^{j(\omega.t+\varphi)} + e^{-j(\omega.t+\varphi)}}{2} X_0$$

$$\underline{F_{mag}}(j\omega) = k \left[1 + \frac{h}{k} \cdot (j\omega) + \frac{m}{k} \cdot (j\omega)^2 \right] \underline{x}(j\omega)$$

donc

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{\frac{1}{k}}{1 + \frac{h}{k}j\omega + \frac{m}{k}(j\omega)^2}$$

Méthode 2 : façon SII

Dans les conditions de Heaviside, cette équation devient dans le domaine de Laplace :

$$F_{mag}(p) = (k + hp + mp^2) X(p)$$

donc

$$H(p) = \frac{\frac{1}{k}}{1 + \frac{h}{k}p + \frac{m}{k}p^2}$$

On peut alors identifier :

- $H_0 = \frac{1}{k}$
- $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$
- $\xi = \frac{h}{2} \sqrt{\frac{1}{km}}$

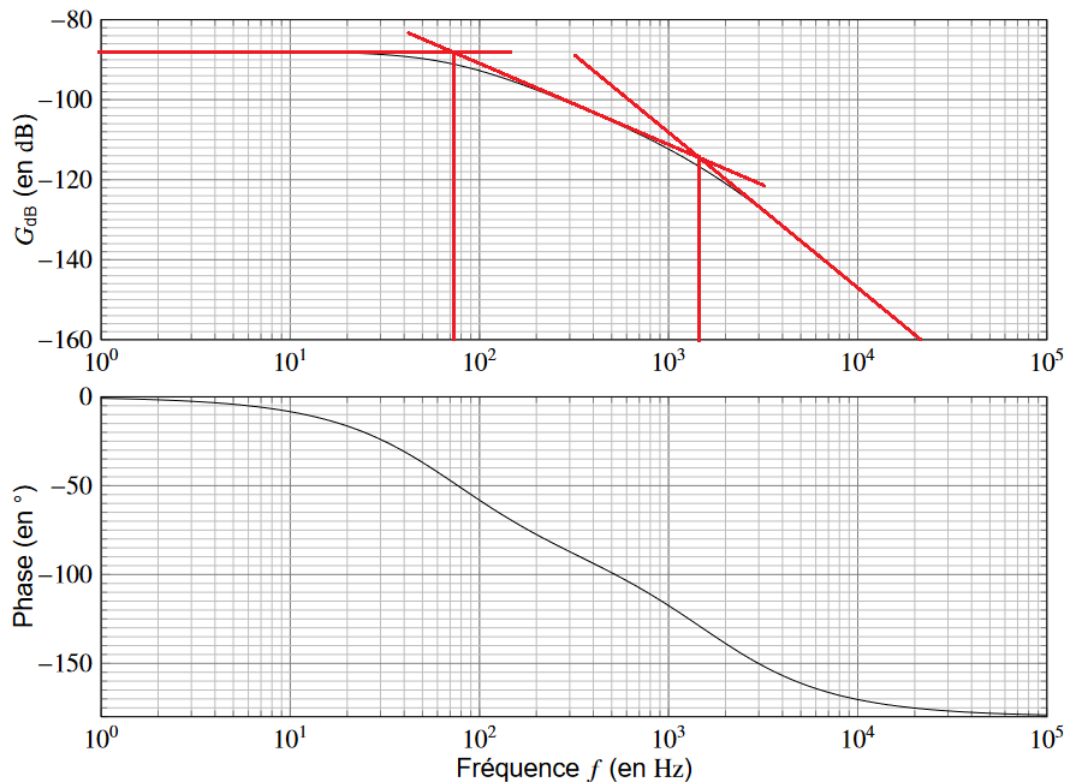
Question 17 Exprimer le gain en décibels $G_{dB}(\omega)$ et la phase $\phi(\omega)$ de la fonction de transfert $H(j\omega)$ en fonction de H_0 , ξ , ω et de ω_0 .

$$G_{dB}(\omega) = 20 \log \left(\frac{H_0}{\sqrt{(1 - (\frac{\omega}{\omega_0})^2)^2 + 4\xi^2(\frac{\omega}{\omega_0})^2}} \right)$$

$$\phi(\omega) = -\arg \left(1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0} \right)^2 + 2\xi \frac{\omega}{\omega_0} j \right) = -\arctan \left(\frac{2\xi \frac{\omega}{\omega_0}}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0} \right)^2} \right)$$

Question 18 Préciser la valeur des pentes non nulles observées dans le diagramme de Bode en gain (figure 15) en spécifiant la plage de fréquences associée.

La fonction de transfert est une fonction de transfert caractéristique d'un second ordre. Comme $\xi > 1$, on va chercher deux fréquences de coupure dans le diagramme de Bode. On peut lire $f_1 = 72$ Hz et $f_2 = 1300$ Hz. Pour $f_1 < f < f_2$, la courbe admet une pente à -20 dB/décade. Pour $f > f_2$, la pente est de -40 dB/décade



Question 19 La plage de fréquences d'oscillations de la membrane (de 40 Hz à 70 Hz) est-elle en accord avec la bande passante à -3 dB du système masse-ressort ainsi modélisé ?

La plage de fréquences d'oscillations de la membrane est comprise dans la bande passante à -3dB du système. En effet, on peut lire sur le graphique $f_{-3dB} = 70$ Hz.

Cette plage de fréquence est donc en accord avec la bande passante du système.

Question 20 En cherchant l'effort d'induction F_{mag} sous la forme $F_{mag} = F_0 \cos(\omega t)$, préciser la valeur numérique de l'amplitude F_0 de la force d'induction nécessaire pour obtenir des oscillations du système vibrant d'amplitude $X_0 = 1,0$ mm.

La réponse temporelle a cette excitation harmonique a pour amplitude :

$$X_0 = F_0 \cdot \frac{H_0}{\sqrt{(1 - (\frac{f}{f_0})^2)^2 + 4\xi^2(\frac{f}{f_0})^2}}$$

Cette amplitude est décroissante, on va donc calculer F_0 pour $f = 70$ Hz

$$F_0 = \frac{X_0}{H_0} \sqrt{\left(1 - \left(\frac{f}{f_0}\right)^2\right)^2 + 4\xi^2 \left(\frac{f}{f_0}\right)^2}$$

$$F_0 = \frac{10^{-3}}{4 \cdot 10^{-5}} \sqrt{\left(1 - \left(\frac{70}{340}\right)^2\right)^2 + 4 \times 2,5^2 \left(\frac{70}{340}\right)^2}$$

$$F_0 = 25 \sqrt{1 + 23 \left(\frac{7}{34}\right)^2 + \left(\frac{7}{34}\right)^4} = 25 \sqrt{1 + \left(23 + \left(\frac{7}{34}\right)^2\right) \left(\frac{7}{34}\right)^2} \approx 25 \sqrt{1 + 23 \left(\frac{1}{5}\right)^2} \approx 25 \sqrt{2} = 35 N$$

4 Dimensionnement du courant nécessaire en pic de puissance

Question 21 En supposant une répartition homogène de l'aimantation dans le matériau, en déduire à l'aide de la formule (4) la valeur du moment dipolaire magnétique $\mathcal{M}$ de la couronne magnétique. L'hypothèse $\epsilon \ll R_c$ sera faite (dans les calculs et les expressions) pour faciliter les calculs dans cette question et pour la suite.

$$\mathcal{M} = \int_{x=-\epsilon/2}^{\epsilon/2} \int_{r=R_c}^{R_c+\epsilon} \int_{\theta=0}^{2\pi} J \cdot dx \cdot dr \cdot r d\theta = J \cdot \pi \epsilon \cdot \left((R_c + \epsilon)^2 - R_c^2 \right) \approx J \cdot \pi \epsilon \cdot 2 \cdot R_c \cdot \epsilon$$

$$\mathcal{M} = 10^7 \cdot \pi \cdot 4 \cdot 10^{-6} \cdot 2 \cdot 20 \cdot 10^{-3} = 160 \cdot \pi \cdot 10^{-2} \approx 4,8 A.m^2$$

Question 22 Identifier l'expression de $\mathcal{M}_l$ en fonction de $\mathcal{M}$ et de R_c .

$$\int d\mathcal{M} = \int \mathcal{M}_l \cdot dl$$

$$\mathcal{M} = \mathcal{M}_l \cdot 2\pi \cdot R_c$$

donc $\mathcal{M}_l = \frac{\mathcal{M}}{2\pi R_c}$

Question 23 Montrer que la composante axiale du champ magnétique peut être exprimée sous la forme :

$$dB_x = d\vec{B}(M) \cdot \vec{u}_x = \frac{2\eta - 1}{(\eta + 1)^{\frac{5}{2}}} dB_0$$

avec $\eta = \left(\frac{x}{R_c}\right)^2$ où l'expression de dB_0 est à préciser en fonction de μ_0 , μ_r , R_c et de $d\mathcal{M} = \|d\vec{\mathcal{M}}\|$

$$d\vec{B}(M) = \frac{\mu_0 \mu_r}{4\pi r^3} \left(3 \cdot \frac{d\vec{\mathcal{M}} \cdot \vec{r}}{r^2} \vec{r} - d\vec{\mathcal{M}} \right)$$

or, $d\vec{\mathcal{M}} = \mathcal{M}_l \cdot dl \vec{u}_x$

d'où $d\vec{\mathcal{M}} \cdot \vec{r} = \mathcal{M}_l \cdot dl \cdot r \vec{u}_x \cdot \vec{u}_r = \mathcal{M}_l \cdot dl \cdot r \cos(\theta)$

On obtient alors :

$$d\vec{B}(M) = \frac{\mu_0 \mu_r}{4\pi r^3} (3 \cdot \mathcal{M}_l \cdot dl \cdot \cos(\theta) \vec{u}_r - \mathcal{M}_l \cdot dl \vec{u}_x)$$

En projection sur $\vec{u}_x$:

$$dB_x = \frac{\mu_0 \mu_r}{4\pi r^3} (3 \cdot \cos^2(\theta) - 1) \cdot \mathcal{M}_l \cdot dl$$

par ailleurs $\cos(\theta) = \frac{x}{r}$ et $r = \sqrt{x^2 + R_c^2}$

$$dB_x = \frac{\mu_0 \mu_r}{4\pi (x^2 + R_c^2)^{3/2}} \left(3 \cdot \frac{x^2}{(x^2 + R_c^2)} - 1 \right) \cdot \mathcal{M}_l \cdot dl$$

$$dB_x = \frac{\mu_0 \mu_r}{4\pi (x^2 + R_c^2)^{3/2}} \left(\frac{2x^2 - R_c^2}{x^2 + R_c^2} \right) \cdot \mathcal{M}_l \cdot dl$$

$$dB_x = \frac{\mu_0 \mu_r}{4\pi R_c^3 \left(\left(\frac{x}{R_c} \right)^2 + 1 \right)^{3/2}} \left(\frac{2 \left(\frac{x}{R_c} \right)^2 - 1}{\left(\frac{x}{R_c} \right)^2 + 1} \right) \cdot \mathcal{M}_l \cdot dl$$

Finalement,

$$dB_x = \frac{2\eta - 1}{(\eta + 1)^{\frac{5}{2}}} \cdot dB_0$$

$$\text{avec } dB_0 = \frac{\mu_0 \mu_r}{4\pi R_c^3} \cdot d\mathcal{M}$$

Question 24 Montrer que le champ magnétique axial $B_x(\eta)$ créé par la couronne en un point M situé sur l'axe de la couronne magnétique peut s'écrire :

$$\vec{B}_0(\eta) = B_0 \frac{2\eta - 1}{(\eta + 1)^{\frac{5}{2}}} \vec{u}_x$$

où l'expression de B_0 est à préciser en fonction de μ_0 , μ_r , R_c , $\mathcal{M}$ et R_c

$$\vec{B}_0(\eta) = \int dB_x \vec{u}_x = \frac{2\eta - 1}{(\eta + 1)^{\frac{5}{2}}} \cdot \frac{\mu_0 \mu_r}{4\pi R_c^3} \cdot \mathcal{M} \vec{u}_x$$

$$\text{donc } B_0 = \frac{\mu_0 \mu_r}{4\pi R_c^3} \cdot \mathcal{M}$$

Effort d'induction créé par un ensemble de N_s spires de courant

Question 25 Préciser l'expression du moment magnétique $\mathcal{M}_s(t)$ créé par l'ensemble des N_s spires de rayon R_s parcourues par une intensité électrique $i(t)$.

Par définition, $d\vec{\mathcal{M}} = \frac{1}{2} \vec{r} \wedge \vec{j} dV$, avec $\vec{r}$ vecteur position et $\vec{j}$ vecteur densité de courant électrique.

Dans le cas d'une bobine constituée de N spires de surfaces S parcourues par un courant I , le moment magnétique vaut $\mathcal{M} = N \cdot I \cdot S$ donc dans notre cas :

$$\mathcal{M}_s = N_s \cdot i(t) \cdot \pi \cdot R_s^2$$

Question 26 Exprimer l'énergie potentielle d'interaction $\mathcal{E}_1(x, i)$ de l'ensemble de N_s spires de courant avec la couronne magnétique en fonction de B_0 défini précédemment, $\mathcal{M}_s$, $i(t)$ et de $\gamma = \frac{x - \frac{x_b}{2}}{R_c}$.

$$\mathcal{E}_1(x, i) = -\vec{\mathcal{M}}_s \cdot \vec{B}$$

La spire qui interagit avec la couronne est située à une distance $x - \frac{x_b}{2}$ de cette dernière. En reprenant l'expression de $\vec{B}$ à cette distance :

$$\mathcal{E}_1(x, i) = -N_s \cdot i(t) \cdot \pi \cdot R_s^2 \cdot B_0 \frac{2\gamma - 1}{(\gamma + 1)^{\frac{5}{2}}}$$

Effort d'induction créé par les deux ensembles de N_s spires sur la couronne

Question 27 L'expression de la fonction $B_x(\eta)$ a été établie à la Q24. Compléter la ligne de commande de la ligne 29 pour déterminer la valeur en tout point x de l'énergie potentielle d'interaction $\mathcal{E}(x)$ de l'ensemble des deux spires avec la couronne magnétique.

$$E = M_s * (B((x - x_b)/2)/R_c - B((x + x_b)/2)/R_c)$$

Question 28 Proposer un algorithme de calcul de $F_{mag}(x)$ à partir de $\mathcal{E}(x)$ utilisant une boucle for.

```

1 for n in range (len(x)-1)
2     Fmag[n] = (E[n] - E[n+1]) / (x[n+1] - x[n])
3     Fmag[len(x)] = Fmag[len(x)-1]
```

Question 29 La force magnétique F_{mag} résultant de l'interaction des bobines avec la couronne magnétique est-elle suffisante pour respecter la valeur calculée à la Q20 ? Est-il alors possible de valider la valeur maximale de l'intensité du courant retenue (Exigence 17, figure 9) ? Justifier votre réponse.

Pour x appartenant à la plage d'oscillation ($x \in [-1mm; +1mm]$), la force magnétique est supérieure à 58 N. Cette valeur est largement supérieure au 35N calculé précédemment. On peut donc valider la valeur max du courant retenu, car 3 A nous permet d'avoir une force magnétique suffisante

Question 30 Justifier que l'on puisse écrire $F_{mag}(x, i) = K_f \cdot i$ sur la plage d'oscillations de la membrane. Préciser la valeur numérique et l'unité du coefficient K_f .

Pour ($x \in [-1mm; +1mm]$), $58 < F_{mag} < 59$, comme $|i|$ vaut 3 A, on pourra prendre $K_f = 19,5 \text{ N.A}^{-1}$.

FONCTION PULSATILE : RÉGIME TRANSITOIRE ENTRE DEUX POINTS DE FONCTIONNEMENT

- Objectif -

- justifier la mise en place d'un asservissement en vérifiant que le système en boucle ouverte ne permet pas de respecter certains des quatre critères d'exigence décrits précédemment. Pour cela, il est nécessaire d'étudier les pôles de la fonction de transfert en boucle ouverte et la réponse du système soumis à une excitation périodique lorsque la fréquence du point de fonctionnement change ;
- vérifier que la pompe asservie permet bien de fournir la puissance hydraulique nécessaire pour pallier les insuffisances cardiaques du patient.

1 Modèle électrique

Question 31 Établir l'équation différentielle liant les tensions $u(t)$ et $e(t)$ à l'intensité $i(t)$ du courant en fonction de R et de L .

$$u(t) + e(t) = R \cdot i(t) + L \cdot \frac{di(t)}{dt}$$

2 Modèle mécanique

Question 32 Dans les conditions d'Heaviside, écrire les deux équations différentielles précédentes, ainsi que la loi de Lenz-Faraday, dans le domaine de Laplace. Dans ce domaine, la convention sera prise que chaque fonction $t \rightarrow f(t)$ s'écrit $p \rightarrow F(p)$.

$$U(p) + E(p) = (R + Lp)I(p)$$

$$(mp^2 + hp + k)X(p) = K_f I(p)$$

$$E(p) = -K_c p X(p)$$

3 Bouclage électromécanique du système

Question 33 Montrer que les équations précédentes peuvent être représentées à l'aide du schéma-blocs de la figure 22. Exprimer sous forme canonique :

- $A(p)$ en fonction de p , R , L et de K_f ;
- $H(p)$ en fonction de p , m , h et de k ;
- $B(p)$ en fonction de K_c et de p .

$$F_{mag}(p) = K_f I(p) = K_f \frac{U(p) + E(p)}{R + Lp}, \text{ donc :}$$

$$A(p) = \frac{K_f}{R + Lp}$$

$$H(p) = \frac{X(p)}{K_f I(p)} = \frac{1}{k + hp + mp^2}$$

$$B(p) = K_c p$$

Question 34 Préciser l'expression de la fonction de transfert du système $F(p) = \frac{X(p)}{U(p)}$ en fonction de $A(p)$, $H(p)$ et de $B(p)$, puis sous forme canonique en fonction des paramètres utilisés dans la question précédente.

$$\frac{X(p)}{U(p)} = \frac{A(p)H(p)}{1 + A(p)H(p)B(p)} = \frac{K_f}{(R + Lp)(k + hp + mp^2) + K_f K_c p}$$

$$\frac{X(p)}{U(p)} = \frac{K_f}{Rk + (Rh + Lk + K_f K_c)p + (Rm + Lh)p^2 + Lmp^3} = \frac{\frac{K_f}{Rk}}{1 + \frac{(Rh + Lk + K_f K_c)}{Rk}p + \frac{(Rm + Lh)}{Rk}p^2 + \frac{Lm}{Rk}p^3}$$

4 Modèles résultants de simulations numériques

Question 35 Estimer graphiquement les valeurs numériques de L , K_f et K_c dans une plage de variations linéaire.

$$L \approx 12\text{mH}, K_f \approx 25 \text{ N/A}, K_c \approx 20 \text{ N/A}$$

5 Étude de la fonction de transfert du bouclage électromécanique

Stabilité du système bouclé

Question 36 Le tracé numérique du polynôme $P(p)$ est représenté sur la figure 24. Lire graphiquement les valeurs des trois pôles $p_1 > p_2 > p_3$ du système. Le système est-il stable ? Justifier votre réponse.

$p_3 = -10100 \text{ s}^{-1}$, $p_2 = -950 \text{ s}^{-1}$, $p_1 = -150 \text{ s}^{-1}$. Nous sommes en présence de trois pôles dont la partie réelle est strictement négative, donc le système est stable.

Précision du système bouclé

Question 37 Montrer par un raisonnement graphique que $u_{n+1} = u_n - \frac{P(u_n)}{P'(u_n)}$, où P' est la dérivée de P par rapport à p .

A l'aide la figure 25 on peut écrire :

$$P'(u_n) = \frac{P(u_n) - 0}{u_n - u_{n+1}}$$

d'où l'expression proposée :

$$u_{n+1} = u_n - \frac{P(u_n)}{P'(u_n)}$$

Question 38 Compléter sur votre copie les lignes 9, 19, 20 et 25 de l'algorithme suivant qui effectue la recherche des fréquences de cassure de la fonction de transfert.

ligne 9 : `return (beta+2*gamma*p+3*delta*p**2)`

ligne 19 : `while((u[n]-u[n-1])/u[n-1]<=er)`

ligne 20 : `u.append(u[n]-Pol(u[n])/dPol(u[n]))`

ligne 25 : `print( frequenceCassureNewton ( [-150 , -950, -10100 ] , P , derP , 0.001) )`

Question 39 Réécrire la fonction de transfert $F(p)$ en factorisant le dénominateur en trois polynômes du premier ordre, écrits sous forme canonique, et en faisant apparaître les fréquences de cassure f_1 , f_2 et f_3 .

$$F(p) = \frac{\alpha}{(1 + \frac{p}{2\pi f_1})(1 + \frac{p}{2\pi f_2})(1 + \frac{p}{2\pi f_3})}$$

Question 40 Préciser l'effet du bouclage électromécanique sur la bande passante à -3 dB du système oscillant en comparant la première fréquence de cassure f_1 avec celle du système mécanique sans bouclage $f_a = 70 \text{ Hz}$. Justifier quelle performance du système (figure 9) risque d'être impactée négativement par ce bouclage lors de la variation de fréquence d'utilisation de la pompe sur sa plage de fonctionnement.

Le bouclage diminue la bande passante à -3 dB et désormais la première fréquence de cassure f_1 est plus faible que la fréquence du système mécanique f_a . La performance 7 (amplitude de la course de la membrane) risque d'être affectée.

Question 41 $K(f) = \frac{X_0}{U_0}$ est défini comme le gain de la fonction de transfert $F(p)$. À partir du diagramme de Bode en gain (figure 26) et en travaillant dans la plage de fonctionnement du système, montrer que $K(f)$ peut s'écrire sous la forme $K(f) = \frac{\alpha f_1}{f}$. Le diagramme de Bode asymptotique est supposé confondu avec le diagramme de Bode réel sur la plage de fréquences étudiée.

Entre f_1 et f_2 : $GdB(f) = 20 \log(\alpha) - 20 \log\left(\frac{f}{f_1}\right)$ d'où

$$K(f) = 10^{\frac{20 \log(\alpha) - 20 \log\left(\frac{f}{f_1}\right)}{20}} = \frac{\alpha \cdot f_1}{f}$$

Question 42 En déduire que pour obtenir une amplitude $X_0 = 1,0$ mm indépendante de la fréquence f d'oscillation de la membrane, l'amplitude U_0 de la tension électrique doit être adaptée de la façon suivante : $U_0 = K_u \cdot f$.

Préciser l'expression de K_u en fonction de α , f_1 et de X_0 .

$$X_0 = K(f) \cdot U_0 = \frac{\alpha \cdot f_1}{f} \cdot U_0$$

donc $U_0 = \frac{f}{\alpha \cdot f_1} X_0$ et $K_u = \frac{1}{\alpha \cdot f_1} X_0$

Question 43 À l'aide du théorème de la valeur finale et en supposant une tension d'entrée sous forme d'échelon $U(p) = \frac{U_0}{p}$, montrer que $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{U_0} x(t) = \alpha$.

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{U_0} x(t) = \lim_{p \rightarrow 0} p \frac{1}{U_0} X(p) = \lim_{p \rightarrow 0} p \frac{1}{U_0} F(p) \frac{U_0}{p} = \alpha$$

Question 44 Par lecture graphique de la réponse temporelle à un échelon d'amplitude $U_0 = 14$ V (figure 27), préciser la valeur numérique de α en mm.V⁻¹.

$$\alpha = \frac{x_\infty}{U_0} = \frac{2,1}{14} = 0,15 \text{ mm.V}^{-1}.$$

Question 45 Calculer les valeurs maximales U_{1max} et U_{2max} que doit prendre la tension d'alimentation respectivement pour les fréquences des deux points de fonctionnement à $f_{p1} = 70$ Hz et $f_{p2} = 40$ Hz. Est-il alors possible de valider la valeur maximale de la tension électrique retenue (Exigence 17, figure 9) ? Justifier votre réponse.

$$\begin{aligned} U_{1max} &= \frac{X_0 \cdot f_{p1}}{\alpha f_1} = \frac{10^{-3} \cdot 70}{1,5 \cdot 10^{-4} \cdot 22} \\ &= \frac{700}{33} \\ &\approx 21V \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} U_{2max} &= \frac{X_0 \cdot f_{p2}}{\alpha f_1} = \frac{10^{-3} \cdot 40}{1,5 \cdot 10^{-4} \cdot 22} \\ &= \frac{400}{33} \\ &\approx 12V \end{aligned}$$

U_{1max} et U_{2max} sont inférieures à 30V. L'exigence 17 est respectée.

Question 46 Le critère du cahier des charges portant sur l'amplitude minimale est-il respecté ? Justifier votre réponse.

L'amplitude minimale est de 0,95mm et est supérieure à 0,9. Le critère est vérifié.

Réactivité du système

Question 47 Le cahier des charges spécifie un changement de point de fonctionnement en "moins d'une

oscillation". Identifier le temps $T_{5\%}$ de réponse à 5% du système sur la figure 27 et comparer cette durée à une période d'oscillation de la membrane pour la fréquence maximale atteignable par le système. On relève sur la

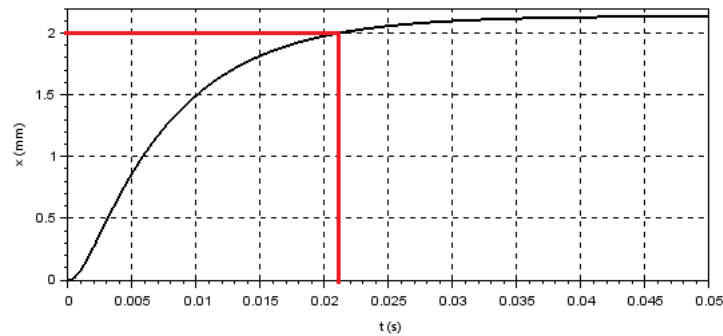


figure un temps de réponse à 5% de 0,021s.

La fréquence maximale atteignable par le système est de 70 Hz, ce qui correspond à une période de 0,014 s. Donc $T_{5\%}$ est supérieur à une période d'oscillation.

Question 48 Le critère de réactivité du cahier des charges est-il respecté? Justifier votre réponse.

Le critère 22 du cahier des charges n'est pas respecté car la durée de changement de régime de fonctionnement ($T_{5\%}$) est supérieur à une période dans le cas d'une fréquence de 70 Hz.

Amplitude maximale de déplacement

Question 49 En étudiant graphiquement la réponse temporelle du système (figure 28), préciser si le critère du cahier des charges portant sur l'amplitude maximale est respecté. Justifier votre réponse.

Sur la figure 28, on peut lire qu'à $t = 0,057$ s, l'amplitude est de 1,1 mm. Ce qui est supérieur à 1 mm. Le critère 7 du cahier des charges n'est donc pas respecté. Cependant, en régime établi, l'amplitude ne dépasse jamais 1 mm ce qui respecte le cahier des charges.

6 Mise en place d'une boucle d'asservissement pour améliorer les performances

Question 50 À l'aide des courbes de la figure 29, vérifier les quatre critères de performance précédemment cités (amplitudes minimale et maximale, réactivité et stabilité) et expliquer l'intérêt de mettre en place cet asservissement.

- Le temps de réponse à 5% du système étant évalué à 12 ms, ce dernier est inférieur à 14 ms, la réactivité du système est donc respecté.
- L'amplitude maximale reste inférieure à 1mm ce critère est donc vérifié.
- L'amplitude minimale est de 0,88 mm environ, lors de la phase transitoire entre les deux fréquences de test, ce qui est légèrement inférieur à la valeur imposée par le cahier des charges (0,9 mm), valeur par ailleurs parfaitement respectée en régime établi.
- Les perturbations sur le signal de commande sont totalement atténuées sur le signal de réponse. Le système est donc stable.

L'asservissement permet donc de respecter le cahier des charges en régime établi.

Question 51 En relevant U_{max} et I_{max} pour chaque fréquence d'utilisation (figure 29) et en utilisant la figure 11, calculer la puissance moyenne électrique en entrée de pompe pour un individu au repos. On rappelle qu'on peut écrire :

$$\mathcal{P}_{elec} = \frac{t_1 \cdot \mathcal{P}_{1elec} + t_2 \cdot \mathcal{P}_{2elec}}{T}$$

avec $\mathcal{P}_{1elec}$ la puissance électrique lors de la phase 1 (systole) du coeur et $\mathcal{P}_{2elec}$ la puissance électrique lors de la phase 2 (diastole) du coeur.

$$\mathcal{P}_{elec} = \frac{t_1 \cdot U_{1max} \cdot I_{1max} \cos \varphi_1 + (T - t_1) \cdot U_{2max} \cdot I_{2max} \cos \varphi_2}{2T}$$

$$\mathcal{P}_{elec} = \frac{0,3 \times 5 \times 1,2 \cos\left(\frac{1}{f_1} \cdot f_1\right) + 0,7 \times 10 \times 1,8 \cos 0}{2}$$

$$\mathcal{P}_{elec} = \frac{1,8 \times 0,3 + 12,6}{2} = 6,57W$$

Question 52 En déduire la puissance hydraulique d'appoint fournie par la pompe au cœur, en considérant un rendement hydraulique de la pompe de 0,05 (les pertes électromagnétiques et mécaniques sont négligées par rapport aux pertes hydrauliques). Est-ce que la pompe à membrane avec asservissement permet de pallier les insuffisances cardiaques du patient ?

$$\mathcal{P}_{hydraulique} = 0,3285W$$

D'après la question 7, la pompe doit être en mesure de fournir 0,28 W. La pompe permet donc de pallier les insuffisances cardiaques du patient.