

Proposition de corrigé

Concours : Concours Commun INP

Année : 2022

Filière : TSI

Épreuve : Sciences Industrielles pour l'Ingénieur

Ceci est une proposition de corrigé des concours de CPGE, réalisée bénévolement par des enseignants de Sciences Industrielles de l'Ingénieur et d'Informatique, membres de l'[UPSTI](https://www.upsti.fr) (Union des Professeurs de Sciences et Techniques Industrielles), et publiée sur le site de l'association :

<https://www.upsti.fr/espace-etudiants/annales-de-concours>

A l'attention des étudiants

Ce document vous apportera des éléments de corrections pour le sujet traité, mais n'est ni un corrigé officiel du concours, ni un corrigé détaillé ou exhaustif de l'épreuve en question.

L'UPSTI ne répondra pas directement aux questions que peuvent soulever ces corrigés : nous vous invitons à vous rapprocher de vos enseignants si vous souhaitez des compléments d'information, et à vous adresser à eux pour nous faire remonter vos éventuelles remarques.

Licence et Copyright

Toute représentation ou reproduction (même partielle) de ce document faite sans l'accord de l'UPSTI est **interdite**. Seuls le téléchargement et la copie privée à usage personnel sont autorisés (protection au titre des [droits d'auteur](#)).

En cas de doute, n'hésitez pas à nous contacter à : corrigesconcours@upsti.fr.

Informez-vous !

Retrouvez plus d'information sur les [Sciences de l'Ingénieur](#), l'[orientation](#), les [Grandes Ecoles](#) ainsi que sur les [Olympiades de Sciences de l'Ingénieur](#) et sur les [Sciences de l'Ingénieur au Féminin](#) sur notre site : www.upsti.fr

L'équipe UPSTI

Étude d'une turbine à gaz

Corrigé UPSTI

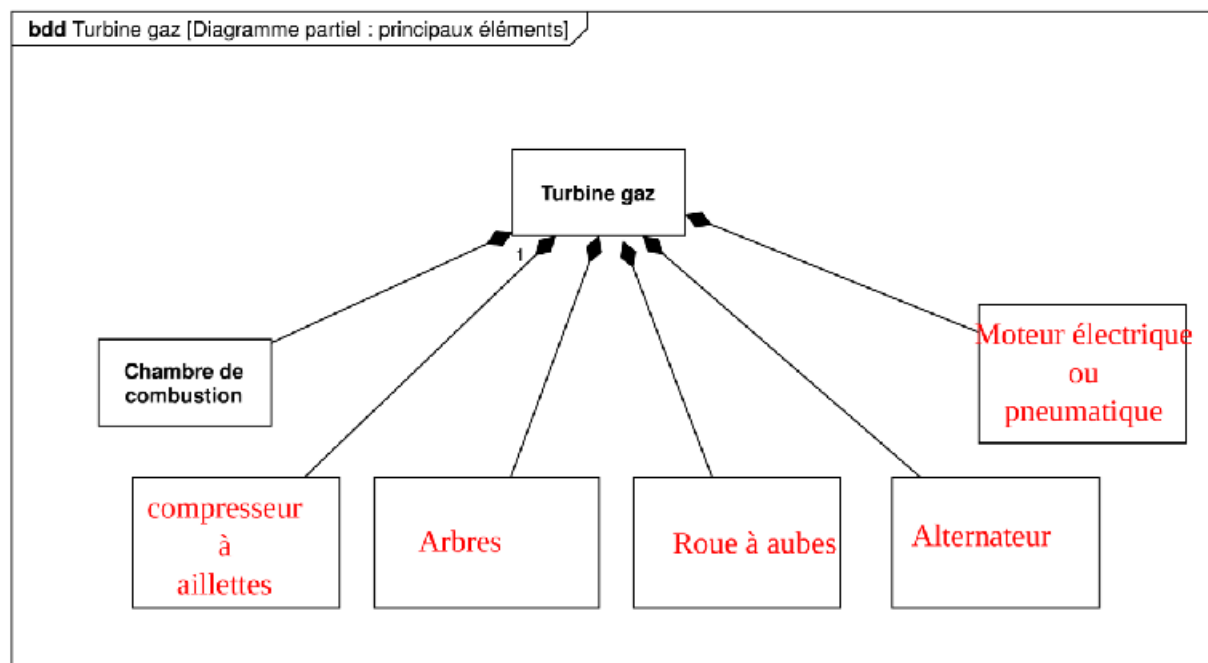
II - Analyse du système

Question 1. À partir des figures 3 et 4, rappeler quelle est la fonction première d'une telle turbine à gaz, puis rappeler quelle vitesse de rotation doit pouvoir atteindre l'arbre moteur.

La fonction est de fournir de l'électricité et de la chaleur

La vitesse que doit atteindre l'arbre moteur est $15\,000\text{ tr} \cdot \text{min}^{-1}$

Question 2. En vous aidant de la description du système faite dans cette première partie, compléter le diagramme de définitions des blocs de la turbine sur le DR 1.



III - Modélisation des actions mécaniques sur une aube de la turbine

Question 3. À partir de l'équation (1), donner la relation entre $\overrightarrow{dF_{gaz \rightarrow aube}}(Q)$ et la pression p , en déduire $\overrightarrow{F_{gaz \rightarrow aube}}$.

$$\overrightarrow{dF_{gaz \rightarrow aube}}(Q) = -pdS\vec{y}$$

$$\text{d'où } \overrightarrow{F_{gaz \rightarrow aube}} = \iint_{Q \in S} -pdS\vec{y}$$

$$\overrightarrow{F_{gaz \rightarrow aube}} = \int_0^l \int_{-e}^0 (-pdx dz \vec{y})$$

$$\overrightarrow{F_{gaz \rightarrow aube}} = -p \cdot e \cdot l \vec{y}$$

Question 4. À partir de l'équation (1), exprimer le moment $\overrightarrow{M_{O, \vec{F}_{gaz \rightarrow aube}}}$ au point O en fonction de la pression et des données géométriques de l'aube.

$$\overrightarrow{M_{O, \vec{F}_{gaz \rightarrow aube}}} = \iint_{Q \in S} \overrightarrow{OQ} \wedge \overrightarrow{dF_{gaz \rightarrow aube}}(Q)$$

$$\overrightarrow{M_{O, \vec{F}_{gaz \rightarrow aube}}} = \int_0^l \int_{-e}^0 (x \cdot \vec{x} + z \cdot \vec{z}) \wedge (-pdx dz \vec{y})$$

$$\overrightarrow{M_{O, \vec{F}_{gaz \rightarrow aube}}} = -\frac{e \cdot p \cdot l^2}{2} \vec{z} - \frac{p \cdot l \cdot e^2}{2} \vec{x}$$

Question 5. Exprimer les composantes du torseur des efforts intérieurs dans la section $\{\mathcal{T}_{int}\}$ dans la poutre au point G(x) dans la base $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$.

$$\{\mathcal{T}_{int}\}_G = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -F & 0 \\ 0 & -F(l-x) \end{pmatrix}_{(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})}$$

Question 6. Déterminer x_{max} et y_{max} , tels que la contrainte normale σ soit maximale dans la section. Exprimer cette contrainte en fonction des paramètres géométriques de la poutre, du moment quadratique et de la force ponctuelle F . Donner le résultat de l'application numérique.

La contrainte $\sigma = -\frac{M_{fz}(x)}{I_{Gz}} \cdot y = \frac{F(l-x)}{I_{Gz}} \cdot y$ est maximale pour :

$$x_{max} = 0$$

$$y_{max} = b$$

Elle se situe à l'encastrement.

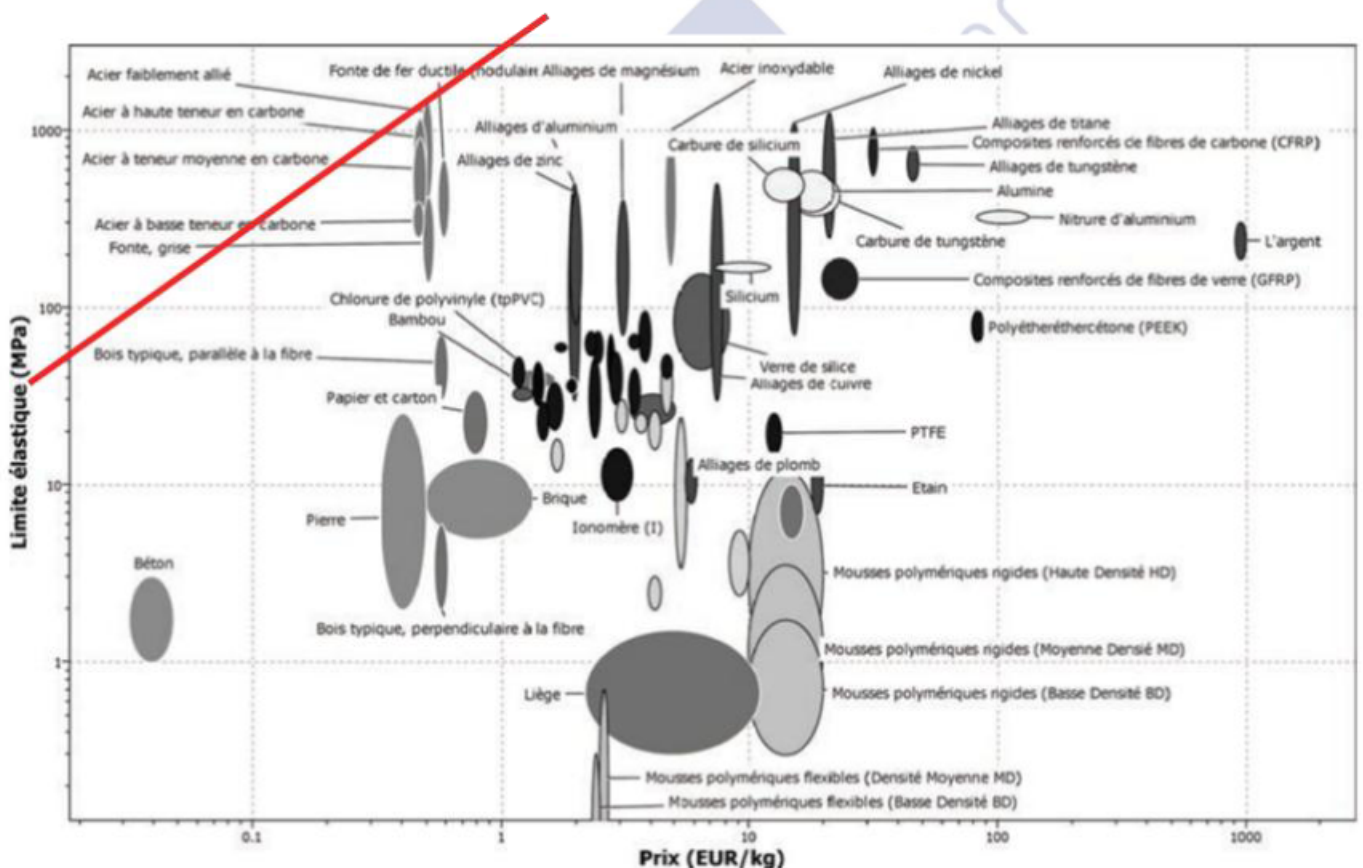
$$\sigma_{max} = \frac{F \cdot l}{I_{Gz}} \cdot b = 33 \text{ MPa}$$

Question 7. En utilisant la figure 8, donner le matériau répondant au meilleur compromis entre la résistance élastique et le prix.

Cherchons à maximiser le rapport $G = \frac{R_e}{C_m}$. En échelle logarithmique, on a :

$$\begin{aligned} \log(G) &= \log(R_e) - \log(C_m) \\ \Leftrightarrow \log(R_e) &= \log(C_m) + \log(G) \end{aligned}$$

Le meilleur matériau est donc celui coupant la droite de coefficient directeur 1 et de plus haute ordonnée à l'origine sur le graphe de la figure 8 : il s'agit des aciers.



Question 8. À partir du matériau choisi, en déduire la contrainte maximale supportée par l'aube. Cette contrainte permet-elle de valider l'exigence 1.3?

La contrainte maximale supportée a été calculée à la question 6, et est $\sigma_{max} = 33 \text{ MPa}$.

La contrainte maximale tolérable est de $\frac{R_e}{s}$, c'est-à-dire, en lisant R_e sur la figure 8 : $100 \text{ MPa} < \frac{R_e}{s} < 500 \text{ MPa}$.

Le cahier des charges ($\sigma_{max} \leq \frac{R_e}{s}$) est donc largement respecté.

IV - Conception et dimensionnement du montage de roulements

IV.1 - Dimensionnement du montage de roulements

Question 9. Donner le nom des liaisons entre l'arbre 1 et le bâti 0, réalisées respectivement par les roulements en A et en B. Donner la forme du torseur d'action mécanique réalisée par chacune de ces liaisons.

Liaison sphérique, ou rotule :

$$\{\mathcal{T}_{0 \rightarrow 1}^A\} = \begin{Bmatrix} X_A & 0 \\ Y_A & 0 \\ Z_A & 0 \end{Bmatrix}_{(x, y, z)}$$

Liaison sphère-cylindre, ou linéaire annulaire :

$$\{\mathcal{T}_{0 \rightarrow 1}^B\} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ Y_B & 0 \\ Z_B & 0 \end{Bmatrix}_{(x, y, z)}$$

Question 10. À partir d'une étude statique, déterminer les composantes non nulles du torseur d'action mécanique dans les liaisons en A et en B.

On applique le PFS à 1 au point A. On pose $F_x = 8\,750\text{ N}$ et $F_y = -5\,000\text{ N}$.

BAME :

$$\{\mathcal{T}_{0 \rightarrow 1}^A\} = \begin{Bmatrix} X_A & 0 \\ Y_A & 0 \\ Z_A & 0 \end{Bmatrix}_{(x, y, z)}$$

$$\{\mathcal{T}_{ext \rightarrow 1}\} = \begin{Bmatrix} F_x & 0 \\ F_y & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{(x, y, z)} = \begin{Bmatrix} F_x & 0 \\ F_y & 0 \\ 0 & CA \cdot F_y \end{Bmatrix}_{(x, y, z)} \quad \{\mathcal{T}_{0 \rightarrow 1}^B\} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ Y_B & -2 \cdot CA \cdot Z_B \\ Z_B & 2 \cdot CA \cdot Y_B \end{Bmatrix}_{(x, y, z)}$$

On obtient :

$$\begin{cases} X_A + F_x = 0 & 0 = 0 \\ Y_A + Y_B + F_y = 0 & -2 \cdot CA \cdot Z_B = 0 \\ Z_A = 0 & 2 \cdot CA \cdot Y_B + CA \cdot F_y = 0 \end{cases}$$

Et donc :

$$X_A = -F_x = -8\,750\text{ N} \quad Y_A = -\frac{F_y}{2} = 2\,500\text{ N} \quad Z_A = 0\text{ N}$$

$$Y_B = -\frac{F_y}{2} = 2\,500\text{ N} \quad Z_B = 0\text{ N}$$

Question 11. En déduire l'effort axial F_{Ba} et l'effort radial F_{Br} dans la liaison en B ainsi que l'effort axial F_{Aa} et l'effort radial F_{Ar} dans la liaison en A.

$$F_{Ba} = |X_B| = 0 \text{ N} \qquad F_{Br} = \sqrt{Y_B^2 + Z_B^2} = 2\,500 \text{ N}$$

$$F_{Aa} = |X_A| = 8\,750 \text{ N} \qquad F_{Ar} = \sqrt{Y_A^2 + Z_A^2} = 2\,500 \text{ N}$$

Question 12. À l'aide de l'annexe, déterminer la durée de vie L_{10} de chacun des roulements et vérifier la cohérence avec la durée de vie attendue vis à vis de la maintenance dans l'exigence 1.4.

Roulement A :

$$F_{Aa} \neq 0 \text{ et } \frac{F_{Aa}}{F_{Ar}} = 3,5 > e$$

$$P = X \cdot F_{Ar} + Y \cdot F_{Aa} = 10\,000 \text{ N}$$

$$L_{10} = \left(\frac{C}{P}\right)^3 = 8\,000 \text{ millions de tours}$$

Soit une durée de vie de $\frac{L_{10}}{N} = 9\,500 \text{ h} > 2\,500 \text{ h}$.

Roulement B :

$$F_{Ba} = 0 \text{ N}$$

$$P = F_{Br} = 2\,500 \text{ N}$$

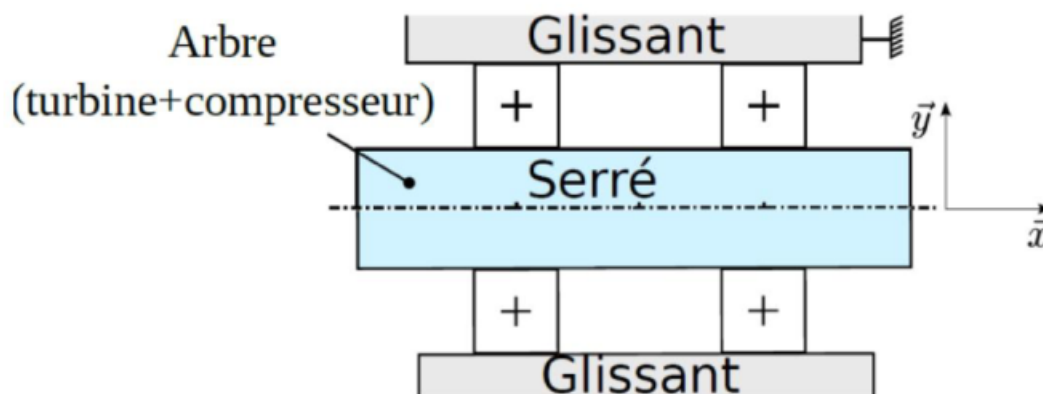
Soit une durée de vie $L_{10} = \left(\frac{C}{P}\right)^3 = 512\,000 \text{ millions de tours}$, c'est-à-dire $\frac{L_{10}}{N} = 610\,000 \text{ h}$.

Le choix des roulements permet donc de respecter l'exigence 1.4 du cahier des charges (durée de vie minimale de 2 500 h) et est cohérent avec la durée de 9 000 h entre deux maintenances.

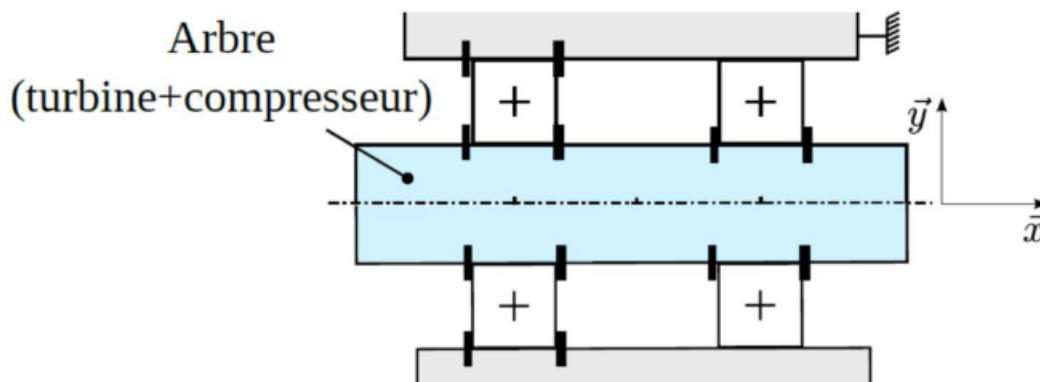
IV.2 - Conception du montage de roulements

Question 13. Sur le croquis de DR2A, indiquer les bagues montées serrées et les bagues montées glissantes. Justifier.

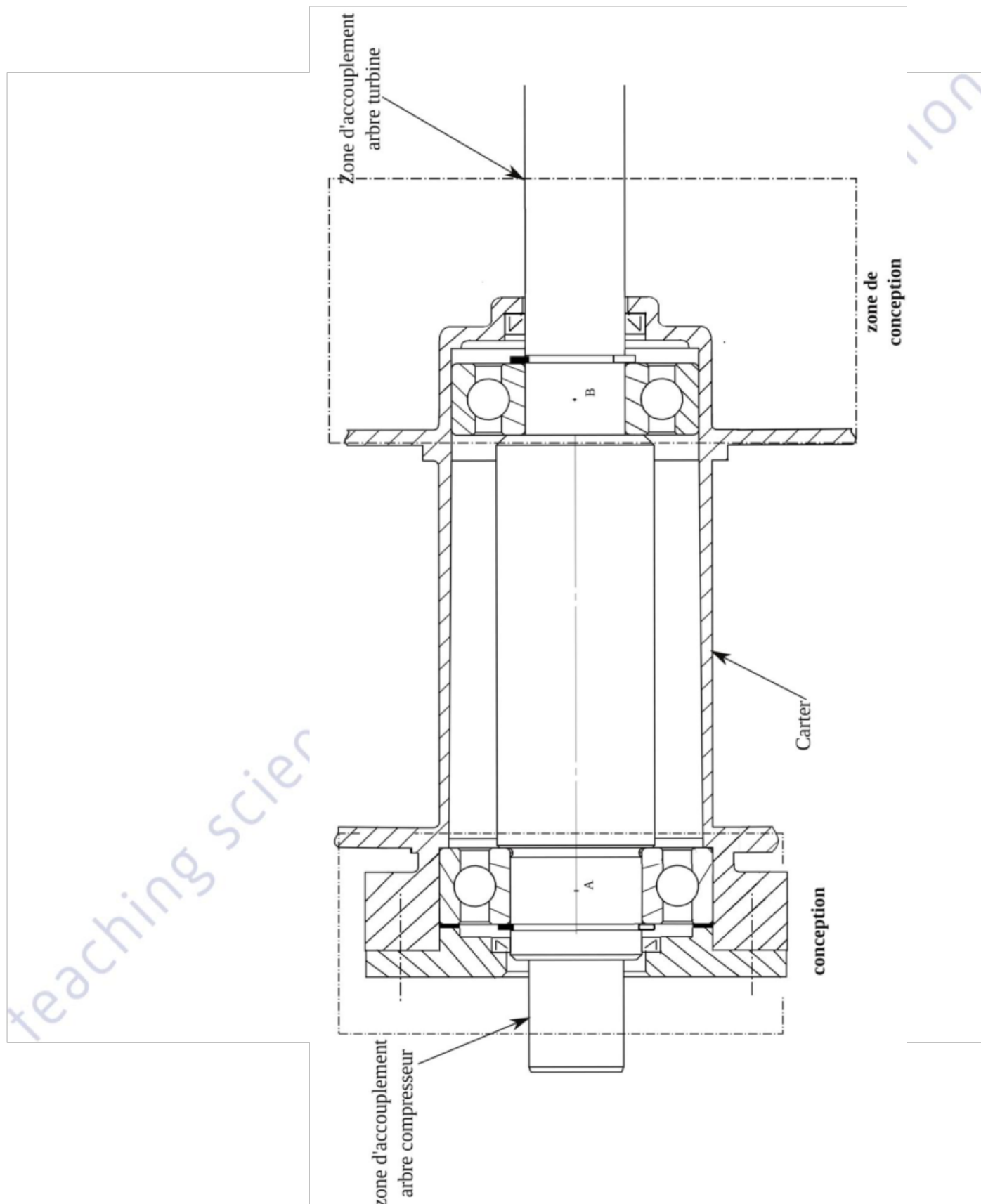
Ici la charge est fixe par rapport au bâti donc les bagues intérieures sont montées serrées et les bagues extérieures sont montées glissantes



Question 14. Sur le croquis de DR2B, indiquer par une croix les arrêts axiaux permettant de réaliser les liaisons définies par le schéma d'architecture.

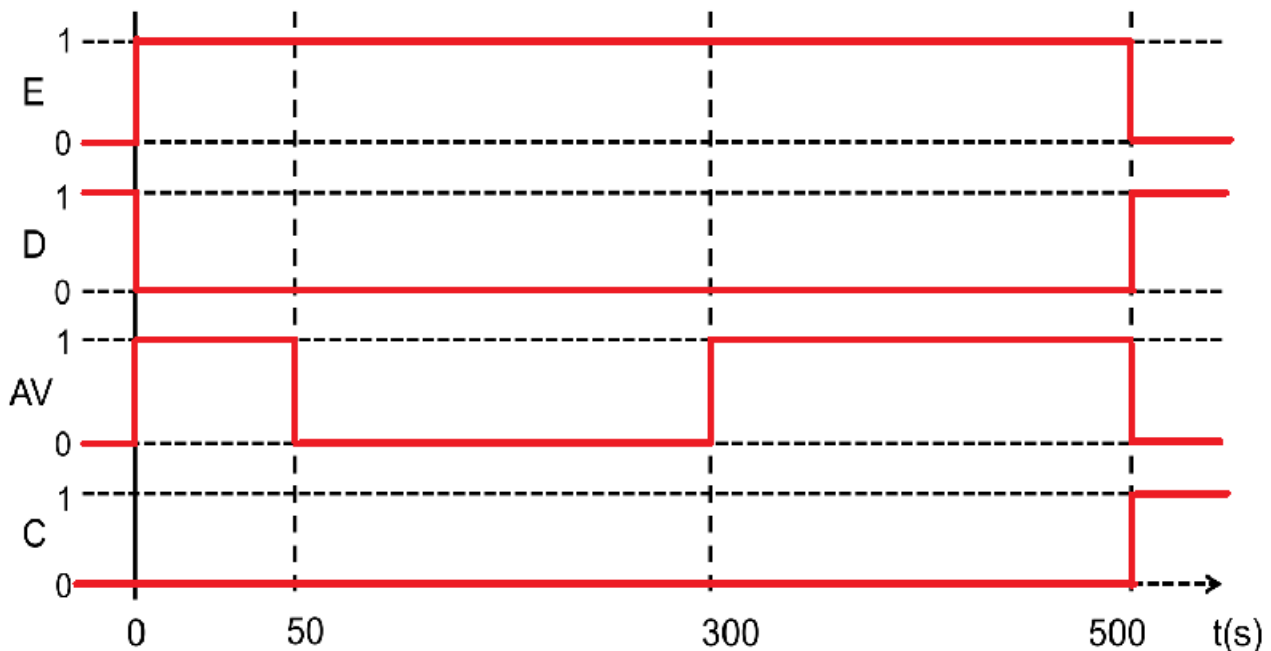


Question 15. Dans les deux zones de conception du DR3, concevoir les arrêts des deux roulements entre l'arbre et le carter de turbine. On veillera à l'étanchéité statique et dynamique de ces 2 zones vis-à-vis de l'extérieur, ainsi qu'à la lubrification des éléments roulants. Toutes les pièces ou parties de pièces déjà représentées ne doivent pas être modifiées.



Question 16. À l'aide des éléments précédents, compléter le chronogramme du DR4. Les variables associées à ce chronogramme sont notées ainsi :

- E représente l'état embrayé (le moteur de démarrage entraîne l'arbre de la turbine);
- D représente l'état débrayé (le moteur de démarrage n'entraîne plus l'arbre);
- AV représente la phase d'augmentation de vitesse du moteur grâce au variateur (état à 1 lorsque la vitesse augmente, 0 sinon);
- C représente l'état du capteur de vitesse (son état est à 1 lorsque la vitesse du moteur atteint la vitesse d'autonomie N_{tr} , sinon son état est 0).



Chronogramme du cycle de démarrage de la turbine

Question 17. En déduire le temps de cycle de démarrage et le comparer au cahier des charges.

Le démarrage dure 500 s soit 8,3 minutes < 12 minutes.

L'exigence 1.6 du cahier des charges est donc respectée.

Question 18. En utilisant le schéma cinématique (figure 14) et les données sur les roues, déterminer l'expression littérale du rapport de réduction r . Faire ensuite l'application numérique.

Attention, l'axe de la roue 2 est fixe par rapport au bâti : il s'agit donc d'un train simple, et non d'un train épicycloïdal.

$$r = \frac{\omega_{s/0}}{\omega_{e/0}} = \frac{\omega_{3/0}}{\omega_{1/0}} = -\frac{Z_1}{Z_2} \cdot \frac{Z_2'}{Z_3} = -0,1$$

Question 19. Déterminer l'énergie cinétique de Σ par rapport au référentiel galiléen lié au bâti : $E_c(\Sigma/0)$ en fonction de la vitesse de rotation $\omega_{e/0}$ et des différents moments d'inertie. En déduire l'expression de l'inertie équivalente J_{eq} ramenée sur l'arbre d'entrée. Faire l'application numérique.

$$E_c(\Sigma/0) = \frac{1}{2}J_1 \cdot \omega_{e/0}^2 + \frac{1}{2}J_2 \cdot \omega_{e/0}^2 + \frac{1}{2}J_3 \cdot \omega_{s/0}^2 + \frac{1}{2}J_4 \omega_{s/0}^2$$

$$E_c(\Sigma/0) = \frac{1}{2}J_1 \cdot \omega_{e/0}^2 + \frac{1}{2}J_2 \cdot \omega_{e/0}^2 + \frac{1}{2}J_3 \cdot r^2 \cdot \omega_{e/0}^2 + \frac{1}{2}J_4 \cdot r^2 \omega_{e/0}$$

$$E_c(\Sigma/0) = \frac{1}{2}(J_1 + J_2 + J_3 \cdot r^2 + J_4 \cdot r^2) \cdot \omega_{e/0}$$

On en déduit l'expression de l'inertie équivalente :

$$J_{eq} = J_1 + J_2 + J_3 \cdot r^2 + J_4 \cdot r^2$$

A.N :

$$J_{eq} = 9,2 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

Question 20. Déterminer l'expression littérale de l'inertie équivalente J'_{eq} de l'ensemble Σ ? ramenée sur l'arbre du moteur asynchrone. Faire l'application numérique.

On détermine l'expression de l'énergie cinétique avec le moteur asynchrone.

$$E'_c(\Sigma/0) = \frac{1}{2}J_{eq} \cdot \omega_{e/0}^2 + \frac{1}{2}J_5 \cdot \omega_{m/0}^2$$

avec $\omega_{m/0}$: la vitesse de rotation par rapport au bâti du rotor du moteur asynchrone.

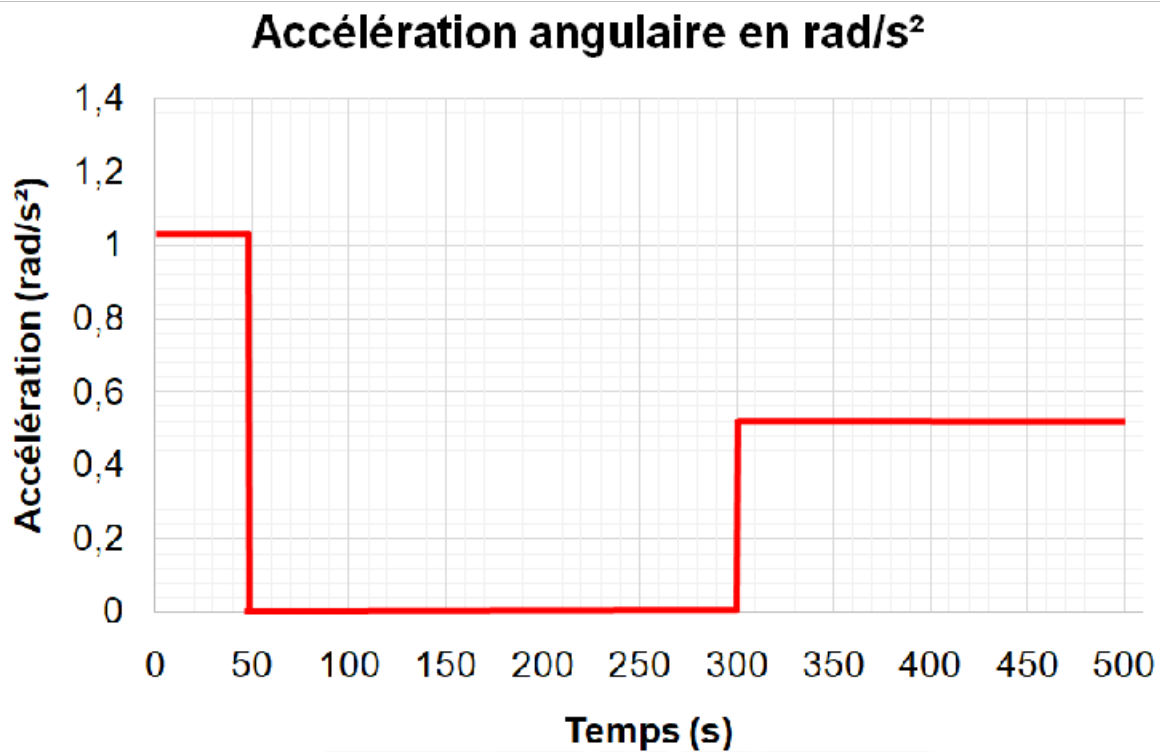
Comme $\omega_{e/0} = k \cdot \omega_{m/0}$, on en déduit :

$$J'_{eq} = J_{eq} \cdot k^2 + J_5$$

A.N :

$$J'_{eq} = 332 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

Question 21. En utilisant le tracé de la vitesse de rotation du moteur en fonction du temps (figure 12), tracer sur le DR5 l'allure de l'accélération angulaire $\dot{\omega} = \frac{d\omega(t)}{dt}$, ($\omega(t)$ étant la vitesse de rotation du moteur en $\text{rad} \cdot \text{s}^{-1}$) lors du démarrage en fonction du temps.



Question 22. Appliquer le théorème de l'énergie cinétique au système Σ' . En déduire l'expression du couple moteur $C(t)$ en fonction de J'_{eq} et de $\dot{\omega}$

L'application du théorème de l'énergie cinétique avec les hypothèses données permet d'écrire :

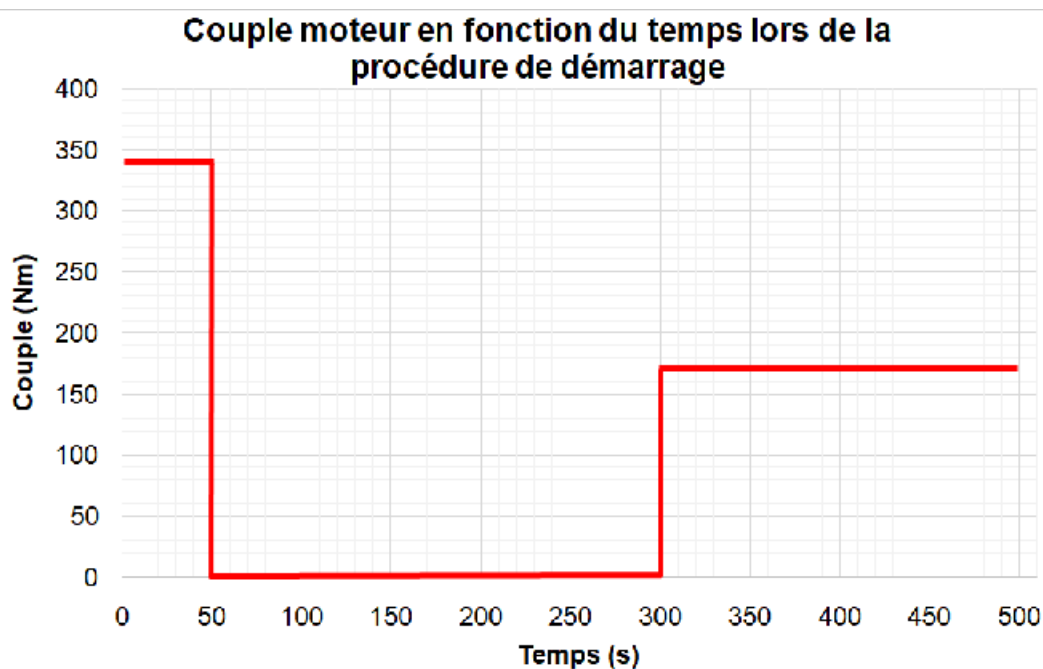
$$\frac{dE_{c(\Sigma'/0)}}{dt} = P_{int(\Sigma')} + P_{ext \rightarrow \Sigma'/0}$$

Les liaisons étant parfaites, les puissances intérieures sont nulles et la seule puissance extérieure est due au moteur de démarrage.

$$\frac{1}{2} J'_{eq} \cdot 2 \cdot \omega_{m/0} \cdot \frac{d\omega_{m/0}}{dt} = C(t) \cdot \omega_{m/0}$$

$$\text{Donc } C(t) = J'_{eq} \cdot \frac{d\omega_{m/0}}{dt}$$

Question 23. Tracer alors le couple moteur $C(t)$ sur le DR6.



Question 24. Quel est le couple moteur initial C_D que devra fournir le moteur pour que le compresseur démarre conformément au profil de vitesse donné à la figure 12?

Le couple initial à fournir par le moteur est $C_D = 345 \text{ N} \cdot \text{m}$.

Question 25. Le fait de négliger, après la phase de purge, le couple résistant de la charge entraînée par le moteur asynchrone est-il pertinent? Justifier.

Après la purge les effets aérodynamiques deviennent de plus en plus important, on ne peut plus les négliger. A $t = 500 \text{ s}$, l'écart entre le couple calculé et mesuré dépasse $100 \text{ N} \cdot \text{m}$, soit une erreur de plus de 40 %.

Question 26. Pour le régime de fonctionnement nominal, déterminer le nombre de paires de pôles p_m , le glissement g_n et le couple moteur nominal C_n . Pour l'application numérique, on supposera que la vitesse de rotation nominale du moteur est $\Omega_n = 150 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$.

Le nombre de paires de pôles est $p_m = 2$

Le glissement nominal vaut $g_n = \frac{N_s - N_n}{N_s} = 0,0133 = 1,33 \%$

Le couple nominal est $C_n = \frac{P_u}{\Omega_n} = 300 \text{ N} \cdot \text{m}$

Question 27. Indiquer la valeur du glissement lors de l'essai à vide. Justifier alors le modèle électrique à vide (figure 18).

À vide, le glissement est quasiment nul: $g_0 = 0$, donc $\frac{R_2}{g_0} \rightarrow +\infty$: le courant I_2 est nul et la branche correspondante est négligeable, d'où le schéma équivalent proposé en figure 18.

Question 28. Préciser la valeur du glissement g_{cc} lors de l'essai à rotor bloqué.

Lors de l'essai rotor bloqué, la vitesse de rotation est nul donc le glissement g_{cc} vaut 1.

Question 29. Donner l'expression de la résistance R_2 en fonction de la puissance P_{cc} , et du courant I_{2cc} .

En déduire l'expression de la réactance X_2 en fonction de V_{1cc} , de I_{2cc} et de R_2 .

$$P_{cc} = 3R_2 \cdot I_{2cc}^2$$

$$R_2 = \frac{P_{cc}}{3I_{2cc}^2}$$

$$\text{A.N : } R_2 = 0,05 \, \Omega$$

$$\text{De plus, } V_{1cc} = |V_{1cc}| = |Z_{cc} \cdot I_{2cc}| = \sqrt{R_2^2 + X_2^2} \cdot I_{2cc} \text{ donc } X_2 = \sqrt{\left(\frac{V_{1cc}}{I_{2cc}}\right)^2 - R_2^2}$$

$$(\text{A.N : } X_2 = 0,35 \, \Omega).$$

Question 30. Déterminer l'expression du couple moteur au démarrage C_D et du couple moteur maximal C_M .
On rappelle que le couple maximum est obtenu pour le glissement $g_M = \frac{R_2}{X_2}$.

Le couple de démarrage est obtenu pour un glissement $g = 1$:

$$C_D = \frac{3p_m R_2 V_1^2}{\omega (R_2^2 + X_2^2)} = 404 \, \text{N} \cdot \text{m}$$

Le couple maximum est obtenu pour le glissement $g_M = \frac{R_2}{X_2} = 0,1$:

$$C_M = \frac{3p_m V_1^2}{2X_2 \omega} = 1443 \, \text{N} \cdot \text{m}$$

Question 31. En utilisant la figure 16 du couple moteur, déterminer le couple de démarrage et le couple maximum nécessaire. Valider alors le moteur retenu.

D'après la figure 16, le couple de démarrage nécessaire est $340 \, \text{N} \cdot \text{m} < C_D$ et le couple maximum nécessaire est $350 \, \text{N} \cdot \text{m} < C_M$.

Le moteur est donc adapté au niveau des couples à fournir.

Question 32. Déterminer l'énergie en kJ nécessaire au moteur pour effectuer un démarrage.

Pour trouver l'énergie nécessaire pour un démarrage, on détermine la surface sous la courbe de la figure 22 :

$$W = 6,45 \cdot 10^6 \, \text{J}.$$

Question 33. En supposant que le rendement de l'ensemble onduleur + variateur de vitesse est $\eta_{ov} = 1$, quelle est l'énergie (en kJ) que doit stocker la batterie pour assurer 10 démarrages?

La batterie doit stocker :

$$W_{stockée} = W \times 10 = 66,5 \text{ MJ}$$

Question 34. En déduire la capacité de l'ensemble de batteries de secours.

La capacité de la batterie sera donc de **200 A · h**.

Question 35. D'après le tableau 5 justifier l'intérêt de mettre en place un filtre et préciser le type de filtre (passe-haut, passe-bas, passe-bande,..).

Les valeurs efficaces des harmoniques de rang 5, 7, 11 et 13 dépassent les valeurs limites de la norme CEM. Pour atténuer leur amplitude, il est nécessaire de mettre en place un filtre passe-bas.

Question 36. Exprimer $\underline{I}_{lh}$ en fonction de $\underline{I}_{vh}$, de R_f et de C . On notera ω la pulsation des courants. En déduire la fonction de transfert $\underline{H}(j\omega) = \frac{\underline{I}_{lh}(j\omega)}{\underline{I}_{vh}(j\omega)}$

En appliquant le diviseur de courant :

$$\underline{I}_{lh}(j\omega) = \underline{I}_{vh}(j\omega) \cdot \frac{\frac{1}{jC\omega}}{R_f + \frac{1}{jC\omega}}$$

Donc

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{\underline{I}_{lh}(j\omega)}{\underline{I}_{vh}(j\omega)} = \frac{1}{1 + jR_f C \omega}$$

Question 37. Mettre cette fonction de transfert sous forme canonique. Préciser les éléments caractéristiques.

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{K}{1 + \tau \cdot j\omega}$$

Filtre passe-bas du premier ordre.

Le gain statique est unitaire, $K = 1$.

Le temps caractéristique est $\tau = R_f C$.

Question 38. À partir de ce diagramme, identifier la fonction de transfert $\underline{H}(j\omega)$. En déduire la valeur de C .

D'après le diagramme de Bode, on reconnaît comme prévu une fonction de transfert d'un passe-bas du premier ordre (pente de 0 dB/décade pour les basses pulsations et de -20 dB/décade pour les hautes pulsations).

Comme le gain en dB est nul pour les basses pulsations, le gain statique est unitaire. La fonction de transfert est : $\underline{H}(j\omega) = \frac{1}{1+\tau \cdot j\omega}$, avec $\tau = \frac{1}{\omega_0}$ où ω_0 est la pulsation de cassure : $\omega_0 = 10^3 \text{ rad.s}^{-1}$.

On a donc $C = \frac{\tau}{R_f} = \frac{1}{R_f \omega_0} = 10^{-2} \text{ F}$.

Question 39. Compléter le tableau du DR7. Dans ce tableau, les gains du filtre sont donnés pour différentes fréquences, ainsi que les valeurs limites des courants efficaces des harmoniques selon la norme CEL.

$$I_{lh_n} = G \cdot I_{vh_n}$$

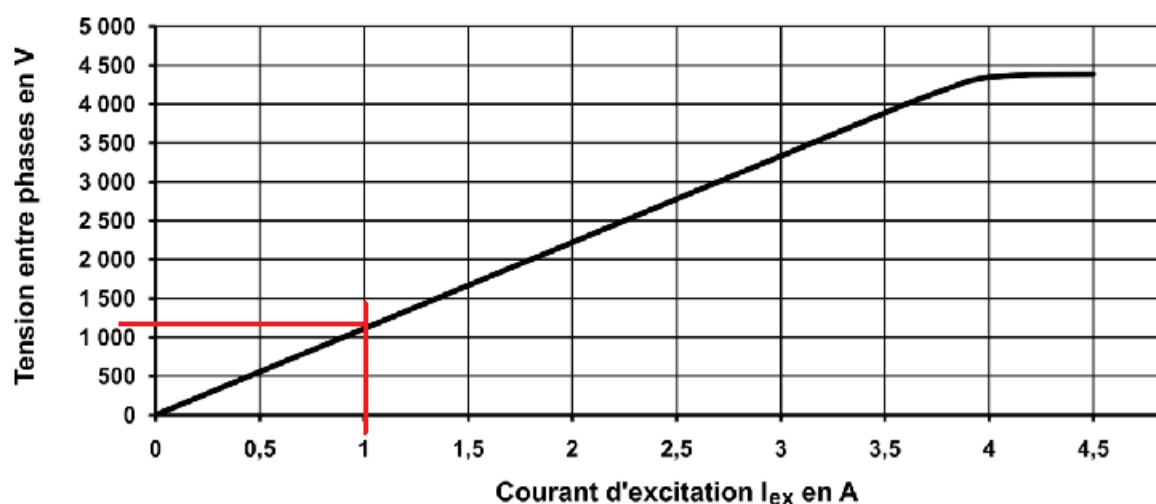
Rang	I_{lh_n}
5	7,7 A
7	4 A
11	1,45 A
13	0,92 A

Question 40. Conclure sur la validité de ce filtre.

Les valeurs efficaces des différents harmoniques sont toujours inférieures aux valeurs limites de la norme.

Le filtre est donc valide.

Question 41. En utilisant l'essai à vide, déterminer la fem E_{cc} pour le courant d'excitation I_{Exc}



À vide, $E = V$. Sur la figure 31, on lit une tension entre phases $U_{cc} = 1200 \text{ V}$, soit une tension simple : $E_{cc} = V_{cc} \approx 700 \text{ V}$.

Question 42. En utilisant l'essai en court-circuit, déterminer la réactance synchrone X .

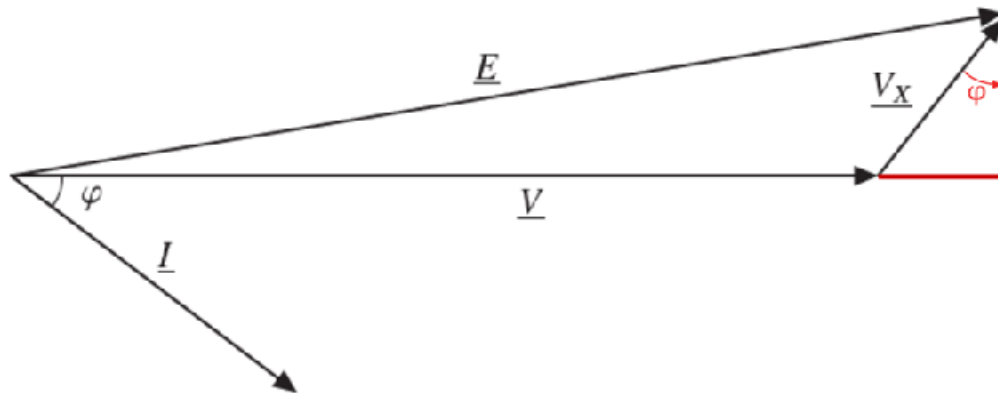
En court-circuit, $V = 0$, donc $E_{cc} = \sqrt{R^2 + X^2} \cdot I_{cc}$. D'où :

$$X = \sqrt{\left(\frac{E_{cc}}{I_{cc}}\right)^2 - R^2}$$

$$X = 0,86 \, \Omega$$

Question 43. Exprimer la valeur efficace de la fem E en fonction de V , $X \cdot I$ et de φ .

En se plaçant dans le triangle rectangle (illustré ci-dessous) dont $\underline{E}$ est l'hypoténuse et qui s'appuie sur $\underline{V}$, on observe que :



$$\begin{aligned} E &= \sqrt{(V + V_X \sin(\varphi))^2 + (V_X \cos(\varphi))^2} \\ &= \sqrt{V^2 + 2VV_X \sin(\varphi) + V_X^2} \\ &= \sqrt{V^2 + 2VXI \sin(\varphi) + (XI)^2} \\ &= 2866 \, V \end{aligned}$$

Question 44. En utilisant l'essai indiciel du DR8, déterminer la fonction de transfert $H_1(p) = \frac{E(p)}{V_{EX}(p)}$. La mettre sous forme canonique et préciser les éléments caractéristiques.

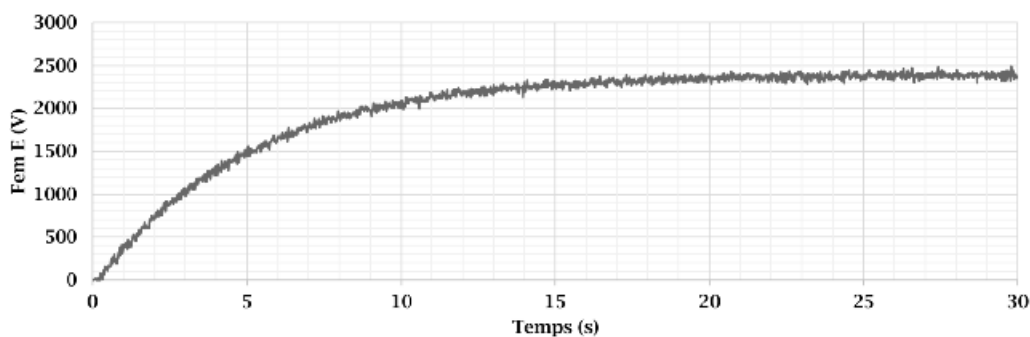
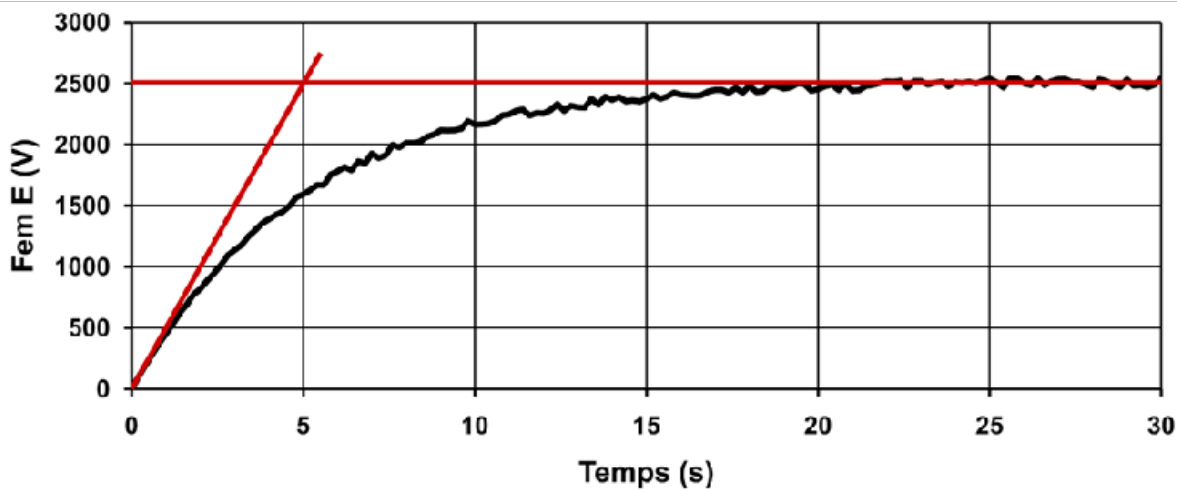


Figure 6 - Essai indiciel : fem E en fonction du temps pour $V_{EX} = 80 \, V$



Système du premier ordre (tangente à l'origine non-horizontale) :

$$H_1(p) = \frac{K_1}{1 + \tau_1 p}$$

$$K_1 = \frac{E_\infty}{V_{EX}} = 30 \text{ car } E_\infty = 2500 \text{ V}$$

$$\tau_1 = 5 \text{ s}$$

Question 45. Déterminer la fonction de transfert $H_2(p)$. Réaliser l'application numérique.

On a $V(p) = E(p) + H_2(p)I(p)$ donc $H_2(p) = \frac{V(p) - E(p)}{I(p)}$. Or $E = V + XI \sin(\varphi)$ donc :

$$H_2(p) = X \cdot \sin \varphi = 0,48 \, \Omega$$

Question 46. Déterminer l'expression de $G_{1(p)} = \left(\frac{V(p)}{V_{ref}(p)} \right)_{I(p)=0}$ et de $G_{2(p)} = \left(\frac{V(p)}{I(p)} \right)_{V_{ref}(p)=0}$ en fonction de $C(p)$, $H_1(p)$ et de $H_2(p)$.

$$G_{1(p)} = \frac{C(p) \cdot H_1(p)}{1 + C(p) \cdot H_1(p)}$$

$$G_{2(p)} = \frac{-H_2(p)}{1 + C(p) \cdot H_1(p)}$$

Question 47. Choisir T_i pour que la fonction de transfert $G_1(p)$ soit une fonction de transfert du premier ordre.

On remarque que $C(p) \cdot H_1(p) = K_p \cdot \frac{1+T_i p}{T_i p} \cdot \frac{K_1}{1+\tau_1 p}$, en choisissant $T_i = \tau$ on obtient :

$$C(p) \cdot H_1(p) = \frac{K_p \cdot K_1}{\tau_1 \cdot p}$$

et donc

$$G_1(p) = \frac{\frac{K_P \cdot K_1}{\tau_1 \cdot p}}{1 + \frac{K_P \cdot K_1}{\tau_1 \cdot p}}$$

$$G_1(p) = \frac{1}{1 + \frac{\tau_1}{K_P \cdot K_1} \cdot p}$$

Question 48. Déterminer K_P pour que le temps de réponse du système à 5 % soit de 5 s.

Le temps de réponse du système à 5 % est $t_{5\%} = \frac{3\tau_1}{K_P \cdot K_1}$ donc $K_P = 0,1$.

Question 49. Déterminer la valeur finale lorsque V_{ref} est un échelon d'amplitude $V_0 = 2400 \text{ V}$ et lorsque le courant consommé est un échelon de $I_0 = 800 \text{ A}$. Conclure sur les performances du système.

$$G_1(p) = \frac{1}{1 + \frac{5}{3}p}$$

$$G_2(p) = -\frac{0,8p}{1 + \frac{5}{3}p}$$

$$V(p) = G_1(p) \cdot V_{ref}(p) + G_2(p) \cdot I(p)$$

$$V(p) = \frac{1}{1 + \frac{5}{3}p} \cdot \frac{V_0}{p} - \frac{0,8p}{1 + \frac{5}{3}p} \cdot \frac{I_0}{p}$$

En appliquant le théorème de la valeur finale, on obtient :

$$V(+\infty) = V_0 = 2400 \text{ V}$$

Conclusion :

- le système est précis (erreur statique nulle) ;
- il est stable car c'est un système du premier ordre ;
- il respecte le temps de réponse du cahier des charges.

Question 50. Lors d'un mouvement de rotation à vitesse constante ω , calculer la résultante du torseur dynamique appliquée à l'ensemble arbre + rotor / 0 noté $\vec{R}_{\text{arbre} + \text{rotor} / 0}$.

$$\vec{R}_{\text{arbre} + \text{rotor} / 0} = M \cdot \overrightarrow{\Gamma_{G/0}}$$

$$\overrightarrow{\Gamma_{G/0}} = \dot{z} \cdot \overrightarrow{z_0} + h \cdot \omega \cdot \overrightarrow{z_1}$$

$$\overrightarrow{\Gamma_{G/0}} = \ddot{z} \cdot \overrightarrow{z_0} - h \cdot \omega^2 \cdot \overrightarrow{y_1}$$

$$\vec{R}_{\text{arbre + rotor} / 0} = M(\ddot{z} \cdot \overrightarrow{z_0} - h \cdot \omega^2 \cdot \overrightarrow{y_1})$$

Question 51. En appliquant le Principe Fondamental de la Dynamique à l'ensemble arbre + rotor, écrire l'équation de la résultante dynamique projetée sur $\overrightarrow{z_0}$.

Application du Principe fondamental de la dynamique à l'ensemble arbre + rotor :

Théorème de la résultante dynamique projeté sur $\overrightarrow{z_0}$:

$$M(\ddot{z} - h\omega^2 \sin(\alpha(t))) = -k \cdot z(t) - C \cdot \dot{z}(t)$$

Question 52. Montrer alors que cette équation peut se mettre sous la forme :

$$D \cdot \frac{d^2 z(t)}{dt^2} + E \cdot \frac{dz(t)}{dt} + F \cdot z(t) = e(t).$$

À partir de l'écriture précédente, on en déduit : $M\ddot{z} + C \cdot \dot{z}(t) + k \cdot z(t) = Mh\omega^2 \sin(\alpha(t))$

On a donc $D = M, E = C, F = k$ et $e(t) = Mh\omega^2 \sin(\alpha(t))$.

Question 53. Définir les types de modélisations effectuées sur chaque modèle.

- Modèle 1 : modélisation causale (schéma bloc).
- Modèle 2 : modélisation acausale (modèle multiphysique).

Question 54. Citer un avantage du modèle 2.

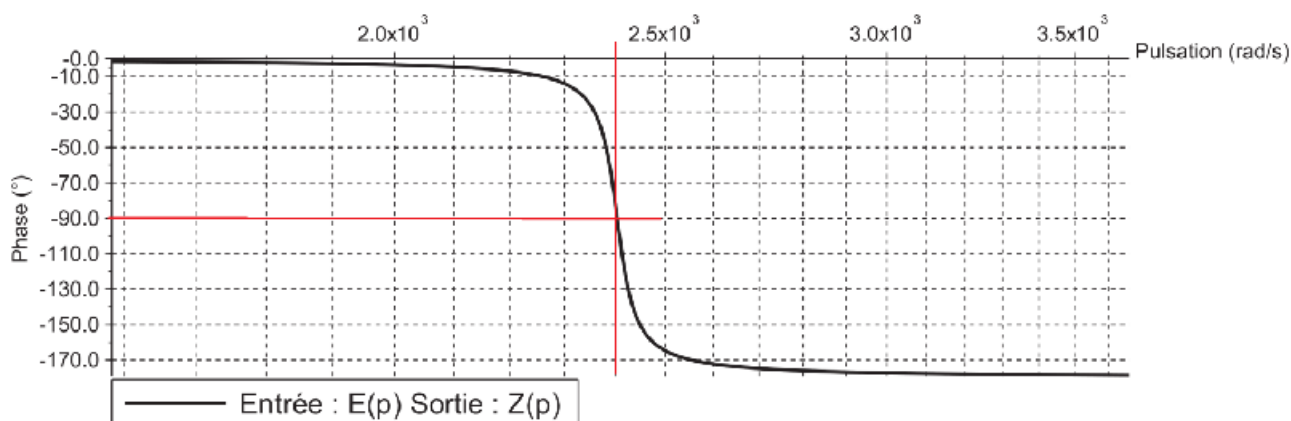
- Il est réversible.

Question 55. Comparer les résultats obtenus par ces deux modélisations en termes d'amplitude d'oscillation. Conclure sur la validation de l'exigence 1.2 pour la vitesse de rotation de $N = 15\,000 \text{ tr} \cdot \text{min}^{-1}$.

Les 2 simulations sont équivalentes (amplitude de 0.8 mm).

L'amplitude est inférieure au mm, l'exigence 1.2 du cahier des charges est donc respecté.

Question 56. À l'aide du zoom du diagramme de phase tracé sur le DR9, déterminer la pulsation de résonance ω_r (vous ferez apparaître un tracé sur le DR9 afin de justifier votre réponse). La comparer avec la vitesse de rotation de la turbine.



Zoom du diagramme de phase autour de la résonance

$\varphi = -90^\circ$ pour $\omega = 2,4 \cdot 10^3$ rad/s soit environ 23 000 tr/min bien supérieure à la vitesse de rotation du rotor.

Question 57. Conclure quant au respect de l'exigence 1.2 lors du fonctionnement de la turbine à gaz.

- Pas de phénomène de résonance à la fréquence de rotation nominale, amplitude de déplacement du rotor inférieur à 1mm → le CdCF est validé.