

Proposition de corrigé

Concours : X-ENS

Année : 2024

Filière : PSI

Épreuve : Sciences Industrielles pour l'Ingénieur

Ceci est une proposition de corrigé des concours de CPGE, réalisée bénévolement par des enseignants de Sciences Industrielles de l'Ingénieur et d'Informatique, membres de l'[UPSTI](https://www.upsti.fr) (Union des Professeurs de Sciences et Techniques Industrielles), et publiée sur le site de l'association :

<https://www.upsti.fr/espace-etudiants/annales-de-concours>

A l'attention des étudiants

Ce document vous apportera des éléments de corrections pour le sujet traité, mais n'est ni un corrigé officiel du concours, ni un corrigé détaillé ou exhaustif de l'épreuve en question.

L'UPSTI ne répondra pas directement aux questions que peuvent soulever ces corrigés : nous vous invitons à vous rapprocher de vos enseignants si vous souhaitez des compléments d'information, et à vous adresser à eux pour nous faire remonter vos éventuelles remarques.

Licence et Copyright

Toute représentation ou reproduction (même partielle) de ce document faite sans l'accord de l'UPSTI est **interdite**. Seuls le téléchargement et la copie privée à usage personnel sont autorisés (protection au titre des [droits d'auteur](#)).

En cas de doute, n'hésitez pas à nous contacter à : corrigesconcours@upsti.fr.

Informez-vous !

Retrouvez plus d'information sur les [Sciences de l'Ingénieur](#), l'[orientation](#), les [Grandes Ecoles](#) ainsi que sur les [Olympiades de Sciences de l'Ingénieur](#) et sur les [Sciences de l'Ingénieur au Féminin](#) sur notre site : www.upsti.fr

L'équipe UPSTI

ÉTUDE DU MÉLANGEUR GYROSCOPIQUE 2 AXES GX300

Corrigé UPSTI

Contexte de l'étude

Question 1 L'objectif principal de la machine est de créer un mélange homogène entre la base blanche et les pigments. Proposer une définition mathématique de l'homogénéité du mélange.

Les pigments sont a priori des particules non miscibles dans l'eau. On peut penser à définir l'homogénéité d'un mélange avec une concentration de pigments par unité de volume $c_{\text{pigments}}(M)$. Le mélange sera homogène si ce taux est constant $c_{\text{pigments}}(M) = \text{cste}$.

S'agissant de particules on peut aussi penser à définir l'homogénéité à partir de la moyenne et de l'écart type du nombre de pigments pour un volume donné.

On peut également proposer comme réponse que le mélange est homogène si la densité volumique de chaque colorant et de la peinture est uniforme, c'est-à-dire la même en tout point du mélange. Pour un colorant c_i et la base b , le mélange est homogène si :

$$\forall M, \forall i, \rho_{ci}(M) = \text{cste} \text{ et } \forall M, \rho_b(M) = \text{cste}$$

Question 2 Indiquer l'intérêt de réaliser le mélange de la base blanche avec les pigments en magasin.

Pour des questions de gestion des stocks (et de taille de l'espace de stockage nécessaire), il est plus simple de stocker les différents pigments et une réserve de peinture blanche de base (déjà en pots au en cuve avec des pots vides) que des stocks de pots de chaque couleurs.

Les coûts en cas d'inventaire d'une couleur seront beaucoup plus faibles, il est possible de proposer une gamme de couleurs beaucoup plus large. La durée de vie des pigments est sûrement beaucoup plus élevée également que le durée de vie de la peinture déjà mélangée.

Question 3 De quel phénomène physique provient le mélange ? Commenter vis-à-vis de l'intérêt du mélangeur gyroscopique.

Les particules des pigments vont se disperser dans le liant par un phénomène de convection (mécanique ici). L'intérêt du mélangeur gyroscopique est de générer cette convection suivant les directions axiales et radiales dans le pot et non simplement radialement comme cela serait le cas dans un mélangeur en rotation autour d'un unique axe de rotation.

Question 4 Citer deux exigences que le système doit satisfaire lors de la mise en place du pot et deux contraintes à satisfaire lors du fonctionnement du mélangeur.

Le sujet propose ici une distinction assez étrange entre deux termes de vocabulaires associés à des outils d'analyse différents. La suite du sujet montre que le candidat doit malheureusement être capable de proposer une réponse quel que soit le flou, l'imprécision voire l'inexactitude dans la formulation de certaines questions.

Le terme d'exigence est clair puisque faisant référence au diagramme des exigences. On propose comme exigence fonctionnelle lors de la mise en place du pot :

- Mettre en place des pots de différentes dimensions
- Ne pas déformer le pot
- Avoir un accès suffisant et aisé pour mettre en place le pot / ergonomie du dispositif .

On comprendra par contraintes des relations exprimées par un lien « Satisfy » dans un diagramme SysML et donc une contrainte technique découlant de l'exigence. Toutefois, on ne se place pas cette fois dans la même phase du cycle de vie

- Maintenir fermement les pots pour éviter tout glissement (avoir un effort de serrage suffisant)
- Créer un mouvement susceptible de créer de la convection dans l'ensemble du pot (deux rotations d'axes perpendiculaires à vitesses élevées et différentes).

Question 5 Citer deux avantages et deux inconvénients de chacun de ces deux autres types de mélangeurs.

Pour le mélangeur à base de vibrations :

- Avantages :
 - o possibilité d'adapter la fréquence ;
 - o simplicité de la mise en œuvre ;
 - o simplicité du dispositif (uniaxial) ;
 - o pas d'éléments en contact avec la peinture hormis le pot donc pas de nettoyage.
- Inconvénients :
 - o durée de vie des composants mécaniques suite aux vibrations ;
 - o bruit gênant et possibilités de casse en cas de mauvais montage / de système déséquilibré ;
 - o mouvements de convection limités et plus difficiles à réaliser dans toutes les directions.

Pour le mélangeur pneumatique à agitateur :

- Avantages
 - o qualité du mélange, possibilité d'avoir un agitateur adapté à chaque type de pot ou chaque type de peinture (viscosité etc...) ;
 - o machine peu coûteuse et robuste ;
- Inconvénients :
 - o agitateur en contact qui impose un nettoyage entre chaque mélange ou en tous cas à chaque changement de couleurs de pigments ce qui rend l'utilisation complexe ;
 - o possibilité d'apparitions de bulles d'air dans le mélange ;

- coût d'utilisation important (lié au point numéro 1).

Partie 1 : Mise en place du pot de peinture

1.1 Insertion du pot dans le mélangeur

Question 6 À l'aide d'un schéma sur lequel les forces mises en jeu seront représentées, préciser la longueur maximale du système de chargement / déchargement du pot (figure 6, annexe A) permettant d'avancer le plateau circulaire bas pour charger le pot sans déversement du système en porte-à-faux.

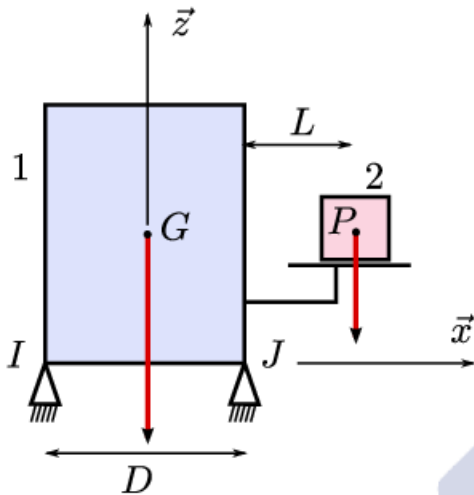


Figure 1 : modèle de calcul 1 de la limite de basculement proposée

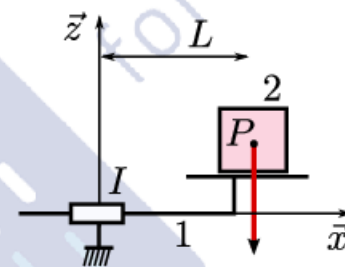


Figure 2 : modèle de calcul 2 de la limite de basculement proposée

Première des multiples questions « libres » du sujet, il faut ici interpréter la cause du déversement du système en porte-à-faux.

Une première interprétation est d'utiliser la donnée de l'annexe : le plateau supporte un couple maximal de 600Nm ; nous considérerons que le dépassement de ce couple maximal engendre une dégradation donc un déversement du système.

Le système est modélisé sur le schéma figure 2 (encore une inexactitude du sujet, ce n'est pas une force qui nous intéresse mais le moment de basculement, parler d'actions mécaniques aurait été plus judicieux).

Le poids maximal d'un pot sera estimé à partir des dimensions fournies :

$$\|\vec{P}\| = \rho_{\text{peinture}} V_{\text{peinture}} = 1.5 \times 25 \times 10 = 375 \text{ N}$$

On majorera cette valeur en prenant en compte le poids du pot vide et le poids du dispositif de translation (estimé à 25N) pour obtenir un effort de 400N maximum.

Le couple de déversement maximal étant de 600Nm cela donne un bras de levier maximal d de 1,5m avant déversement.

On peut également proposer un modèle de limite de basculement tel que sur la figure 1.

Soient M la masse de la machine (1), m la masse du pot (2), D la profondeur de la machine (G centre de gravité supposé au milieu) et L la longueur de porte-à-faux du plateau.

Le principe fondamental de la statique appliqué à l'ensemble {machine+pot} s'écrit :

$$\{\tau(I)_{0 \rightarrow 1}\} + \{\tau(J)_{0 \rightarrow 1}\} + \{\tau_{Poids \rightarrow 1}\} + \{\tau_{Poids \rightarrow 2}\} = \{0\}$$

La limite du basculement est atteinte lorsque l'effort en I s'annule. Le théorème du moment dynamique en J suivant $\vec{y}$ permet de déduire la longueur L limite de basculement (en observant que le moment de la force en I est nul car cette force en I est nulle à la limite du basculement, et que le moment de la force en J réduit en J est nul également) :

$$0 + 0 - Mg \frac{D}{2} + mgL = 0 \Rightarrow L_{max} = \frac{MD}{2m}$$

Cependant, cette expression nécessite de connaître la masse et la profondeur de la machine, ce qui ne permet pas d'application numérique.

1.2 Verrouillage du pot avant le mélange

Question 7 Expliquer de quelle manière l'action du moto-réducteur sur la vis-mère permet aux deux plateaux de se rapprocher simultanément.

L'action du motoréducteur va conduire à une rotation de l'arbre dans lequel sont usinées les vis. Sachant que les deux systèmes vis-écrous partagent le même arbre, il suffit de prévoir des vis à pas opposés (pas à droite pour l'une et à gauche pour l'autre) pour qu'une rotation de l'arbre conduise à des translations opposées, permettant aux plateaux de se rapprocher simultanément.

Question 8 Justifier la représentation par deux liaisons glissières équivalentes sur ce schéma cinématique des liaisons entre les supports haut 5, bas 6 et le moyeu central 1 de la solution technique représentée sur la figure 6 (annexe B).

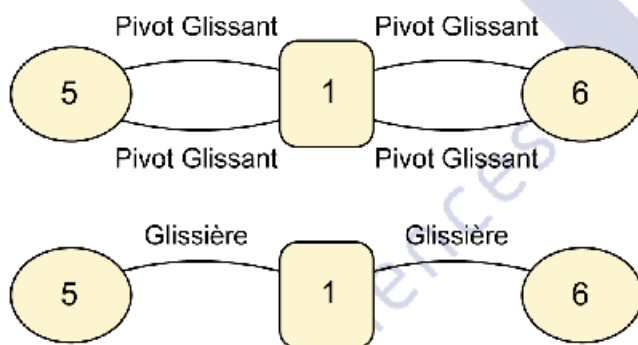


Figure 3 : Modélisation par liaison glissière

La notion évoquée de « deux couples antagonistes » est obscure... Mais elle ne semble pas utile pour la suite.

Les deux guidages sont réalisés chacun par deux contacts cylindre-cylindre, dont la longueur est supérieure à deux fois le diamètre (remarque technologique qui n'est pas du programme de PSI a priori), ce qui invite à modéliser les deux contacts cylindre-cylindre par deux liaisons pivot-glissant d'axes parallèles (figure 3).

La liaison équivalente à l'association parallèle des deux liaisons pivot-glissant parallèles est une liaison glissière de même direction que les axes des pivot-glissant : le seul mouvement autorisé commun aux deux liaisons est une translation.

Question 9 Préciser quelles hypothèses constructives permettent d'utiliser cette représentation.

La notion d'« hypothèses constructives » est obscure, et ressemble à une fusion d'« hypothèses de modélisation » et de « solutions constructives », qui sont deux notions claires mais bien différentes.

Les hypothèses associées au choix de deux liaisons glissières parfaites peuvent être :

- un jeu négligeable devant le mouvement utile du mécanisme,
- des tolérances de fabrication suffisamment précises pour éviter tout blocage du mouvement (en particulier sur le parallélisme des axes).

Les solutions constructives permettant de garantir un fonctionnement conforme au modèle peuvent être :

- des longueurs de guidage supérieures à 1,5 fois le diamètre pour éviter le rotulage,
- le parallélisme des deux axes des colonnes et des deux axes des alésages des blocs supports,
- un écartement entre les axes des colonnes égal à l'écartement entre les alésages des blocs supports.

Question 10 Fournir le graphe des liaisons du modèle représenté sur la figure 5 (annexe A).

Le graphe des liaisons est proposé figure 4.

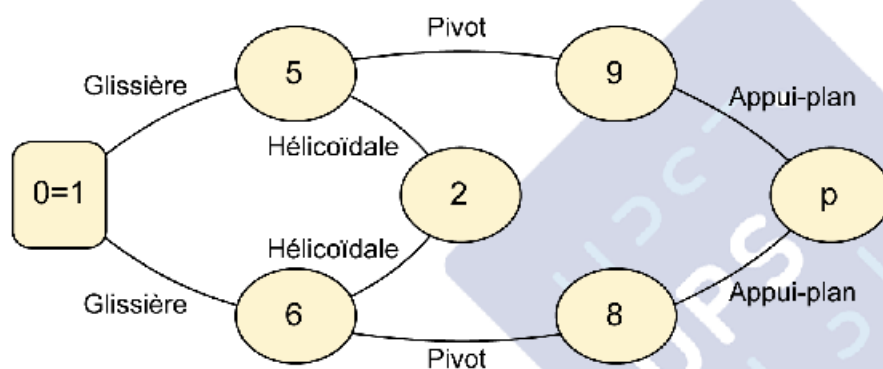


Figure 4 - Graphe des liaisons du modèle de la figure 5 annexe A

Question 11 Déterminer le degré d'hyperstatisme du modèle du mécanisme ainsi représenté.

En termes de mobilités, le pot de peinture en contact avec deux appuis-plans sans frottement peut translater dans les deux directions des plans et tourner suivant la normale aux plans, soit 3 mobilités. Par ailleurs, les deux plateaux peuvent, en l'absence de frottement, tourner suivant leur axe indépendamment, soit 2 mobilités. Enfin, dans le cadre du modèle proposé (et bien que cela puisse paraître étrange), rien n'empêche les deux glissières de translater, ce qui ajoute une mobilité. Cela conduit ainsi à $m = 3 + 2 + 1 = 6$. À noter que la rotation de la vis est interdite vu que les deux plateaux sont en contact avec le pot.

Le nombre d'inconnues cinématiques est lié aux liaisons : 2 glissières, 2 hélicoïdales, 2 pivots et 2 appuis-plans : $I_c = 2 \times 1 + 2 \times 1 + 2 \times 1 + 2 \times 3 = 12$.

On en déduit le degré d'hyperstaticité : $h = 6\gamma - I_c + m = 12 - 12 + 6 = 6$.

Il s'agit d'un degré assez élevé pour un mécanisme en mouvement, mais il faut noter que les appuis-plans sont réalisés par des pièces déformables, ce qui va atténuer les conséquences de l'hyperstaticité.

Question 12 Proposer un schéma cinématique de la liaison entre l'embout du système NIDEC et la vis-mère, en respectant la numérotation des éléments fournis sur la figure 11 (annexe D).

Cette question n'est pas simple pour des étudiants de PSI car ils n'ont pas de conception au programme. La modélisation des liaisons est appréhendée en PSI par la géométrie des surfaces en contact, mais sans prendre en compte les règles usuelles de conception comme par exemple le rapport entre le diamètre et la longueur pour un

guidage cylindre-cylindre. De plus, la lecture de dessins de définition n'est pas au programme et les seules vues fournies sont des vues planes sujettes à des interprétations inacceptables dans le cadre d'un concours.

Comment un étudiant de PSI peut-il imaginer la forme d'une clavette demi-lune ?

Une version qui pourrait être attendue d'un étudiant de PSI pourrait être celle de la figure 5, où le contact cylindrique entre la clavette 15 et l'axe 14 est modélisé par une pivot, où le contact entre la clavette et le manchon est modélisé par une glissière, et où les divers contacts cylindriques sont modélisés par des pivot-glissant. Le roulement sera difficilement modélisé par un étudiant de PSI.

Une autre version tenant compte des règles usuelles de conception pourrait être celle de la figure 6, où l'association clavette + axe est en liaison glissière avec le manchon (la clavette est considérée comme un élément de liaison), le roulement sur épaulements est modélisé par une liaison sphérique, et la goupille, supposée montée serrée sur le manchon, est en encastrement avec le manchon. La longueur de guidage courte entre l'axe de la vis et le manchon conduit à une liaison sphère-cylindre.

Question 13 Proposer une liaison équivalente entre l'embout du système NI- DEC et la vis-mère, là encore en respectant la numérotation des éléments fournis sur la figure 11 (annexe D). Justifier ce modèle de liaison équivalente et déterminer son degré d'hyperstatisme.

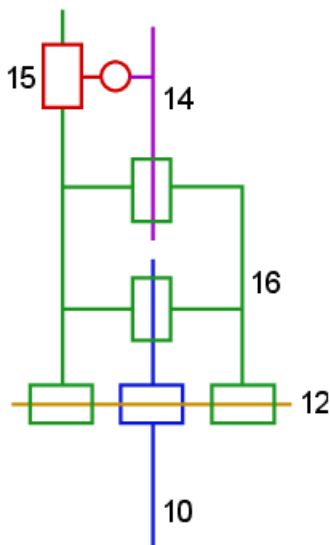


Figure 5 : modèle 1 attendu d'un élève de PSI

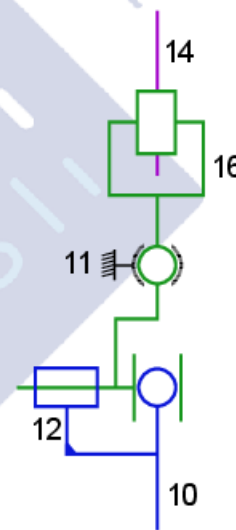


Figure 6 : modèle 2 avec prise en compte des règles constructives classiques

Modèle de la figure 5 : La pivot-glissant entre 14 et 16 autorise une rotation et une translation de direction $\vec{y}_2$, mais la rotation est interdite par la clavette 15.

La pivot-glissant entre 16 et 10 autorise une rotation et une translation de direction $\vec{y}_2$, mais ces deux mouvements sont bloqués par la goupille 12, donc 16 et 10 sont immobiles l'un par rapport à l'autre.

La liaison équivalente est donc une glissière de direction $\vec{y}_2$.

Hyperstaticité

Le modèle étudié correspond au graphe des liaisons figure 7.

Le modèle présente trois boucles fermées, soit $\gamma = 3$.

La seule mobilité utile est une translation de direction $\vec{y}_2$, tandis que la goupille présente une mobilité interne en rotation et une mobilité interne de translation, soit $m = 3$.

Le nombre d'inconnues des liaisons participant à la boucle (5 pivot-glissant, une pivot et une glissière) vaut $I_c = 5 \times 2 + 1 + 1 = 12$.

On en déduit $h = 6\gamma - I_c + m = 6 \times 3 - 12 + 3 = 9$.

Modèle de la figure 6 : La liaison avec le support 11 n'est pas considéré. La liaison glissière entre 14 et 16 autorise une translation de direction $\bar{y}_2$. L'association parallèle des liaisons pivot-glissant et sphère cylindre entre 16 et 10 autorise une rotation autour de l'axe de la goupille.

Les mouvements autorisés entre 14 et 10 sont ainsi :

- une translation de direction $\bar{y}_2$;
- une rotation suivant l'axe de la goupille.

Il s'agit d'une liaison non normalisée.

Hyperstaticité

Le modèle étudié correspond au graphe des liaisons figure 8.

La seule boucle fermée est celle au niveau de la goupille. Soit $\gamma = 1$.

La mobilité de cette boucle est la rotation autour de l'axe de la pivot : $m = 1$.

Le nombre d'inconnues des liaisons participant à la boucle (une pivot-glissant, un encastrement et une sphère-cylindre) vaut $I_c = 2 + 0 + 4 = 6$.

On en déduit $h = 6\gamma - I_c + m = 6 - 6 + 1 = 1$. La contrainte de montage correspond au double positionnement en translation suivant la normale au plan de la figure.

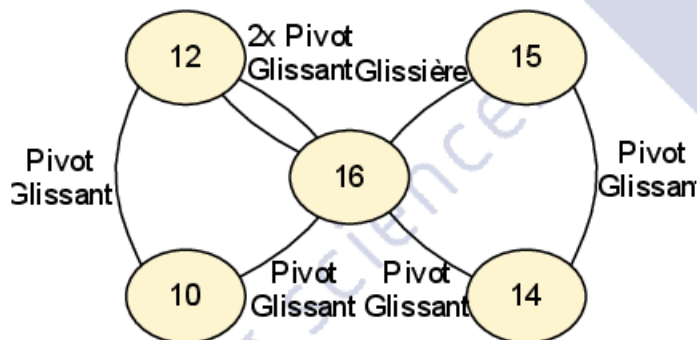


Figure 7 : Graphe de liaisons pour le calcul d'hyperstaticité pour le modèle 1

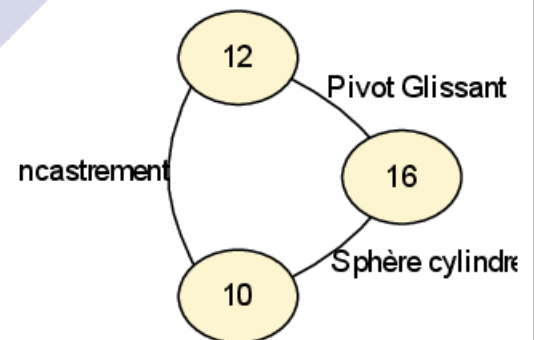


Figure 8 : Graphe de liaisons pour le calcul d'hyperstaticité pour le modèle 2

Question 14 À quel couple du moto-réducteur correspond la force de serrage maximale pour la gamme de pot supportée par la machine? Justifier la démarche.

La gamme de pot n'intervient pas particulièrement dans la relation entre le couple du moto-réducteur et la force de serrage. L'information de l'énoncé permettant de déterminer la force de serrage (quel que soit le pot) est la rigidité du polymère et la variation maximale entre plateaux :

$$F = k\Delta E_{p\max} = 1 \times 10^6 \times 4 \times 10^{-3} = 4000N$$

Le couple à transmettre dans chaque hélicoïdale vaut (en valeur absolue) :

$$M_h = \frac{p}{2\pi} F = \frac{1,25 \times 10^{-2}}{6,28} \times 4000 \approx 0,8 \text{ N.m}$$

Le moteur entraîne les deux hélicoïdales, soit $C_{M2 \max} = 2M_h \approx 1,6 \text{ Nm}$ (1,59 Nm à la calculatrice). Le couple moteur est bien inférieur au couple maximal admissible de 4 N.m indiqué par la documentation technique.

Question 15 Indiquer la valeur de la contrainte de cisaillement que devra supporter la goupille (pièce numéro 12 de la figure 11, annexe D) en cas de serrage au couple maximal du moto-réducteur. On considérera un coefficient de sécurité de 2. Préciser si le dimensionnement de la goupille est valide par rapport au cahier des charges.

La notion de contrainte de cisaillement n'est pas au programme de PSI...

La question propose l'hypothèse de « serrage au couple maximal du moto-réducteur » mais on ne sait pas s'il faut utiliser le couple maximal calculé à la question précédente ou le couple maximal indiqué sur la documentation technique du moteur. On utilise la valeur la plus élevée : celle de la documentation technique à 4 N.m.

La contrainte de cisaillement s'écrit (voir dimensions figure 9) :

$$\tau = \frac{F_{\text{cisaillement}}}{S_{\text{goupille}}} = \frac{C_{M2 \max} / D}{\pi d^2 / 4} = \frac{4C_{M2 \max}}{\pi d^2 D} \approx 8 \text{ MPa}$$

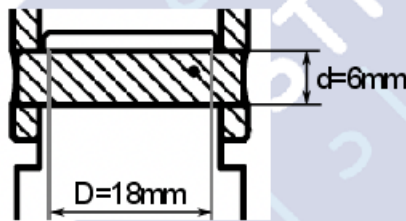


Figure 9 : Dimensions pour le calcul de la contrainte de cisaillement.

Avec un coefficient de sécurité de 2, la contrainte de cisaillement limite est portée à 16 MPa, valeur qui reste largement inférieure à la limite de résistance au cisaillement de 270 MPa. Il n'y a pas de cahier des charges dans le sujet mais on peut dire que la tenue de la goupille est validée.

Question 16 Compléter le schéma 13 sur le document réponse DR1 représentant l'action élémentaire de la vis sur un petit élément de la roue en contact avec cette dernière lorsque la vis est motrice (rotation horaire selon $\vec{x}$). Préciser la composante permettant d'assurer la rotation de la roue.

Le quotient de deux vecteurs est une coquille qu'il aurait été souhaitable d'éviter dans un sujet de SI pour ne pas décrédibiliser la matière... Les candidats auront certes compris, mais nous serions reconnaissants aux auteurs de faire attention à rigueur des notations.

Par ailleurs, vue l'erreur sur les sens de rotation conduisant à une action motrice pour la figure proposée, on se demande si les copies justes ont finalement été évaluées comme telles...

L'énoncé de cette question est bien ennuyeux car si la rotation de la vis est « horaire selon $\vec{x}$ », cela signifie que la vitesse de rotation de la vis est négative (le sens horaire est le sens anti-trigonométrique) suivant $\vec{x}$, mais dans ce cas la vitesse du filet en I est suivant $+\vec{y}$ et la vis ne peut donc pas être « motrice » avec un contact sur le côté du filet indiqué sur la figure... Il faut donc corriger la question pour pouvoir la traiter, ce qui est particulièrement déstabilisant pour un candidat.

Nous ferons l'hypothèse que la vitesse de rotation de la vis est positive suivant $\vec{x}$ (rotation anti-horaire). Dans ce cas, la vitesse du filet en I est suivant $-\vec{y}$ et le filet de la vis pousse la dent de la roue en s'appuyant sur la ligne de contact indiquée sur la figure.

Dans cette situation, la vitesse relative en I de la roue par rapport à la vis est dessinée en bleu, et la composante tangentielle de la force $\vec{dF}_{vis \rightarrow roue}$ de la vis sur la roue s'oppose à la vitesse, ce qui définit le coté du cône de frottement à utiliser.

La composante « liée au couple sur la roue » est la composante suivant $\vec{x}$ tandis que la composante « liée au couple sur la vis » est la composante suivant $\vec{y}$.

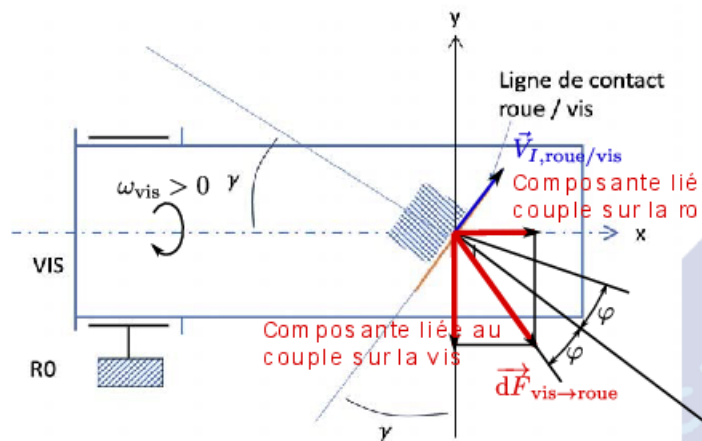


Figure 10 : répartition des forces lorsque la vis est motrice ($\omega_{vis} > 0$)

Question 17 Compléter le schéma 14 sur le document réponse DR1 représentant l'action élémentaire de la vis sur un petit élément de la roue en contact avec cette dernière lorsque la roue est motrice (rotation horaire selon $\vec{y}$). Préciser la composante permettant d'assurer la rotation de la vis.

Cette question présente la même erreur que la précédente : le sens « horaire selon $\vec{y}$ » indiqué ne permet pas à la roue d'être motrice avec un contact sur ce côté du filet.

Nous ferons l'hypothèse que la vitesse de rotation de la roue est positive suivant $\vec{y}$ (rotation anti-horaire). Dans ce cas, la vitesse du filet en I est suivant $+\vec{y}$ et le filet de la vis résiste et repousse la dent de la roue en s'appuyant sur la ligne de contact indiquée sur la figure.

Dans cette situation, la vitesse relative en I de la roue par rapport à la vis est dessinée en bleu, et la composante tangentielle de la force $\vec{dF}_{vis \rightarrow roue}$ de la vis sur la roue s'oppose à la vitesse, ce qui définit le coté du cône de frottement à utiliser.

La composante « liée au couple sur la roue » est la composante suivant $\vec{x}$ tandis que la composante « liée au couple sur la vis » est la composante suivant $\vec{y}$.

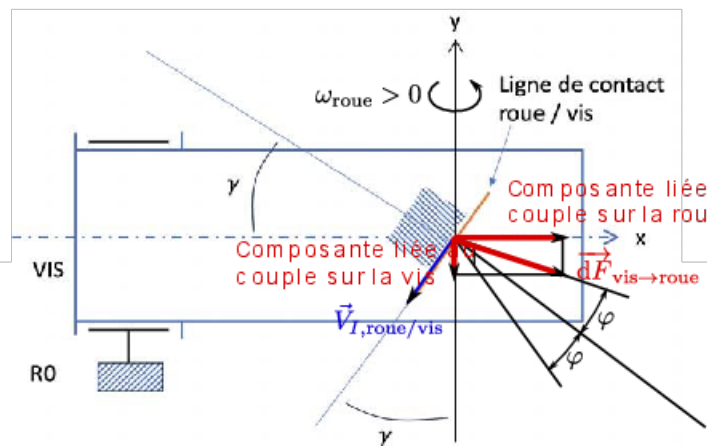


Figure 11 : répartition des forces lorsque la roue est motrice ($\omega_{roue} > 0$)

Question 18 Préciser la condition sur φ permettant d'assurer le verrouillage du pot lors du mélange.

Il y a verrouillage du pot si le système roue et vis sans fin est irréversible, donc si la roue ne peut pas entrainer la vis en rotation.

Cette situation est atteinte s'il existe une situation possible de la force $\vec{dF}_{vis \rightarrow roue}$ telle qu'il n'y ait aucune composante entrainant la rotation de la vis. C'est le cas si le cône de frottement est suffisamment ouvert pour inclure l'axe $\vec{x}$, c'est-à-dire si $\varphi > \gamma$.

1.3 Contrôle du moteur de verrouillage

Question 19 En choisissant les hypothèses de modélisation adaptées, montrer que ce système d'équations s'écrit dans le domaine de Laplace :

$$U(p) - K_E \Omega(p) = \Omega(p) \left[\frac{R + Lp}{K_T} (Jp + f) \right]$$

Sous l'hypothèse des conditions de Heaviside (signaux nuls pour $t < 0$), le système s'écrit dans le domaine de Laplace :

$$\begin{cases} U(p) = E(p) + (R + Lp)I(p) \\ C_m(p) = (Jp + f)\Omega(p) \\ C_m(p) = K_T I(p) \\ E(p) = K_E \Omega(p) \end{cases}$$

Les équations (1) et (4) conduisent à $U(p) - K_E \Omega(p) = (R + Lp)I(p)$

Les équations (2) et (3) permettent ensuite d'aboutir à la relation demandée :

$$U(p) - K_E \Omega(p) = \Omega(p) \left[\frac{(R + Lp)}{K_T} \right] (Jp + f)$$

Question 20 L'ensemble mécanique mis en mouvement par le moteur M2 comprend le moto-réducteur, la vis-mère et les deux plateaux. À partir d'un schéma de cet ensemble mécanique, expliquer la démarche pour établir l'expression du moment d'inertie équivalent de l'ensemble ramené sur l'arbre moteur. Donner l'expression de ce moment d'inertie.

D'après l'énoncé, M2 est semble-t-il le moteur seul (sans le réducteur). L'énergie cinétique de l'ensemble de la transmission s'écrit alors :

$$E_c = \frac{1}{2}J_m\omega^2 + \frac{1}{2}J_r\omega^2 + \frac{1}{2}J_v\omega_v^2 + 2 \times \frac{1}{2}M_p V^2$$

en notant J_m l'inertie du moteur M2 seul, J_r l'inertie du réducteur rapportée à l'arbre moteur, J_v l'inertie de l'arbre supportant les deux vis et M_p la masse d'un plateau (il y a deux plateaux en mouvement à la même vitesse V).

Les relations cinématiques s'écrivent $\omega_v = r\omega$ avec r le rapport de réduction (<1) et $V = \frac{p}{2\pi}\omega_v$ avec p le pas de la vis.

L'énergie cinétique s'écrit avec ces notations :

$$E_c = \frac{1}{2}\left[J_m + J_r + r^2J_v + 2\left(\frac{p}{2\pi}\right)^2 r^2M_p\right]\omega^2$$

On en déduit l'inertie équivalente $J_{eq} = J_m + J_r + r^2J_v + 2\left(\frac{p}{2\pi}\right)^2 r^2M_p$

Question 21 Compléter le schéma-bloc fonctionnel du document réponse DR2 en justifiant la transmittance élémentaire de chaque bloc.

Le schéma bloc proposé figure 12 reprend les quatre équations du moteur à courant continu. Difficile d'identifier quelles justifications sont demandées dans la question, sachant que le schéma du moteur à courant continu relève d'une question de cours de première année...

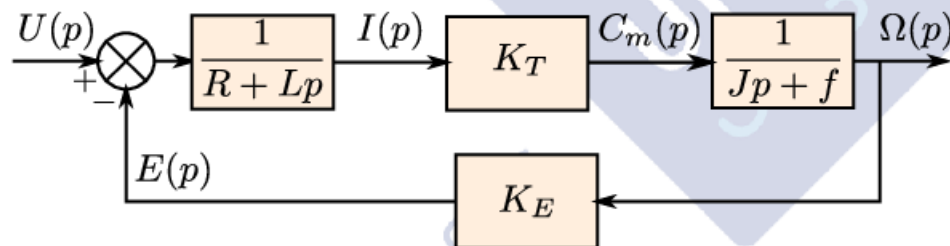


Figure 12 : schéma bloc du moteur à courant continu

Question 22 Déterminer la fonction de transfert en boucle fermée $H(p) = \Omega(p)/U(p)$ sous forme canonique. Préciser l'ordre de $H(p)$ et calculer les paramètres correspondants en considérant que f et L sont négligeables.

La fonction de transfert du moteur s'écrit par la formule de Black :

$$H(p) = \frac{K_T}{(R + Lp)(Jp + f) + K_T K_E} = \frac{1/K_E}{1 + \frac{Lf + RJ}{Rf + K_T K_E}p + \frac{JL}{Rf + K_T K_E}p^2}$$

Il s'agit d'un ordre 2. Si on considère les hypothèses complémentaires $f=L=0$, la fonction de transfert passe à un ordre 1 :

$$H(p) = \frac{1/K_E}{1 + \frac{RJ}{K_T K_E}p}$$

avec le gain statique $1/K_E = 10 \text{ rad/s/V}$ et la constante de temps $\tau_m = \frac{RJ}{K_T K_E} = 1,5 \times 10^{-2} \text{ s}$.

Question 23 Justifier la nécessité d'ajouter un capteur pour garantir que le mouvement des plateaux ne conduise pas à l'éclatement du pot. Quel capteur préconisez-vous d'installer ?

Le couple maximal du moteur (4 N.m) est supérieur au couple nécessaire pour atteindre la déformation maximale des plateaux (1,4 N.m) donc il faut contrôler le couple exercé par le moteur.

$c_m(t) = K_T i(t)$ donc il est judicieux de mesurer $i(t)$ (plus facile à mesurer que le couple $c_m(t)$) et de réaliser un asservissement en courant.

Un capteur à effet Hall, ou une résistance de shunt couplée à une mesure de tension, sont des solutions classiques pour mesurer un courant.

La question suivante semble indiquer que le capteur aurait dû être un capteur de position. Avec un asservissement de position, il est possible de contrôler l'écrasement du plateau (et donc d'éviter « l'éclatement du pot »), mais il semble que la machine ne soit pas informée de la taille du pot placé par l'utilisateur, ce qui ne peut donc pas fonctionner. La sécurisation par contrôle du courant est une solution classique pour les moteurs à courant continu asservis.

Question 24 Compléter le schéma-bloc du document réponse DR3.

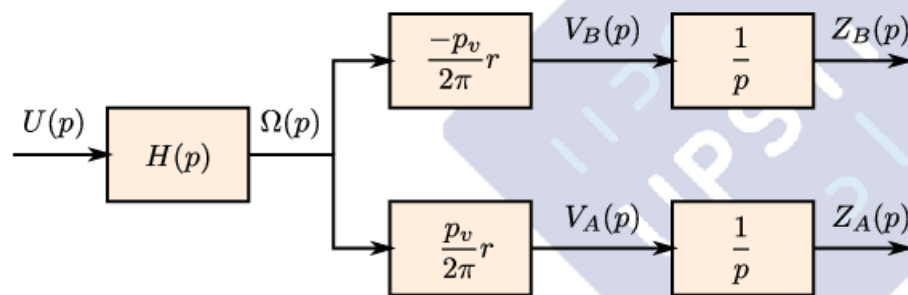


Figure 12 : schéma bloc 1 du document réponse DR3

Question 25 Justifier l'hypothèse de symétrie du système et compléter le schéma-bloc correspondant à une description symétrique dans le document réponse DR4.

Les deux vis sont de pas identiques au signe près, entraînées par un même moteur, si bien que les vitesses de translation sont liées :

$$V_A(p) = -V_B(p)$$

Le schéma bloc est donné figure 14. On remarquera pour se rapprocher du schéma utilisé pour la suite de la partie que

$$V_A(p) = -V_B(p) = pL(p) \times \frac{1}{2}$$

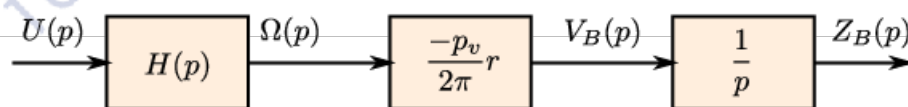


Figure 13 : schéma bloc 2 du document réponse DR3

Question 26 Montrer que la transmittance du bloc vide vaut $\frac{K}{1+Tp} \frac{dl}{\pi N} \frac{1}{p}$ où N est le facteur de réduction, $K = \frac{1}{K_E}$, dl est le pas de vis et $T = \frac{RJ}{K_E K_T}$;

$$L(p) = Z_A(p) - Z_P(p) = \frac{1}{p} (V_A(p) - V_B(p)) = \frac{2p_v r}{2\pi} \times \frac{1}{p} \Omega(p) = H(p) \frac{dl}{\pi N} \times \frac{1}{p} U(p)$$

avec le pas $p_v = dl$ et le rapport de réduction $r = \frac{1}{N}$

Le bloc vide s'écrit donc $\frac{K}{1+Tp} \frac{dl}{\pi N} \times \frac{1}{p}$.

Question 27 Déterminer la fonction de transfert en boucle fermée $G(p) = \frac{L_P(p)}{L_C(p)}$. Déterminer le gain K_0 , la pulsation propre non amortie ω_0 et le coefficient d'amortissement ξ en fonction de la valeur de K_r choisie.

$$G(p) = \frac{K_r H_{trans}(p)}{1 + K_r H_{trans}(p)} = \frac{K_r K dl}{\pi N (1 + Tp)p + K_r K dl} = \frac{1}{1 + \frac{\pi N}{K_r K dl} p + \frac{\pi NT}{K_r K dl} p^2}$$

Le gain statique vaut $K_0 = 1$, la pulsation propre $\omega_0 = \sqrt{\frac{K_r K dl}{\pi NT}}$ et le facteur d'amortissement $\xi = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi N}{T K_r K dl}}$

Question 28 Exprimer l'erreur statique associée. Le système proposé correspond-il aux exigences du cahier des charges?

L'erreur statique est nulle car la fonction de transfert en boucle ouverte est de classe 1 (ou encore car le gain statique de la fonction de transfert en boucle fermée est unitaire).

Il n'y a pas de cahier des charges dans le sujet mais on peut se douter que le système est satisfaisant d'un point de vue précision. On ne parle pas de précision sous l'effet d'une perturbation mais on sait qu'une erreur statique apparaîtra sous l'effet des frottements secs ou d'un effort extérieur.

Question 29 Quel serait l'intérêt d'ajouter un retour tachymétrique pour obtenir un asservissement en position et en vitesse?

Le retour tachymétrique permet d'améliorer le compromis rapidité/stabilité. Il serait donc possible d'avoir un système plus rapide avec la même stabilité ou plus stable avec la même rapidité.

Question 30 Le fonctionnement mécanique du système est perturbé selon la masse du pot. Après n mesures des perturbations $\{p^j\}_{j \in [1, n]}$ pour diverses masses de pots $\{m^j\}_{j \in [1, n]}$, il est choisi de représenter la perturbation par rapport au fonctionnement nominal par une régression linéaire en fonction de la masse. Indiquer la fonction-coût de ce problème, et définir la matrice A et le vecteur b du système linéaire $Ax = b$ à résoudre pour déterminer les coefficients de la régression.

Une fonction coût possible parmi d'autres serait les moindres carrés (figure 15). Le choix de cette fonction coût quadratique est populaire et simple pour obtenir le gradient analytiquement. Elle s'écrit dans le cas présent :

$$J = \sum_{j=1}^n [(am^j + c) - p^j]^2$$

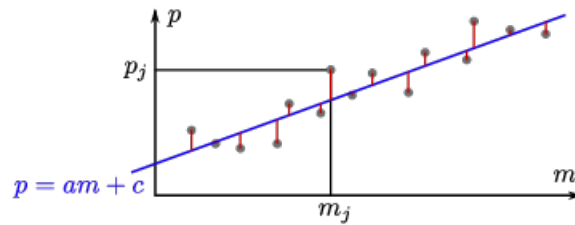


Figure 15 : régression linéaire

Le minimum de la fonction coût est atteint lorsque les dérivées partielles par rapport aux paramètres a et c sont nulles :

$$\begin{cases} \frac{\partial J}{\partial a} = 0 \\ \frac{\partial J}{\partial c} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sum_{j=1}^n 2m^j (am^j + c - p^j) = 0 \\ \sum_{j=1}^n 2(am^j + c - p^j) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \sum_{j=1}^n m^{j^2} + c \sum_{j=1}^n m^j = \sum_{j=1}^n m^j p^j \\ a \sum_{j=1}^n m^j + c \times n = \sum_{j=1}^n p^j \end{cases}$$

Ce système peut se mettre sous la forme matricielle $A \cdot x = b$:

$$\begin{bmatrix} \sum_{j=1}^n m^{j^2} & \sum_{j=1}^n m^j \\ \sum_{j=1}^n m^j & n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^n m^j p^j \\ \sum_{j=1}^n p^j \end{bmatrix}$$

Question 31 Pourquoi ne pas choisir une interpolation de Lagrange pour représenter l'évolution de la perturbation en fonction de la masse du pot ? Exposer une difficulté en les justifiant par des tracés.

Si n est grand, l'interpolation polynomiale est connue pour osciller fortement entre les points, ce qui ne correspond pas à ce qui est attendu d'une interpolation en général. Un cas classique est celui de la fonction de Runge figure 16. Par ailleurs, trouver une fonction passant exactement par tous les points conduit à identifier le bruit de mesure en plus de la loi sous-jacente.

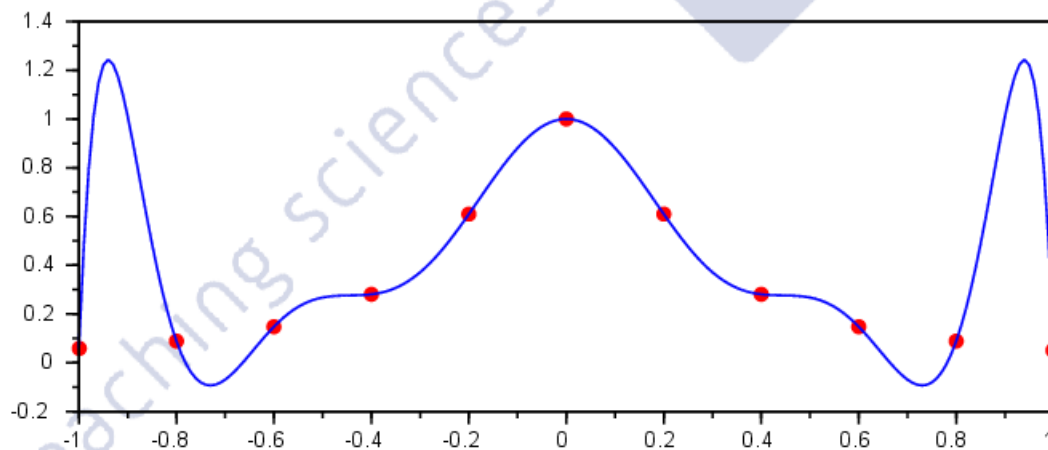


Figure 16 : oscillations d'une interpolation polynomiale sur la fonction de Runge

Partie 2 : Comportement du système en rotation uniaxiale

2.1 Impact du remplissage sur le mélange

Question 32 En supposant toutes les liaisons parfaites, préciser si le moteur principal M1 consomme de la puissance électrique lors d'un cycle complet de mélange composé d'une accélération angulaire $\dot{\beta} = \lambda$ d'un plateau $\dot{\beta} = 0$ puis d'une décélération $\dot{\beta} = -\lambda$. Justifier votre réponse.

En supposant les liaisons avec le bâti parfaites et un centre de gravité à l'intersection des axes de rotations (donc immobile), les puissances extérieures sont toutes nulles à l'exception de celle du moteur $P_{ext/Rg} = P_{mot}$.

En supposant les liaisons entre solides parfaites et le fluide parfait, la puissance intérieure est nulle $P_{int} = 0$.

Le théorème de l'énergie cinétique s'écrit : $\frac{dE_c}{dt} = P_{int} + P_{ext/Rg} = 0 + P_{mot}$

Lors d'un cycle complet de mélange, l'énergie cinétique va augmenter en phase d'accélération (donc la puissance moteur sera positive), puis rester constante lors du plateau de vitesse (donc la puissance moteur sera nulle), puis diminuer lors de la décélération (donc la puissance moteur sera négative).

Entre le début du cycle et la fin du cycle, la variation d'énergie cinétique est nulle et l'énergie consommée par le moteur est nulle : le moteur aura rendu en phase de décélération l'énergie qu'il aura consommée en phase d'accélération.

Ceci n'est valable qu'en théorie : en pratique, il faudrait un moteur et un système de récupération d'énergie permettant de récupérer l'intégralité de l'énergie cinétique restituée ce qui n'est jamais vrai.

Question 33 Préciser l'expression du gradient de pression au sein du volume de peinture à l'arrêt.

Les notions autour du gradient de pression ne sont pas au programme de SI et sont au programme de physique dans le cadre de la statique des fluides.

À l'arrêt, l'équilibre statique d'un fluide dans le champ de pesanteur s'écrit :

$$-\vec{g} \text{grad} p + \rho \vec{g} = \vec{0} \Rightarrow \vec{g} \text{grad} p = \rho \vec{g}$$

Question 34 À partir d'un schéma du système et de l'hypothèse de système axisymétrique, isoler un petit élément de peinture et faire le bilan des actions mécaniques. En déduire le gradient de pression.

L'hypothèse de système axisymétrique implique que l'axe du pot est confondu avec l'axe de rotation dans cette partie, ce qui est confirmé par le titre de la partie suivante.

Dans cette hypothèse, le schéma paramétré du problème est donné figure 17.

On isole le volume dV , de masse dm , situé au voisinage du point M, en rotation autour d'un axe fixe :

$$dm \vec{\Gamma}_{M,P/0} = -dV \vec{g} \text{grad} p + dm \vec{g} \text{ avec } dm = \rho dV \text{ et } \vec{\Gamma}_{M,P/0} = -r\omega^2 \vec{u}_r$$

Soit :

$$-\rho r\omega^2 \vec{u}_r = \vec{g} \text{grad} p + \rho \vec{g} \Rightarrow \vec{g} \text{grad} p = -\rho g \vec{y} + \rho r\omega^2 \vec{u}_r$$

Question 35 En considérant un petit élément de surface libre à l'équilibre, en déduire la forme de cette surface libre selon les paramètres du problème. En faire l'application numérique.

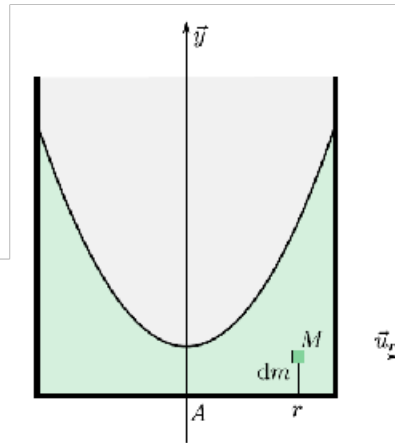


Figure 17 : Paramétrage du problème de centrifugation

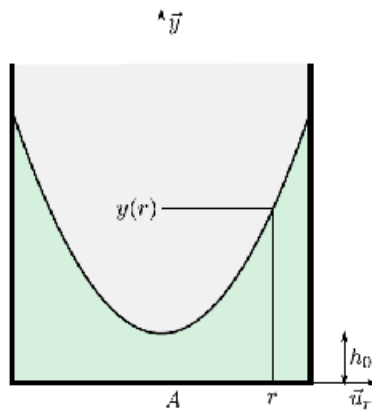


Figure 18 : Calcul de la surface libre

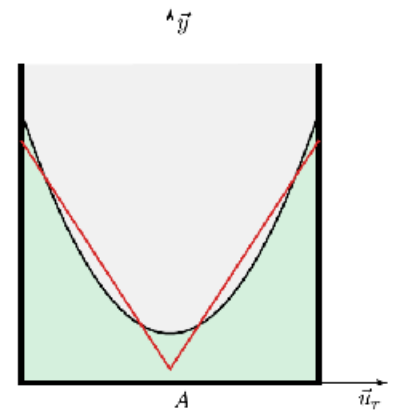


Figure 19 : Approximation affine (en rouge) de la surface libre

La pression est constante le long de la surface libre, donc $\vec{g} \text{ grad } p$ est orthogonal à la surface libre.

Si un point $M(r, y)$ est un point de la surface libre (en coordonnées cylindriques), l'équation de la surface libre est donnée par la fonction $y = f(r)$ où f est une fonction à déterminer (figure 18).

La tangente à la courbe $y = f(r)$ s'écrit $\vec{t} = \frac{1}{f'(r)} \vec{e}_r$, si bien que la courbe est orthogonale au gradientssi $\vec{t} \cdot \vec{g} \text{ grad } p = 0$.

On en déduit l'équation de la courbe :

$$\vec{t} \cdot \vec{g} \text{ grad } p = 0 \Leftrightarrow \rho r \omega^2 \times 1 - \rho g f'(r) = 0 \Leftrightarrow f'(r) = \frac{r}{g} \omega^2 \Leftrightarrow f(r) = \frac{r^2 \omega^2}{2g} + h_0$$

où h_0 est une constante d'intégration, représentant la hauteur de la surface libre en $r = 0$. La surface libre est donc un parabolôide dont l'axe est l'axe de rotation (et l'axe du pot).

Pour obtenir l'équation complète, il faut déterminer la constante h_0 , qui dépend directement de la quantité de peinture dans le pot. L'énoncé indique un poids (mais on aura compris qu'il s'agit d'une masse) de peinture de 7 kg, et en considérant une masse volumique moyenne de $\rho_p = 1,4 \text{ kg/l}$, cela conduit à un volume $V_p = m_p / \rho_p = 5 \text{ l} = 5 \times 10^{-3} \text{ m}^3$.

Le volume de peinture est l'intégrale des volumes élémentaires :

$$V_p = \int_0^{D/2} 2\pi r y(r) dr = 2\pi \int_0^{D/2} \left(\frac{r^3 \omega^2}{2g} + h_0 r \right) dr = \frac{\pi D^4 \omega^2}{4 \times 16g} + \frac{\pi D^2}{2 \times 4} h_0$$

$$\text{On en déduit } h_0 = \frac{4 \times V_p}{\pi D^2} - \frac{D^2 \omega^2}{16g} = 9,15 \times 10^{-3} \text{ m} \approx 1 \text{ cm}.$$

Les deux opérandes de la soustraction ayant des valeurs proches, il n'est pas possible de calculer cette valeur sans calculatrice : il est seulement possible de voir qu'elle est petite devant la hauteur de peinture dans le pot.

Un calcul simple permet de déterminer qu'au repos, la hauteur des 5 l de peinture dans le pot est de 7 cm, et qu'une fois centrifugée, la peinture remonte le long du pot à une hauteur de 13 cm !

Question 36 Proposer une approximation au premier ordre de la forme de la surface libre.

Une approximation au premier ordre nécessite d'identifier une quantité dont les variations sont petites devant la valeur nominale, qui permettrait de proposer un développement limité. Or, dans l'expression de la surface libre $y = f(r)$, aucune quantité ne présente cette propriété.

La question envisage peut-être de proposer une loi affine approchant la parabole entre 0 et $D/2$ (figure 19).

Dans ce cas, il faut trouver une droite $y = ar + b$ approchant au mieux la parabole $y = \frac{r^2 \omega^2}{2g} + h_0$. Le coefficient directeur peut être choisi comme égal à la pente de la parabole à la moitié du rayon, soit :

$$a = f' \left(\frac{D}{4} \right) = \frac{D \omega^2}{4g}$$

La valeur de b doit ensuite être calculée pour que la masse totale de peinture soit bien égale à la masse introduite dans le pot, de 7 kg comme cela a déjà été fait à la question précédente.

Nous verrons que cette approximation par une loi affine n'a pas beaucoup d'intérêt pour la suite, et peut même introduire des erreurs d'approximation importantes dans le calcul de l'inertie visée.

Question 37 Exprimer de manière littérale et dans le cadre de cette simplification la matrice d'inertie du pot selon les paramètres du problème.

Le pot de peinture centrifugé, lorsque l'axe du pot est confondu avec l'axe de rotation, présente une répartition de masse invariante par rotation autour de l'axe $(A, \vec{y})$. Aussi, la matrice d'inertie est diagonale, de la forme :

$$I_{A,P} = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & A \end{pmatrix}_{B_P}$$

Sachant que dans cette partie, la seule rotation est une rotation d'axe $\vec{y}$, seul le coefficient B est utile (et cela nous arrange car le calcul à la main de l'intégrale du coefficient A serait au mieux pénible, au pire infaisable). Nous remarquons aussi que le calcul des coefficients de l'opérateur d'inertie est hors programme et sûrement totalement en dehors de l'esprit du programme de PSI.

$$\text{Il s'écrit : } B = \int_0^{D/2} r^2 dm = \int_0^{D/2} r^2 \times \rho_P 2\pi r y(r) dr.$$

L'énoncé nous invite à calculer ce moment d'inertie à l'aide de l'approximation affine. Or, l'expression à intégrer est un polynôme. Il est tout aussi simple d'intégrer la loi parabolique, d'autant que la loi affine va conduire à une erreur non négligeable sur la répartition de masse considérée :

$$B = \int_0^{D/2} r^2 \times \rho_P 2\pi r y(r) dr = \rho_P 2\pi \int_0^{D/2} \left(\frac{r^5 \omega^2}{2g} + h_0 r^3 \right) dr = \rho_P 2\pi \left(\frac{D^6 \omega^2}{2g \times 6 \times 2^6} + h_0 \frac{d^4}{4 \times 8} \right) \approx 0,11 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

On peut vérifier que l'ordre de grandeur est correct en calculant l'inertie qui serait obtenue si la masse était concentrée sur les parois du pot, à la distance $D/2$ de l'axe : l'inertie serait alors de $m_P (D/2)^2 = 0,16 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$, valeur qui constitue un majorant et un bon ordre de grandeur vu que la peinture remonte significativement sur les bords du pot.

2.2 Effet du désaxement du pot sur le plateau

Question 38 Préciser les efforts sur l'axe en fonction des paramètres du modèle $\delta r, D, H, m, \omega$. Fournir un schéma de l'analyse effectuée.

Dans cette partie, l'axe du pot n'est plus supposé confondu avec l'axe de rotation. Le paramétrage est alors celui de la figure 20. La surface libre est toujours un parabolôïde d'axe $(A, \vec{y})$, axe de rotation. La peinture remonte le long des bords du pot, à une hauteur qui n'est plus constante mais qui dépend de l'angle θ du repère cylindrique. À noter que la valeur de h_0 est modifiée par rapport à la partie précédente.

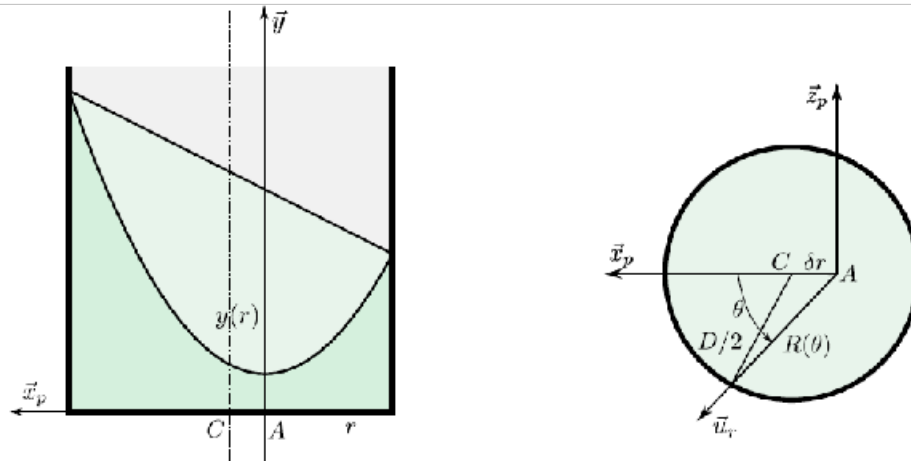


Figure 20 : paramétrage pour un pot désaxé

Les efforts sur l'axe sont dus aux effets dynamiques. Le pot tournant autour d'un axe principal d'inertie à vitesse constante, il n'y aura pas de moment, mais uniquement une résultante.

En isolant le pot, soumis aux efforts de l'axe et au poids, et en appliquant le théorème de la résultante dynamique :

$$m_P \Gamma_{G,P/0} = \vec{F}_{axe \rightarrow pot} + \vec{P} \text{ avec } \bar{\Gamma}_{G,P/0} = -x_G \omega^2 \bar{x}_P \text{ soit : } \vec{F}_{axe \rightarrow pot} \cdot \bar{x}_P = -m_P x_G \omega^2$$

Il reste à déterminer x_G pour calculer numériquement les efforts sur l'axe. L'abscisse x_G du centre de gravité se calcule par le barycentre :

$$x_G = \bar{AG} \cdot \bar{x}_P = \frac{1}{m_P} \int_0^{2\pi} \int_0^{R(\theta)} r \cos \theta \, dm \text{ avec } dm = y(r) r dr d\theta$$

Mais l'expression de $R(\theta)$ dans la borne de l'intégrale est déjà lourde et elle va devoir être intégrée ensuite ; nous laissons au lecteur courageux le plaisir de faire aboutir ce calcul analytique totalement inutile.

Question 39 Expliquer si un décalage du pot ($\delta r \neq 0$) engendre ou non une consommation de puissance supplémentaire au niveau du moteur.

Un décalage du pot va générer des efforts radiaux qui ne travaillent pas si les pivots sont parfaites.

Le moteur consommera un peu plus de puissance lors de l'accélération (l'énergie cinétique étant plus importante si G n'est pas sur l'axe de rotation), mais restituera cette puissance en phase de décélération.

Question 40 Expliquer si cette configuration permet d'assurer un mélange satisfaisant. Préciser l'intérêt de la rotation bi-axiale par rapport à la rotation uni-axiale.

Cette unique rotation d'axe vertical va centrifuger le fluide sans générer de mouvement de convection. Le mélange ne sera pas satisfaisant.

En rotation bi-axiale, le pot n'ayant pas une géométrie sphérique, il y aura nécessairement convection.

Remarque : une unique rotation d'axe horizontal, à vitesse raisonnable, aurait grâce au poids permis de mélanger la peinture dans un pot non totalement rempli.



3. Maintien du pot en fonctionnement nominal du mélangeur

3.1 Description cinématique du pot

Question 41 Préciser la forme de la matrice d'inertie du pot plein en fonction des paramètres fournis dans l'énoncé.

Un cylindre plein d'axe $\bar{y}_P$ présente deux plans de symétrie de normales $\bar{x}_P$ et $\bar{z}_P$, et une invariance en rotation suivant $\bar{y}_P$. La matrice d'inertie est donc diagonale, et les moments d'inertie en x et z sont identiques :

$$I_{G,pot} = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & A \end{pmatrix}$$

La masse du pot s'écrit comme la masse volumique par le volume : $m = \rho L \frac{\pi D^2}{4}$

Le coefficient B est le plus simple à calculer du fait de l'invariance en rotation autour de y_P :

$$B = \int_{pot} (x^2 + z^2) dm = \int_{pot} r^2 dm = \int_0^{2\pi} \int_0^{D/2} \int_{-L/2}^{L/2} r^2 \rho r dy dr d\theta = 2\pi L \rho \frac{D^4}{4} = m_m \frac{D^2}{8}$$

Le calcul de A pour une répartition de masse invariante par rotation autour de y se fait facilement en additionnant A et C (sachant que $A = C$) :

$$A + C = 2A = \int_{pot} (r^2 + 2y^2) dm = B + \int_{pot} 2y^2 dm = B + \int_0^{2\pi} \int_0^{D/2} \int_{-L/2}^{L/2} 2y^2 \rho r dy dr d\theta$$

$$2A = B + 2\rho \frac{D^2}{2 \times 4} \times \left(2 \frac{L^3}{3 \times 2^3} \right) \times 2\pi = B + m_P \frac{L^2}{6} = m_P \left(\frac{D^2}{8} + \frac{L^2}{6} \right)$$

On en déduit $A = m_P \left(\frac{D^2}{16} + \frac{L^2}{12} \right)$

Question 42 Préciser le torseur cinétique du pot dans son mouvement par rapport au référentiel terrestre en fonction des paramètres fournis dans l'énoncé.

Le torseur cinétique s'écrit $\left\{ \mathcal{C}_{P/R_g} \right\} = \left\{ \begin{matrix} m \bar{V}_{G,P/0} \\ \bar{\sigma}_{G,P/0} \end{matrix} \right\}_G$

avec $\bar{V}_{G,P/0} = \frac{d\rho \bar{x}_P}{dt} \Big|_O = \rho \frac{d\bar{x}_P}{dt} \Big|_{R_P} + \rho \bar{\Omega}_{P/0} \wedge \bar{x}_P = \rho (\dot{\alpha} \bar{x}_2 + \dot{\beta} \bar{y}_P) \wedge \bar{x}_P = \rho \dot{\alpha} \sin \beta \bar{y}_P - \rho \dot{\beta} \bar{z}_P$

$$\text{et } \bar{\sigma}_{G,P/0} = I_{G,P} \bar{\Omega}_{P/0} + \bar{0} = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & A \end{pmatrix}_{B_P} \cdot \begin{pmatrix} \dot{\alpha} \cos \beta \\ \dot{\beta} \\ \dot{\alpha} \sin \beta \end{pmatrix}_{B_P} = \begin{pmatrix} A \dot{\alpha} \cos \beta \\ B \dot{\beta} \\ A \dot{\alpha} \sin \beta \end{pmatrix}_{B_P}$$

Question 43 Commenter l'influence du taux de remplissage du pot sur le mouvement obtenu à la question précédente.

Le mouvement est imposé par la machine ; le taux de remplissage n'a a priori aucune influence sur le mouvement.

Par contre, le calcul étant fait avec l'hypothèse d'un taux de remplissage de 100%, le calcul précédent sera d'autant moins proche de la réalité que le taux de remplissage est faible...

Question 44 À partir d'un modèle de frottement de Coulomb (coefficient de frottement $f = \tan(\varphi) = \frac{\bar{T}}{\bar{N}}$) préciser les efforts tangentiels $\bar{T}^i (i = A, B)$ ramenés aux points de contact A et B entre le pot et les plateaux respectivement bas et haut en fonction des paramètres du système.

La question est difficilement compréhensible au sens où le pot ne doit bien entendu pas glisser, donc les lois de Coulomb n'apportent qu'une inégalité : $\|\bar{T}\| < f \|\bar{N}\|$

Question 45 Préciser la relation entre $\dot{\alpha}$ et $\dot{\beta}$

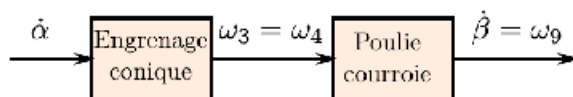


Figure 21 : chaîne de transmission de puissance

La chaîne de transmission de puissance est décrite figure 21. Sachant qu'il n'y a pas de base sur la figure 4, il n'est pas possible de déterminer les signes et le calcul se fera en valeur absolue.

$$\frac{\omega_2}{\dot{\alpha}} = \frac{z_{fixe}}{z_{mobile}} = \frac{51}{17} \text{ et } \frac{\dot{\beta}}{\omega_4} = \frac{10}{15}$$

On en déduit $\frac{\dot{\beta}}{\dot{\alpha}} = \frac{10 \times 51}{15 \times 17}$.

Question 46 Préciser si une phase de fonctionnement en régime permanent $\ddot{\alpha} = 0$ permet d'assurer le mélange.

La phase de régime permanent permet cette fois d'assurer le mélange du fait de la rotation bi-axiale. On peut noter que même lorsque $\dot{\alpha} = \text{cste}$ et $\dot{\beta} = \text{cste}$, le moment dynamique n'est pas nul grâce au terme $\dot{\alpha} \dot{\beta}$, et il est en plus variable sous l'effet de $\cos \beta$ et $\sin \beta$.

Question 47 Préciser la norme des efforts tangentiels $\bar{T}^i (i = A, B)$ ramenés aux points de contact A et B entre le pot et les plateaux respectivement bas et haut lorsque $\ddot{\alpha} = 0$.

En appliquant le principe fondamental de la dynamique au pot :

$$\{\tau_{8 \rightarrow P}\} + \{\tau_{9 \rightarrow P}\} + \{\tau_{poids \rightarrow P}\} = \{\mathcal{D}_{poids \rightarrow P}\}$$

Il faut noter que le problème présente 8 inconnues pour seulement 6 équations, car la modélisation avec deux appuis-plans est hyperstatique. Il y aura cependant assez d'équations pour déterminer les inconnues de frottement recherchées :

- le théorème de la résultante dynamique suivant $\bar{x}_P$ et $\bar{z}_P$ conduit à 2 équations ;
- le théorème du moment dynamique suivant $\bar{x}_P$ et $\bar{z}_P$ conduit à 2 équations ;

Ces 4 équations lient les 4 inconnues d'effort tangentiel X_{8P} , Z_{8P} , X_{9P} et Z_{9P} .

Les torseurs d'action mécanique $\{\tau_{8 \rightarrow P}\}$ $\{\tau_{9 \rightarrow P}\}$ (donnés dans le sujet) et l'action du poids s'écrivent :

$$\{\tau_{8 \rightarrow P}\} = \begin{Bmatrix} X_{8P} & 0 \\ Y_{8P} & M_{8P} \\ Z_{8P} & 0 \end{Bmatrix}_{A, R_P}, \quad \{\tau_{9 \rightarrow P}\} = \begin{Bmatrix} X_{9P} & 0 \\ Y_{9P} & M_{8P} \\ Z_{9P} & 0 \end{Bmatrix}_{A, R_P} \quad \text{et} \quad \{\tau_{poids \rightarrow P}\} = \begin{Bmatrix} -mgy_1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}_G$$

Le torseur dynamique se calcule à partir du torseur cinématique puis du torseur cinétique. Le torseur cinématique exprime les deux rotations d'axes concourants en 0 :

$$\{\mathcal{V}_{P/0}\} = \begin{Bmatrix} \dot{\alpha} \bar{x}_1 + \dot{\beta} \bar{y}_2 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}_O$$

Les dérivations à suivre impliqueront les dérivées des vecteurs de la base R_P qu'il est utile d'exprimer au préalable :

$$\begin{aligned} \left. \frac{d\bar{x}_P}{dt} \right|_0 &= \left. \frac{d\bar{x}_P}{dt} \right|_{R_P} + \bar{\Omega}_{P/0} \wedge \bar{x}_P = \dot{\alpha} \sin \beta \bar{y}_P - \dot{\beta} \bar{z}_P \\ \left. \frac{d\bar{y}_P}{dt} \right|_0 &= \left. \frac{d\bar{y}_P}{dt} \right|_{R_P} + \bar{\Omega}_{P/0} \wedge \bar{y}_P = \dot{\alpha} \bar{z}_P = \dot{\alpha} (\cos \beta \bar{z}_P - \sin \beta \bar{x}_P) \\ \left. \frac{d\bar{z}_P}{dt} \right|_0 &= \left. \frac{d\bar{z}_P}{dt} \right|_{R_P} + \bar{\Omega}_{P/0} \wedge \bar{z}_P = -\dot{\alpha} \cos \beta \bar{y}_P + \dot{\beta} \bar{x}_P \end{aligned}$$

On en déduit l'expression du torseur cinétique du pot au centre de gravité :

$$\{\mathcal{C}_{P/0}\} = \begin{Bmatrix} m\bar{V}_{G,P/0} = m(\rho\dot{\alpha} \sin \beta \bar{y}_P - \rho\dot{\beta} \bar{z}_P) \\ \vec{\sigma}_{G,P/0} = A\dot{\alpha} \cos \beta \bar{x}_P + B\dot{\beta} \bar{y}_P + A\dot{\alpha} \sin \beta \bar{z}_P \end{Bmatrix}_G$$

Enfin le calcul du torseur dynamique passe par l'accélération en G et le moment dynamique en G (en notant que $\ddot{\alpha} = \ddot{\beta} = 0$:

$$m\vec{I}_{G,P/0} = \left. \frac{dm\bar{V}_{G,P/0}}{dt} \right|_0 = m\rho [\dot{\alpha} \dot{\beta} \cos \beta \bar{y}_P + \dot{\alpha}^2 (\cos \beta \bar{z}_P - \sin \beta \bar{x}_P) - \dot{\beta} (-\dot{\alpha} \cos \beta \bar{y}_P + \dot{\beta} \bar{x}_P)]$$

$$\vec{\delta}_{G,P/0} = \left. \frac{d\vec{\sigma}_{G,P/0}}{dt} \right|_0$$

$$\begin{aligned} \vec{\delta}_{G,P/0} &= A\dot{\alpha} (-\dot{\beta} \sin \beta \bar{x}_P + \cos \beta (\dot{\alpha} \sin \beta \bar{y}_P - \dot{\beta} \bar{z}_P) + \dot{\beta} \cos \beta \bar{z}_P + \sin \beta (-\dot{\alpha} \cos \beta \bar{y}_P + \dot{\beta} \bar{x}_P)) \\ &\quad + B\dot{\beta} \dot{\alpha} (\cos \beta \bar{z}_P - \sin \beta \bar{x}_P) \end{aligned}$$

$$\vec{\delta}_{G,P/0} = B\dot{\beta} \dot{\alpha} (\cos \beta \bar{z}_P - \sin \beta \bar{x}_P)$$

La réduction en O des torseurs donne :

$$\bar{M}_{O,8 \rightarrow P} = \begin{Bmatrix} -\frac{L}{2} Z_{8P} \\ M_{8P} \\ \frac{L}{2} X_{8P} \end{Bmatrix}_{B_P}$$

$$\vec{M}_{O,9 \rightarrow P} = \begin{pmatrix} \frac{L}{2} Z_{9P} \\ M_{9P} \\ -\frac{L}{2} X_{9P} \end{pmatrix}$$

$$\vec{M}_{O,Poids \rightarrow P} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\rho mg \sin \alpha \cos \beta \\ -\rho mg \cos \alpha \end{pmatrix}$$

$$\vec{\delta}_{O,P/0} = \vec{\delta}_{G,P/0} + m \vec{r}_{G,P/0} \wedge \vec{G} \vec{O} = B \dot{\beta} \dot{\alpha} (\cos \beta \bar{z}_P - \sin \beta \bar{x}_P) + m \rho^2 (2 \dot{\beta} \dot{\alpha} \cos \beta \bar{z}_P - \dot{\alpha}^2 \cos \beta \bar{y}_P)$$

Nous en déduisons les quatre équations utiles pour déterminer les composantes tangentielles :

$$\text{Résultante } \bar{x}_P : X_{8P} + X_{9P} - mg \sin \alpha \sin \beta = m \rho (-\dot{\alpha}^2 \sin \beta - \dot{\beta}^2)$$

$$\text{Résultante } \bar{z}_P : Z_{8P} + Z_{9P} + mg \sin \alpha \cos \beta = m \rho \dot{\alpha}^2 \cos \beta$$

$$\text{Moment en O } \bar{x}_P : -\frac{L}{2} Z_{8P} + \frac{L}{2} Z_{9P} + 0 = -B \dot{\beta} \dot{\alpha} \sin \beta$$

$$\text{Moment en O } \bar{z}_P : \frac{L}{2} X_{8P} - \frac{L}{2} X_{9P} - \rho mg \cos \alpha = B \dot{\beta} \dot{\alpha} \cos \beta$$

La résolution de ce système de 4 équations à 4 inconnues se fait facilement :

- X_{8P} s'obtient en calculant $\frac{1}{2} \left[(1) + \frac{2}{L} (4) \right]$;
- X_{9P} s'obtient en calculant $\frac{1}{2} \left[(1) - \frac{2}{L} (4) \right]$;
- Z_{8P} s'obtient en calculant $\frac{1}{2} \left[(2) - \frac{2}{L} (3) \right]$;
- Z_{9P} s'obtient en calculant $\frac{1}{2} \left[(2) + \frac{2}{L} (3) \right]$.

Les composantes tangentielles s'obtiennent alors par le calcul des normes :

$$\|\bar{T}^A\| = \sqrt{X_{8P}^2 + Z_{8P}^2} \quad \|\bar{T}^B\| = \sqrt{X_{9P}^2 + Z_{9P}^2}$$

Nous n'irons pas jusqu'au calcul des expressions finales lourdes et inutiles pour la suite.

Question 48 Préciser les valeurs maximales de ces normes. Détailler les conditions permettant de respecter le cahier des charges relatif aux mouvements du pot par rapport aux plateaux lors de la phase de mélange.

Il est difficilement envisageable de calculer les valeurs maximales des normes sans calculatrice...

Il serait possible de déterminer un majorant, sachant que $|\cos \beta| < 1$, $|\sin \beta| < 1$ et $|\cos \beta \sin \beta| < \frac{1}{2}$, mais les expressions restent trop lourdes pour un calcul à la main.

Partie 4 : Mise en rotation du système par le moteur principal

4.1 Dimensionnement du moteur principal

Question 49 Préciser la forme des différentes matrices d'inertie au centre de gravité de chaque solide dans le repère $R_1 = (0, \bar{x}_1, \bar{y}_1, \bar{z}_1)$. Pour un solide i on notera les éléments de sa matrice d'inertie par A_i, B_i , etc..., sa masse m_i , la position de son centre de gravité $\bar{OG}_i = x_i \bar{x}_1 + y_i \bar{y}_1 + z_i \bar{z}_1$.

Pour cette question, une petite figure aurait été appréciable pour interpréter le paramétrage.

Le sous-solide 1a est un arbre d'axe $(0, \bar{x}_1)$, invariant par rotation autour de l'axe $(0, \bar{x}_1)$, ce qui permet d'exprimer la matrice sous la forme simplifiée :

$$I_{G_{1a},1a} = \begin{pmatrix} A_{1a} & 0 & 0 \\ 0 & B_{1a} & 0 \\ 0 & 0 & B_{1a} \end{pmatrix}_{B_1}$$

Les sous-solides 1b et 1c sont des colonnes cylindriques d'axes colinéaires à $\bar{y}_2$, invariantes par rotation autour des axes respectifs $(G_{1b}, \bar{y}_2)$ et $(G_{1c}, \bar{y}_2)$, ce qui permet d'exprimer les matrices sous la forme simplifiées :

$$I_{G_{1b},1b} = \begin{pmatrix} A_{1b} & 0 & 0 \\ 0 & B_{1b} & 0 \\ 0 & 0 & A_{1b} \end{pmatrix}_{B_2} \quad I_{G_{1c},1c} = \begin{pmatrix} A_{1c} & 0 & 0 \\ 0 & B_{1c} & 0 \\ 0 & 0 & A_{1c} \end{pmatrix}_{B_2}$$

Les solides 5 et 6 présentent un plan de symétrie normal à $\bar{z}_2$, ce qui permet d'exprimer les matrices sous la forme simplifiées :

$$I_{G_5,5} = \begin{pmatrix} A_5 & -F_5 & 0 \\ -F_5 & B_5 & 0 \\ 0 & 0 & C_5 \end{pmatrix}_{B_2} \quad I_{G_6,6} = \begin{pmatrix} A_6 & -F_6 & 0 \\ -F_6 & B_6 & 0 \\ 0 & 0 & C_6 \end{pmatrix}_{B_2}$$

S'il faut déplacer ces matrices dans la base 1 comme le demande la question, il faut utiliser la matrice de passage :

$$\mathbf{P}_{12} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & -\sin \alpha \\ 0 & \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}_{B_2} \quad \text{avec } [I_{G_i,i}]_{B_1} = \mathbf{P}_{12}^T [I_{G_i,i}]_{B_2} \mathbf{P}_{12}$$

Question 50 Expliquer le rôle de la masse attachée à la poulie motrice de l'axe principal sur la figure 8 (annexe B).

À noter que l'équilibrage n'est plus au programme depuis 2021.

La masse attachée à la poulie motrice est probablement une masse d'équilibrage, qui permet de compenser l'excédent de masse coté A du système de chargement/déchargement, de sorte à ramener le centre de gravité de l'ensemble sur l'axe de rotation.

Cet équilibrage ne peut être qu'approché car la distance à l'axe du point A dépend de la taille du pot.

Question 51 Donner l'expression de la puissance mécanique fournie au système en fonction du couple moteur C_m fourni par le moteur M1 à l'arbre 1 ainsi que du taux de rotation $\dot{\alpha} \bar{x}_1$ de l'arbre 1 dans R_1 .

La puissance fournie par le couple moteur s'écrit :

$$P_{mot1 \rightarrow 1} = C_m \omega_m = C_m \frac{R_m}{R_1} \dot{\alpha}$$

où $\frac{R_m}{R_1}$ est le rapport des rayons des poulies (non définis).

Question 52 Donner l'expression de l'énergie cinétique totale du système en fonction des éléments des matrices d'inertie des solides, de leurs masses et de la position relative de leur centre de gravité par rapport à R_1 ainsi que du taux de rotation $\dot{\alpha}$ de l'arbre 1 dans R_1 .

L'énergie cinétique totale E_c est la somme des énergies cinétiques des pièces en mouvement :

$$E_c = E_{cM1} + E_{c1} + E_{c2} + E_{cM2} + E_{c5} + E_{c6} + E_{c8} + E_{c9} + E_{cP}$$

Cependant, le modèle est trop peu défini pour mener à bien ce calcul : les vecteurs position des centres de masse semblent définis dans la base B1 tandis qu'ils sont fixes pour la plupart dans B2, ces centres de masse sont presque tous hors de l'axe de rotation $\dot{\alpha}$... Sans hypothèses supplémentaires, le calcul semble long et hasardeux.

En proposant une démarche approchée, on peut considérer que les centres de gravité G_1 , G_2 et G_{mot} sont sur les axes de rotation, tandis que G_8 , G_9 , G_5 et G_6 sont à une distance environ égale à $H/2$ de l'axe de rotation horizontal (β) avec H la hauteur du pot. Sous ces hypothèses simplificatrices, l'énergie cinétique pourrait s'exprimer sous la forme :

$$E_c = \frac{1}{2} \left(A_{1a} + A_{1b} + A_{1c} + A_2 + A_{M2} + A_5 + M_5 \frac{H^2}{4} + A_6 + M_6 \frac{H^2}{4} + A_8 + M_8 \frac{H^2}{4} + A_9 + M_9 \frac{H^2}{4} + A_P \right) \dot{\alpha}^2 + \frac{1}{2} (B_8 + B_9 + B_P) \beta^2$$

Question 53 Exposer les hypothèses permettant d'en déduire l'expression du couple C_m fourni par le moteur M1 à l'arbre 1.

Les hypothèses permettant de déduire le couple moteur sont :

- hypothèse de liaisons parfaites ;
- hypothèse de dissipation par viscosité dans le pot négligeable ;
- hypothèse de puissance développée par le poids négligeable.

Le théorème de l'énergie cinétique appliqué à l'ensemble en mouvement s'écrit :

$$\frac{dE_c}{dt} = P_{int} + P_{ext/0}$$

Où la puissance intérieure est nulle et la puissance extérieure est uniquement apportée par le moteur 1 :

$$P_{ext/0} = P_{mot1 \rightarrow 1} = C_m \omega_m = C_m \frac{R_m}{R_1} \dot{\alpha}$$

Question 54 Préciser alors l'expression du couple C_m fourni par le moteur M1 à l'arbre 1 avec les données du problème.

Le couple moteur s'écrit alors $C_m = \frac{R_1}{R_m \dot{\alpha}} \frac{dE_c}{dt}$

Il faut avoir calculé l'expression de l'énergie cinétique pour aller plus loin.

4.2 Asservissement du moteur principal

Question 55 Quel est l'intérêt technologique d'utiliser une machine synchrone plutôt qu'un moteur à courant continu pour M1 ?

Il est difficile de savoir ce qu'attend le jury à cette question.

Une machine synchrone est généralement plus chère (nécessité d'un autopilotage) et plus fiable (pas de balais) qu'un moteur à courant continu, mais il y a peu de chances que ces critères soient déterminants dans l'application abordée.

Une machine à courant continu est moins chère et plus facile à asservir.

Le mélangeur de peinture, que ce soit pour la masse embarquée ou les vitesses de rotation utilisées, se rapproche des technologies des lave-linges, où ce sont des moteurs asynchrones qui sont le plus souvent utilisés (pour des raisons de fiabilité et de coût).

Question 56 Quel risque peut rencontrer le mélangeur lorsque le contrôle du système est réalisé par un contrôleur classique ?

Vues les explications préalables dans le sujet, le risque probablement attendu est celui du décrochage du rotor par rapport au champ magnétique tournant si le couple est trop important. Mais une machine synchrone sur une telle application devrait utiliser un autopilotage, ce qui annule le risque de décrochage puisque le champ magnétique est positionné relativement à l'angle du rotor...

Question 57 Quel est l'intérêt des réseaux de neurones pour cette application ?

Une version courte de la réponse serait « aucun intérêt » mais nous allons faire un effort pour rédiger une proposition plausible.

Un réseau de neurones permet d'« apprendre » des lois présentes dans des données et difficile à exprimer théoriquement.

Les lois physiques présentes dans les machines synchrones sont bien connues d'un point de vue théorique et un réseau de neurone n'apportera pas d'avantage sur ce plan.

Les sollicitations extérieures pourraient éventuellement faire l'objet d'un apprentissage machine : un enregistrement des perturbations pour différents types de pots permettrait de prévoir les sollicitations subies par le moteur.

En se laissant guider par les explications préalables du sujet, on pourrait évoquer l'idée que les réseaux de neurones puissent apprendre les lois non linéaires de comportement du moteur synchrone, là où le « contrôleur classique » est dimensionné à partir d'un modèle linéarisé.

Il reste peu probable que ce genre de machine soit équipée d'un apprentissage machine.

Question 58 À partir d'une librairie existante, proposer un protocole numérique (différentes étapes du développement numérique) afin de mettre en œuvre le contrôle par réseau de neurones.

D'une façon générale, la mise en place d'un contrôle par réseau de neurones passe par les étapes suivantes :

- prise de mesures sur le système en fonctionnement normal (commande classique) pour établir un ensemble de données d'apprentissage ;
- choix d'une architecture de réseau (nombre de couches, nombre de neurones par couche, fonctions d'activation...) ;
- itérations de mise au point du modèle : phase d'apprentissage machine sur les exemples, validation des performances et modification des hyperparamètres ;
- implantation dans le contrôleur pour inférence en cours de fonctionnement.

On peut citer les bibliothèques classiques d'apprentissage machine : Sklearn, Tensorflow, Keras, Pytorch...



for innovation

teaching sciences