

Proposition de corrigé

Concours : Concours Commun INP

Année : 2024

Filière : TSI

Épreuve : Modélisation

Ceci est une proposition de corrigé des concours de CPGE, réalisée bénévolement par des enseignants de Sciences Industrielles de l'Ingénieur et d'Informatique, membres de l'[UPSTI](https://www.upsti.fr) (Union des Professeurs de Sciences et Techniques Industrielles), et publiée sur le site de l'association :

<https://www.upsti.fr/espace-etudiants/annales-de-concours>

A l'attention des étudiants

Ce document vous apportera des éléments de corrections pour le sujet traité, mais n'est ni un corrigé officiel du concours, ni un corrigé détaillé ou exhaustif de l'épreuve en question.

L'UPSTI ne répondra pas directement aux questions que peuvent soulever ces corrigés : nous vous invitons à vous rapprocher de vos enseignants si vous souhaitez des compléments d'information, et à vous adresser à eux pour nous faire remonter vos éventuelles remarques.

Licence et Copyright

Toute représentation ou reproduction (même partielle) de ce document faite sans l'accord de l'UPSTI est **interdite**. Seuls le téléchargement et la copie privée à usage personnel sont autorisés (protection au titre des [droits d'auteur](#)).

En cas de doute, n'hésitez pas à nous contacter à : corrigesconcours@upsti.fr.

Informez-vous !

Retrouvez plus d'information sur les [Sciences de l'Ingénieur](#), l'[orientation](#), les [Grandes Ecoles](#) ainsi que sur les [Olympiades de Sciences de l'Ingénieur](#) et sur les [Sciences de l'Ingénieur au Féminin](#) sur notre site : www.upsti.fr

L'équipe UPSTI

Stockage électromécanique de l'électricité

Corrigé UPSTI

Partie I - Demande d'électricité en France

On note f la fonction de la consommation journalière en France en fonction du temps x en heure. On supposera que f est une fonction continue sur $[0; 24]$.

Q1 On se propose de considérer une fonction g définie sur $[0; 24]$ par :

$$g(x) = -0.02x^3 + 0.72x^2 - 5.27x + 45$$

Montrer que $g(0) = 45$.

$$g(0) = -0.02 \times 0^3 + 0.72 \times 0^2 - 5.27 \times 0 + 45 = 45$$

Q2 Justifier que la fonction g est dérivable sur $]0; 24[$ et admet pour dérivée :

$$g'(x) = -0.06x^2 + 1.44x - 5.27$$

La fonction g est continue et dérivable sur $]0; 24[$ en tant que fonction polynôme et on la dérive comme une somme de monômes :

$$g'(x) = -3 \times 0.02x^2 + 2 \times 0.72x - 5.27 = -0.06x^2 + 1.44x - 5.27.$$

Q3 Donner les variations de g (on donnera des valeurs approchées des valeurs où g change de variations) et

comparer au graphique de la **figure 1**. On pourra utiliser que $1.44^2 - 4 \times 5.27 \times 0.06 = 0.8088$.

La fonction g' est un polynôme du deuxième degré dont le discriminant vaut, d'après l'énoncé : $\Delta = 0.8088$.

On peut donc choisir $\sqrt{\Delta} \approx 0.9$.

La fonction g changera de variation en les zéros de la fonction g' qui sont donnés par :

$$x_1 = \frac{-1.44 - 0.9}{-2 \times 0.06} = \frac{2.34}{0.12} \approx 19.5$$

$$x_2 = \frac{-1.44 + 0.9}{-2 \times 0.06} = \frac{0.54}{0.12} \approx 4.5$$

Enfin, puisque $-0.06 < 0$, on en déduit que g est décroissante sur $]0; 4.5[$ et sur $[19.5; 24[$ et croissante sur $[4.5; 19.5]$. On peut remarquer que le graphique fourni donne un sens de variation à peu près compatible avec le modèle, en sous-évaluant la valeur à partir de laquelle la fonction décroît à nouveau.

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et des réels $a_0, a_1, \dots, a_n$ deux à deux distincts appartenant à l'intervalle $[0; 24]$. Pour tout entier i appartenant à $\llbracket 0; n \rrbracket$, on appelle i -ème polynôme interpolateur de Lagrange le polynôme :

$$L_i(X) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n \frac{X - a_j}{a_i - a_j}$$

Q4 Dans cette question uniquement, on se restreint à $n = 1$ avec $a_0 = 3$ et $a_1 = 13$. Écrire les polynômes de Lagrange.

$$L_0(X) = \frac{X - a_1}{a_0 - a_1} = \frac{X - 13}{3 - 13} = -\frac{1}{10}(X - 13)$$

$$L_1(X) = \frac{X - a_0}{a_1 - a_0} = \frac{X - 3}{13 - 3} = \frac{1}{10}(X - 3)$$

Q5 Soit i un entier fixé appartenant à $\llbracket 0; n \rrbracket$. Montrer que le polynôme L_i est de degré n .

Entre 0 et n , on compte n entiers distincts de i donc L_i est le produit d'exactly n polynômes de degré 1 ainsi L_i est de degré n .

Q6 Soient i et k deux entiers fixés dans $\llbracket 0; n \rrbracket$ avec $i \neq k$. Montrer que $L_i(a_i) = 1$ et $L_i(a_k) = 0$.

Il suffit d'écrire que :

$$L_i(a_i) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n \frac{a_i - a_j}{a_i - a_j} = 1.$$

Par ailleurs, lorsqu'on substitue à X la valeur a_k , l'un des facteurs du produit définissant L_i est nul donc $L_i(a_k) = 0$.

Q7 Montrer que la famille formée par les polynômes L_i avec i appartenant à $\llbracket 0; n \rrbracket$ forme une base de l'ensemble $\mathbb{R}_n[X]$ des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à n .

Commençons par prouver que la famille est libre :

Soient $\lambda_0, \dots, \lambda_n$ des réels vérifiant $\sum_{k=0}^n \lambda_k L_k = 0$. Fixons maintenant un entier j entre 0 et n . On peut écrire

$$\sum_{k=0}^n \lambda_k L_k(a_j) = 0. \text{ La question précédente permet alors d'obtenir } \boxed{\lambda_j = 0}.$$

La famille est ainsi libre et, puisqu'elle compte $n + 1 = \dim(\mathbb{R}_n[X])$ vecteurs, on en déduit que cette famille est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

Q8 En déduire que :

$$Q = \sum_{i=0}^n f(a_i) L_i$$

est l'unique polynôme de $\mathbb{R}_n[X]$, tel que pour tout k dans $\llbracket 0; n \rrbracket$, $Q(a_k) = f(a_k)$.

Soit Q le polynôme de $\mathbb{R}_n[X]$ défini par

$$Q = \sum_{i=0}^n f(a_i) L_i.$$

Soit k un entier entre 0 et n . Avec la question **Q6** on observe que : $Q(a_k) = \sum_{i=0}^n f(a_i) L_i(a_k) = f(a_k)$, donc le polynôme Q vérifie la condition demandée.

Par unicité des coordonnées dans une base, on en déduit en outre que Q est bien l'unique polynôme vérifiant la condition : pour tout k dans $\llbracket 0; n \rrbracket$, $Q(a_k) = f(a_k)$.

Q9 Écrire en langage Python une fonction `lagrange(i,A,x)` qui prend comme arguments un entier i , une liste de flottants A correspondant à la séquence $[a_0, a_1, \dots, a_n]$, un flottant x et qui renvoie le flottant correspondant à $L_i(x)$.

```
def lagrange(i,A,x):
    P=1
    for k in range(len(A)):
        if k!=i:
            P=P*(x-A[k])/(A[i]-A[k])
    return P
```

Soient f et g , deux fonctions continues sur $[0;1]$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$. On note :

$$\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(x)g(x) dx$$

Q10 Montrer que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ définit un produit scalaire sur l'ensemble des fonctions continues sur $[0;1]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.

La linéarité à gauche découle de la distributivité de la multiplication des réels sur l'addition dans l'intégrale et de la linéarité de l'intégrale.

La symétrie découle de la commutativité de la multiplication des réels. La linéarité à gauche et la symétrie établissent la bilinéarité.

Prenons f une fonction continue sur $[0;1]$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$. On constate que $\langle f, f \rangle = \int_0^1 f^2(x)dx \geq 0$, par positivité de l'intégrale.

Enfin, si $\langle f, f \rangle = \int_0^1 f^2(x)dx = 0$ alors, comme f^2 est une fonction continue et positive, il vient que, pour tout $t \in [0;1]$, $f^2(t) = 0$, soit f est la fonction nulle.

En définitive, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est une forme bilinéaire symétrique définie positive, soit un produit scalaire sur l'ensemble des fonctions continues sur $[0;1]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Soit n un entier non nul fixé.

On cherche un polynôme P à coefficients réels et de degré inférieur ou égal à n , tel que :

$$\forall Q \in \mathbb{R}_n[X] : \int_0^1 |P(x) - f(x)|^2 dx \leq \int_0^1 |Q(x) - f(x)|^2 dx \quad (1)$$

Nous allons supposer dans un premier temps qu'un tel polynôme P existe.

On pose $Q = P + tR$ avec t un réel et R un polynôme de $\mathbb{R}_n[X]$.

Q11 Expliquer pourquoi l'inéquation (1) est équivalente à l'inéquation suivante :

$$\langle f - P, f - P \rangle \leq \langle f - P - tR, f - P - tR \rangle \quad (2)$$

D'une part, on observe que :

$$\langle f - P, f - P \rangle = \int_0^1 (f(x) - P(x))^2 dx = \int_0^1 |P(x) - f(x)|^2 dx.$$

D'autre part, on remarque que, pour tout polynôme $R \in \mathbb{R}_n[X]$ et tout réel t , en posant $Q = P + tR$:

$$\langle f - P - tR, f - P - tR \rangle = \langle f - Q, f - Q \rangle = \int_0^1 |Q(x) - f(x)|^2 dx.$$

Supposons alors l'inéquation (1) vérifiée et appliquons-la au polynôme $Q = P + tR$, il vient exactement :

$$\langle f - P, f - P \rangle \leq \langle f - P - tR, f - P - tR \rangle.$$

Réciproquement, supposons l'inéquation (2) vérifiée et choisissons Q un polynôme quelconque de $\mathbb{R}_n[X]$. On peut toujours l'écrire sous la forme $Q = P + tR$ (par exemple en posant $t = 1$ et $R = Q - P$). On applique alors l'inégalité (2) et il vient :

$$\int_0^1 |P(x) - f(x)|^2 dx \leq \int_0^1 |Q(x) - f(x)|^2 dx.$$

Les deux inéquations sont donc équivalentes.

Q12 En déduire que :

$$t^2 \langle R, R \rangle - 2t \langle f - P, R \rangle \geq 0$$

Développons le membre de droite de l'inéquation (2) en utilisant la bilinéarité et la symétrie du produit scalaire. Il vient :

$$\langle f - P - tR, f - P - tR \rangle = \langle (f - P) - tR, (f - P) - tR \rangle = \langle f - P, f - P \rangle - 2t \langle f - P, R \rangle + t^2 \langle R, R \rangle.$$

On écrit alors l'inéquation (2) et on obtient exactement :

$$t^2 \langle R, R \rangle - 2t \langle f - P, R \rangle \geq 0.$$

Q13 En faisant tendre t vers 0 par valeur positive, montrer que :

$$\langle f - P, R \rangle \leq 0$$

Supposons $t > 0$ et divisons chaque membre de l'inégalité précédente par t , pour obtenir :

$$t \langle R, R \rangle - 2 \langle f - P, R \rangle \geq 0.$$

Faisons alors tendre t vers 0 et il vient l'inégalité demandée.

Q14 En faisant tendre t vers 0 par valeur négative, montrer que :

$$\langle f - P, R \rangle \geq 0$$

Supposons maintenant $t < 0$ et divisons chaque membre de l'inégalité précédente par t , pour obtenir, cette fois-ci :

$$t \langle R, R \rangle - 2 \langle f - P, R \rangle \leq 0.$$

Refaisons alors tendre t vers 0 et il vient l'inégalité demandée.

Q15 En déduire que $\forall R \in \mathbb{R}_n[X], \langle f - P, R \rangle = 0$.

Les deux inégalités obtenues lors des deux questions précédentes sont valables quelque soit le choix de R dans $\mathbb{R}_n[X]$ et la quantité $\langle f - P, R \rangle$, étant à la fois positive et négative, est bien nulle.

Q16 En déduire que si P existe, alors P est unique.

Supposons qu'il existe deux polynômes P_1 et P_2 dans $\mathbb{R}_n[X]$ vérifiant $\forall R \in \mathbb{R}_n[X], \langle f - P, R \rangle = 0$.

On peut écrire, par linéarité à gauche du produit scalaire :

$$\langle P_1 - P_2, P_1 - P_2 \rangle = \langle -(f - P_1) + (f - P_2), P_1 - P_2 \rangle = -\langle f - P_1, P_1 - P_2 \rangle + \langle f - P_2, P_1 - P_2 \rangle.$$

Le polynôme $P_1 - P_2$ appartenant à $\mathbb{R}_n[X]$, les deux produits scalaires du membre de droite sont nuls et il vient finalement :

$$\langle P_1 - P_2, P_1 - P_2 \rangle = 0.$$

Un produit scalaire étant défini positif, cela est équivalent à $P_1 = P_2$.

Cela établit l'unicité, si existence, d'un polynôme P vérifiant la condition obtenue en question **Q15**.

Ce polynôme, s'il existe, est appelé approximation de f au sens des moindres carrés. Nous allons chercher à construire un tel polynôme P en considérant $P(X) = \sum_{j=0}^n a_j X^j$, avec pour tout entier j appartenant à $\llbracket 0; n \rrbracket$, a_j un réel.

Q17 Montrer à l'aide de la question **Q15** que les coefficients a_j pour $0 \leq j \leq n$ vérifient pour $0 \leq k \leq n$:

$$\sum_{j=0}^n a_j \int_0^1 x^{j+k} dx = \int_0^1 x^k f(x) dx$$

Supposons le polynôme P défini comme stipulé par l'énoncé. Soit k un entier entre 0 et n . On applique l'égalité obtenue en question **Q15** au polynôme $R = X^k$:

$$\left\langle f - \sum_{j=0}^n a_j X^j, X^k \right\rangle = 0.$$

On obtient ainsi, en revenant à la définition du produit scalaire :

$$\int_0^1 x^k \left(f(x) - \sum_{j=0}^n a_j x^j \right) dx = 0.$$

Reste à utiliser la linéarité de l'intégrale pour obtenir l'égalité souhaitée.

Q18 En déduire que la matrice du système linéaire d'inconnue associée au $n+1$ uplet $(a_0, a_1, \dots, a_n)$ précédent est :

$$H_{n+1} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \cdots & \frac{1}{n+1} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \cdots & \frac{1}{n+2} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \cdots & \frac{1}{n+3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{n+1} & \frac{1}{n+2} & \frac{1}{n+3} & \cdots & \frac{1}{2n+1} \end{pmatrix}$$

Le système linéaire considéré est un système de $(n+1)$ équations à $(n+1)$ inconnues. Soient i et p deux entiers compris entre 1 et $n+1$.

Le coefficient (i, p) de la matrice du système linéaire est le coefficient de l'inconnue a_{p-1} dans l'équation correspondant à $k = i - 1$ dans la question précédente, c'est-à-dire, toujours d'après la question précédente : $\int_0^1 x^{(p-1)+(i-1)} dx$.

Or $\int_0^1 x^{i+p-2} dx = \left[\frac{x^{i+p-1}}{i+p-1} \right]_0^1 = \frac{1}{i+p-1}$.

On retrouve exactement les coefficients de la matrice H_{n+1} fournie par l'énoncé.

Q19 Justifier que la matrice H_{n+1} est diagonalisable.

La matrice H_{n+1} est symétrique à coefficients réels donc est diagonalisable, d'après le théorème spectral.

Q20 On admet que 0 n'est pas une valeur propre de la matrice H_{n+1} . En déduire qu'il existe un polynôme P de degré $k \leq n$ vérifiant l'égalité établie à la question **Q17**.

Comme 0 n'est pas valeur propre de H_{n+1} , H_{n+1} est inversible et le système linéaire considéré est de Cramer donc possède bien une (unique) solution.

Cette solution donne exactement les coefficients du polynôme P vérifiant l'égalité établie en question **Q17**. De plus, si P est non-nul, son degré vaut : $\max\{k \in \llbracket 0; n \rrbracket; a_k \neq 0\}$, qui est inférieur ou égal à n .

Partie II - Stockage électromécanique

II.1 - Moment d'inertie

Q21 Exprimer l'énergie cinétique E_c d'un tel dispositif en fonction de J_1 et de ω .

Le solide 1 est en rotation pure par rapport au bâti 0. On peut donc écrire : $E_c = \frac{1}{2} J_1 \omega^2$

Q22 Pour des vitesses de rotation $N_{min} = 30\,000$ tr/min et $N_{max} = 40\,000$ tr/min, exprimer la valeur du moment d'inertie J_1 nécessaire afin de disposer des 3,0 kWh demandés. Réaliser l'application numérique.

De la figure 4, on en déduit que l'énergie cinétique absorbée correspond à la différence des énergies cinétiques entre les états à vitesse minimale et maximale. De la question précédente, on en déduit que :

$$J_1 = \frac{2 E_c}{\omega_{max}^2 - \omega_{min}^2}$$

L'application numérique donne approximativement :

$$J_1 = \frac{2 \cdot 3 \cdot 10^3 \cdot 3600}{(4 \cdot 10^4 \cdot \frac{\pi}{30})^2 - (3 \cdot 10^4 \cdot \frac{\pi}{30})^2} \simeq \frac{6^3 \cdot 10^5}{7 \cdot 10^6} \simeq 3.1 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

NB : à la calculatrice, on trouve : $J_1 = 2.8 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$

Q23 Exprimer la masse m du cylindre en fonction de sa masse volumique ρ , ainsi que de ses dimensions, H et R .

Pour un cylindre plein, on a : $m = \pi \rho H R^2$

Le moment d'inertie d'un cylindre autour de son axe de révolution $(O, \vec{z}_0)$ est donné par la relation :

$$J_1 = \frac{\pi \rho H R^4}{2}$$

Q24 Montrer que :

$$J_1 = m \frac{R^2}{2}$$

En déduire la valeur du rayon R permettant d'obtenir un cylindre de 300 kg.

$$J_1 = \frac{\pi \rho H R^4}{2} = \pi \rho H R^2 \cdot \frac{R^2}{2} = m \frac{R^2}{2}$$

On en déduit que :

$$R = \sqrt{\frac{2J_1}{m}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 3}{300}} \sim 1.4 \cdot 10^{-1} \text{ m}$$

II.2 - Auto-décharge

Q25 Identifier qualitativement les éléments mécaniques et phénomènes physiques pouvant être à l'origine de ces différents frottements.

On peut citer :

- les frottements liés à la solution de guidage en rotation (les roulements) ;
- les frottement de l'air sur le volant d'inertie.

Q26 Préciser le(s) solide(s) isolé(s) et la démarche employée afin de montrer que :

$$J_1 \frac{d\omega}{dt} + \mu \cdot \omega = -C_s \quad (3)$$

On isole le solide 1, dans le référentiel du bâti 0. On procède au bilan des actions mécaniques extérieures subies par le solide 1, à savoir :

- le couple résistant C_s lié au frottement sec
- le couple résistant $C_v = \mu \cdot \omega$ lié au frottement visqueux

Enfin, on applique au solide 1 le théorème du moment dynamique au point O en projection selon l'axe $(O, \vec{z}_0)$.

La fonction ω de variable t est dérivable sur $\mathbb{R}$.

Q27 Résoudre l'équation différentielle (3) lorsque C_s est une constante réelle et pour la condition initiale

$$\omega(0) = \omega_{max}.$$

L'équation différentielle (3) est une équation différentielle du 1^{er} ordre à second membre constant. La solution est la somme de

- la solution de l'équation différentielle sans second membre $\frac{d\omega}{dt} + \frac{\mu}{J_1} \cdot \omega = 0$
- la solution de l'équation différentielle lorsque $\frac{d\omega}{dt} = 0$

On a alors :

$$\omega(t) = K \cdot e^{-\frac{\mu}{J_1} t} - \frac{C_s}{\mu} \quad (4)$$

avec K une constante réelle. A l'aide de la condition initiale $\omega(0) = \omega_{max}$, on trouve :

$$\omega(0) = \omega_{max} = K - \frac{C_s}{\mu} \iff K = \omega_{max} + \frac{C_s}{\mu}$$

Ce qui donne donc :

$$\omega(t) = \left(\omega_{max} + \frac{C_s}{\mu} \right) e^{-\frac{\mu}{J_1} t} - \frac{C_s}{\mu}$$

Q28 Exprimer la durée Δt pour que le système s'autodécharge jusqu'à ω_{min} .

On cherche la durée Δt au bout de laquelle, on a $\omega(\Delta t) = \omega_{min}$, ce qui donne :

$$\begin{aligned} \left(\omega_{max} + \frac{C_s}{\mu} \right) e^{-\frac{\mu}{J_1} \Delta t} - \frac{C_s}{\mu} &= \omega_{min} \iff e^{-\frac{\mu}{J_1} \Delta t} = \frac{\omega_{min} + \frac{C_s}{\mu}}{\omega_{max} + \frac{C_s}{\mu}} \\ &\iff -\frac{\mu}{J_1} \Delta t = \ln \left(\frac{\omega_{min} + \frac{C_s}{\mu}}{\omega_{max} + \frac{C_s}{\mu}} \right) \\ &\iff \Delta t = \frac{J_1}{\mu} \cdot \ln \left(\frac{\omega_{max} + \frac{C_s}{\mu}}{\omega_{min} + \frac{C_s}{\mu}} \right) \end{aligned}$$

On trouve alors $\Delta t \approx 1 \cdot 10^4$ s.

Q29 Exprimer la durée d'autodécharge en heure et conclure.

$$\Delta t \approx 1 \cdot 10^4 \text{ s} \approx \frac{1 \cdot 10^4}{3600} \text{ h} \approx 2.8 \text{ h}$$

Le volant d'inertie ne pourra conserver l'énergie stockée que pendant une durée approximative de 2.8h avant d'avoir complètement déchargée l'énergie cinétique accumulée au cours de la charge.

Partie III - Contrôle des paliers magnétiques

Q30 Réaliser le bilan des actions extérieures s'appliquant à 1 et montrer par une étude dynamique, en prenant soin de détailler la démarche, que :

$$\ddot{z}(t) = -g + \frac{k_i}{m} i(t) + \frac{k_a}{m} z(t) \quad (5)$$

On isole le solide 1, dans le référentiel du bâti 0. On réalise le bilan des actions extérieures :

- action de la pesanteur $\vec{F}_{pes \rightarrow 1} = -mg \vec{z}_0$
- action du palier magnétique $\vec{F}_{a \rightarrow 1} = (k_i i(t) + k_a z(t)) \vec{z}_0$

On applique au solide 1 le théorème de la résultante dynamique en projection selon $\vec{z}_0$:

$$m \ddot{z}(t) = -mg + (k_i i(t) + k_a z(t))$$

On en déduit que :

$$\ddot{z}(t) = -g + \frac{k_i}{m} i(t) + \frac{k_a}{m} z(t)$$

On note z_{eq} la position d'équilibre du volant d'inertie par rapport au bâti.

Q31 Établir l'expression du courant i_{eq} associée à la position d'équilibre z_{eq} en fonction de m , g , k_i , k_a et de z_{eq} .

À la position d'équilibre, on a :

$$0 = -g + \frac{k_i}{m} i_{eq} + \frac{k_a}{m} z_{eq}$$

On a donc :

$$i_{eq} = \frac{m}{k_i} \left(g - \frac{k_a}{m} z_{eq} \right)$$

On pose $\Delta i(t) = i(t) - i_{eq}$ et $\Delta z(t) = z(t) - z_{eq}$.

Q32 En déduire une relation entre $\Delta z(t)$ et $\Delta i(t)$, puis montrer que l'on obtient dans le domaine de Laplace,

pour des conditions initiales nulles, la fonction de transfert suivante :

$$\frac{\Delta Z(p)}{\Delta I(p)} = -\frac{k_i}{k_a} \cdot \frac{1}{1 - \frac{m}{k_a} p^2} \quad (6)$$

avec $\Delta I(p)$ et $\Delta Z(p)$, respectivement, les transformées de Laplace de $\Delta i(t)$ et $\Delta z(t)$.

On déduit des relations données que : $\ddot{\Delta z}(t) = \ddot{z}(t)$. A partir de l'équation différentielle (4), on a alors :

$$\ddot{\Delta z}(t) = -g + \frac{k_i}{m} (\Delta i(t) + i_{eq}) + \frac{k_a}{m} (\Delta z(t) + z_{eq})$$

En réinjectant l'expression déterminée à la question **Q31**, on a alors :

$$\ddot{\Delta z}(t) = \frac{k_i}{m} \Delta i(t) + \frac{k_a}{m} \Delta z(t)$$

Par application de la transformée de Laplace, pour des conditions initiales nulles, on a alors :

$$\begin{aligned} p^2 \Delta Z(p) &= \frac{k_i}{m} \Delta I(p) + \frac{k_a}{m} \Delta Z(p) \iff -\frac{k_i}{m} \Delta I(p) = \left[\frac{k_a}{m} - p^2 \right] \Delta Z(p) \\ &\iff \frac{\Delta Z(p)}{\Delta I(p)} = -\frac{k_i}{m} \cdot \frac{1}{\frac{k_a}{m} - p^2} \\ &\iff \boxed{\frac{\Delta Z(p)}{\Delta I(p)} = -\frac{k_i}{k_a} \cdot \frac{1}{1 - \frac{m}{k_a} p^2}} \end{aligned}$$

La fonction de transfert (5) permet de traduire le comportement du palier magnétique axial, soit la variation de distance $\Delta z(t)$ associée à la variation de courant $\Delta i(t)$.

Q33 Montrer que le comportement du palier magnétique est intrinsèquement instable.

La stabilité du comportement du palier magnétique est liée aux pôles de sa fonction de transfert.

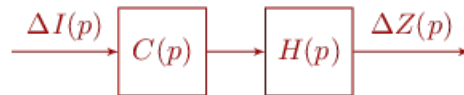
$$1 - \frac{m}{k_a} p^2 = 0 \iff p^2 = \frac{k_a}{m} \iff p = \pm \sqrt{\frac{k_a}{m}}$$

La fonction de transfert possède donc deux pôles réels, mais dont l'un d'eux a une partie réelle strictement positive. Le comportement du système est donc intrinsèquement instable.

Q34 Proposer une démarche (sans calcul) afin de corriger ce problème. Illustrer la proposition par un schéma-bloc.

Pour corriger ce problème, on peut envisager deux méthodes.

La première méthode consiste à inclure dans la chaîne directe du système un correcteur qui va venir compenser le pôle instable de la fonction de transfert.



La compensation du pôle instable est effectuée en choisissant un correcteur de la forme :

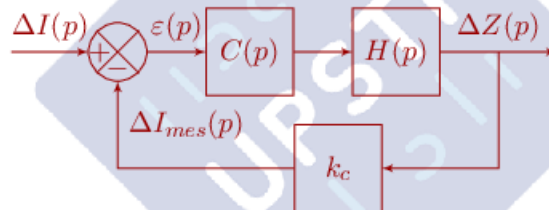
$$C(p) = \frac{1 - \sqrt{\frac{m}{k_a}} p}{1 + Tp}$$

avec T un réel positif. On a alors :

$$\frac{\Delta Z(p)}{\Delta I(p)} = \frac{-\frac{k_i}{k_a}}{(1 + Tp)(1 + \sqrt{\frac{m}{k_a}} p)}$$

On a alors une fonction de transfert de même ordre, de même gain statique et stable. Si cette méthode est mathématiquement valable, elle repose sur notre capacité à compenser exactement le pôle instable ce qui est peu réaliste en pratique.

La deuxième méthode consiste à asservir la variation de distance $\Delta Z(p)$ et inclure un correcteur en aval du comparateur. Cela peut prendre la forme du schéma-bloc suivant :



La boucle de rétroaction est composée d'un capteur de gain $k_c = 1$ A/m qui renvoie une intensité $\Delta I_{mes}(p)$, image de $\Delta Z(p)$, permettant une comparaison homogène avec l'entrée $\Delta I(p)$.

Il suffit alors de choisir la forme du correcteur de manière à obtenir une fonction de transfert en boucle fermée dont tous les pôles sont à partie réelle strictement négative. Un correcteur proportionnel de gain $K_p > \frac{k_a}{k_i}$ permet de réaliser cela. Cette méthode ne pose pas de problème de mise en place et conserve l'ordre mais pas le gain statique initial (il faudrait avoir $K_p = \frac{k_a}{k_a + k_i} < \frac{k_a}{k_i}$).