

Système d'impression 3D de structures en béton

Corrigé UPSTI

INTRODUCTION

Partie 1 : Mise en contexte

Question 1.1 Pour l'impression proposée, la buse est de section circulaire. Quel est l'intérêt de ce choix ?
L'intérêt d'une section circulaire est de ne pas avoir à orienter la buse suivant l'axe normal à la surface de dépose, c'est-à-dire l'axe $\vec{z}$.

Question 1.2 Lorsque la buse se déplace en translation par rapport à un support (cf. Figure 4), proposer un schéma simple de mécanique des fluides permettant de décrire l'écoulement de la pâte cimentaire.

Le béton circule dans la buse tel un fluide visqueux dans une canalisation circulaire. Une fois déposé, le béton est à l'arrêt sur le support tandis que la buse se déplace à la vitesse d'avance.

Le plus simple est de représenter les vitesses du béton dans le référentiel de la buse (figure 1), auquel cas la forme du champ des vitesses du béton dans la buse prend une forme de type parabolique, tandis que le champ des vitesses du béton déposé par rapport à la buse est uniforme à la vitesse d'avance de la buse.

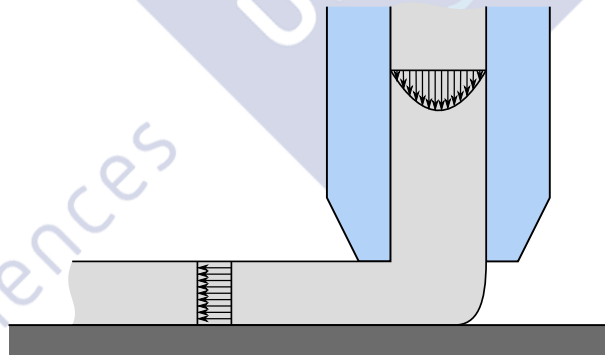


FIGURE 1 – Champ des vitesses du béton dans le référentiel de la buse.

Question 1.3 En faisant l'hypothèse de conservation de la masse, exprimer le lien entre le diamètre D de la section de la buse, la vitesse d'éjection V_e du cordon imposée par la pompe, la vitesse d'avance V_r de la buse et la section S_c du cordon (supposée rectangulaire de hauteur H et de largeur B).

On suppose que la vitesse d'éjection V_e correspond à la vitesse moyenne dans la section de la buse et que le fluide est incompressible, auquel cas la conservation de la masse correspond à la conservation du débit.

Le débit dans la buse est donc égal au débit dans le cordon déposé (dans le référentiel de la buse), soit :

$$\frac{\pi D^2}{4} V_e = S_c V_r$$

Question 1.4 Parmi ces derniers paramètres D , V_e , V_r , S_c , indiquer celui (ou ceux) imposé(s) par la géométrie du mur à imprimer et ceux devant être maîtrisés par le robot. Expliquer les conséquences de la non-maîtrise de chaque paramètre.

- D est imposé par la géométrie du mur car il détermine la largeur du cordon ;
- V_e , V_r et S_c sont des paramètres maîtrisés par le robot pour garantir la hauteur de la couche et son remplissage correct.

En cas de mauvais contrôle de ces paramètres :

- si S_c n'est pas correct, c'est-à-dire si H n'est pas correct (car D est imposé par le diamètre de la buse), alors la forme et la tenue des couches les unes sur les autres n'est pas garantie ;
- si V_e et V_r ne sont pas maîtrisés, il y aura soit des bourrelets (trop de volume déposé), soit des ruptures ou amincissement de cordon (pas assez de volume déposé).

Question 1.5 Déterminer la pression maximale p dans une couche de pâte cimentaire de densité ρ ; en déduire la hauteur maximale de cette couche.

La pression maximale apparaît en bas de la couche, du fait de la gravité. D'après la relation de statique des fluides et pour respecter la limite de cisaillement, il faut assurer :

$$p_{\max} = \rho g H < \sqrt{3} \tau_s^0 \Rightarrow H < \frac{\sqrt{3} \tau_s^0}{\rho g}$$

Question 1.6 Calculer le temps T_n nécessaire pour commencer la couche n . En déduire la hauteur maximale $H_{\max}$ atteignable avant que la pâte cimentaire ne s'écoule et que le mur s'écroule sous son propre poids.

La couche n ne peut commencer que si les contraintes de pression qu'elle va engendrer dans les $(n-1)$ couches précédentes respectent la limite de cisaillement. Sachant que chaque couche i a débuté au temps T_i et que la partie inférieure de la couche i va devoir supporter le poids de $n-i+1$ couches, la limite de cisaillement est respectée si :

$$p_{\max} = \rho g (n-i+1) H < \sqrt{3} [\tau_s^0 + A(T_n - T_i)]$$

Donc le temps T_n doit respecter les conditions de cisaillement pour toutes les couches inférieures, soit :

$$\forall i \in \llbracket 1; n-1 \rrbracket, \quad T_n > T_i + \frac{1}{A} \left(\frac{\rho g (n-i+1) H}{\sqrt{3}} - \tau_s^0 \right)$$

Sans hypothèses complémentaires, il n'y a pas de simplification évidente.

En supposant que l'intervalle ΔT_n entre deux couches est constant ($T_n - T_{n-1} = \Delta T_n$), alors il est possible de ne s'occuper que de la première couche (chaque couche intermédiaire i étant soumise à la même condition de cisaillement que la 1ère couche vis-à-vis de la $(n-i)$ ème couche déposée). La condition à respecter est alors pour la 1ère couche :

$$p_{\max} = \rho g n H < \sqrt{3} [\tau_s^0 + A(T_n - 0)] \Rightarrow T_n > \frac{1}{A} (\rho g n H - \sqrt{3} \tau_s^0)$$

En supposant enfin que la hauteur des couches est choisie à sa valeur maximale admissible calculée à la question précédente, $H = \frac{\sqrt{3} \tau_s^0}{\rho g}$, alors l'expression se simplifie :

$$T_n > \frac{1}{A} \rho g (n-1) H \Rightarrow \Delta T_n = T_n - T_{n-1} = \frac{\rho g H}{A}$$

La première couche ($n = 1$) étant posée à $T_1 = 0$, la seconde à $T_2 = \Delta T_n$, le temps nécessaire pour poser la n ème couche sera de $T_n = (n - 1)\Delta T_n = (n - 1)\frac{\rho g H}{A}$.

Remarque : Le sujet indique entre guillemets que la pâte « sèche » pour ne pas avoir à développer cette notion intuitive dans le cadre du sujet. Mais il peut être intéressant pour la culture générale scientifique de noter que le ciment ne sèche pas (la prise ne dépend pas de l'évaporation de l'eau comme dans les briques en terre crue par exemple), mais fait l'objet d'une réaction chimique acido-basique. En toute rigueur, il aurait fallu dire que le ciment « prend ». Il est d'ailleurs possible de faire prendre du béton sous l'eau !

Question 1.7 En isolant un tronçon d'altitude supérieure à z_P , montrer que l'expression du moment du poids de la partie supérieure à cette coupe sur la partie inférieure en P est :

$$M_P(z_P) = \int_{z_P}^L \rho g b (v(s) - v(z_P)) ds$$

Le paramétrage ne permet pas de déterminer le signe du moment. La résolution se fera donc indépendamment du signe.

Le paramètre ρ n'est pas défini mais d'après la réponse fournie, il s'agit de la masse volumique. Attention, le sujet considère une portion de mur de largeur 1 m, ce qui peut perturber les vérifications d'homogénéité des expressions obtenues.

Le moment élémentaire en P du poids sur une tranche ds de la poutre (figure 2) s'écrit comme le produit de la force ($\rho g b ds$, en considérant la largeur de 1 m) par le bras de levier ($v(s) - v(z_P)$), soit en intégrant le moment élémentaire sur le tronçon de z_P à L :

$$M_P(z_P) = \int_{z_P}^L (v(s) - v(z_P)) \times \rho g b ds$$

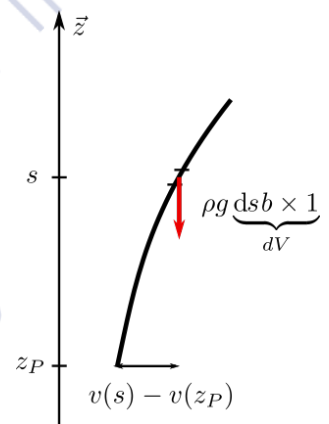


FIGURE 2 – Paramétrage du problème de flambement.

Question 1.8 Montrer que la courbure γ de la courbe $v(z)$ prend la forme $\gamma = v''$ si $V'' \ll 1$ (rotation petite).

La courbure est définie par $\gamma(z) = \frac{v''(z)}{(1 + v'^2(z))^{3/2}}$. En considérant $v'(z) \ll 1$, l'expression approchée est bien $\gamma(z) = v''(z)$.

Question 1.9 En déduire que l'équation régissant le flambage s'écrit :

$$EI v''' + \rho g b (L - z) v' = 0$$

La proportionnalité exprimée par le sujet s'écrit : $M_P(z_P) = EI \gamma(z_P)$. En utilisant les résultats des questions précédentes, on obtient :

$$\int_{z_P}^L (v(s) - v(z_P)) \times \rho g b ds = EI v''(z_P)$$

En dérivant cette expression par rapport à la variable z_P :

$$\Leftrightarrow \frac{d}{dz_P} \int_L^{z_P} \rho g b (v(z_P) - v(s)) ds = EI v'''(z_P)$$

$$\Leftrightarrow \frac{d}{dz_P} \int_L^{z_P} v(z_P) ds - \frac{d}{dz_P} \int_L^{z_P} v(s) ds = \frac{EI}{\rho g b} v'''(z_P)$$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow \frac{d}{dz_P} [v(z_P)s]_L^{z_P} - v(z_P) = \frac{EI}{\rho g b} v'''(z_P) \\
&\Leftrightarrow \frac{d}{dz_P} (v(z_P)z_P - v(z_P)L) - v(z_P) = \frac{EI}{\rho g b} v'''(z_P) \\
&\Leftrightarrow ((v'(z_P)z_P + v(z_P)) - Lv'(z_P)) - v(z_P) = \frac{EI}{\rho g b} v'''(z_P) \\
&\Leftrightarrow v'(z_P)(z_P - L) = \frac{EI}{\rho g b} v'''(z_P)
\end{aligned}$$

L'équation de flambage s'écrit donc sous la forme :

$$EIv''' + \rho g b(L - z)v' = 0$$

ce qui correspond presque à la forme proposée par l'énoncé pour $h = L$ car il manque b (il est peu probable que b , la largeur du mur, soit égale à 1 m).

Question 1.10 Identifier, en justifiant, la correspondance entre les zones A, B, C et les modes évoqués aux questions 1.5 (écroulement d'une couche sous son propre poids), 1.6 (écroulement de couches superposées) et 1.9 (flambage). La couleur bleue représente la faisabilité de l'impression.

- La zone A correspond à la contrainte limite dans une unique couche de pâte (tenue de la couche déposée), déterminée à la question 1.5 ;
- la zone B correspond à la contrainte limite dans les couches inférieures (tenue des couches inférieures) déterminée à la question 1.6 ;
- la zone C correspond à la limite de flambage du mur, déterminé à la question 1.9.

Remarque : la contrainte de flambage semble difficile à interpréter vis-à-vis de la zone bleue car elle ne semble pas limiter particulièrement la faisabilité de l'impression.

Question 1.11 Donner l'intérêt majeur d'une pompe péristaltique, à la vue des contraintes de fonctionnement du système d'impression 3D. Citer deux autres avantages, ainsi que deux inconvénients, d'une telle conception de pompe.

Il s'agit d'une pompe volumétrique, ce qui permet de bien contrôler le débit de la buse.

Deux autres avantages :

- aucun élément mobile du mécanisme de la pompe n'est en contact avec le béton, ce qui améliore la durée de vie et simplifie la maintenance et l'entretien ;
- la pompe est étanche quand le moteur est à l'arrêt.

Inconvénients :

- le tube déformable présente une durée de vie limitée ;
- il peut apparaître de la cavitation, auquel cas le contrôle du débit est compromis ;
- le rendement de ce type de pompe est faible.

Question 1.12 Indiquer la grandeur de conception qui joue, à diamètre D_p et vitesse de rotation ω_p (en rad/s) imposés du porte-galets, sur le débit d'une pompe péristaltique. Donner alors l'expression de ce débit.

En supposant que D_p est le diamètre intérieur du tube flexible, que R est le rayon du porte galet, c'est-à-dire le rayon moyen d'enroulement du tube, et en négligeant le volume des zones écrasées, on peut déterminer le

volume déplacé pour un tour de l'arbre par le produit du périmètre du cercle décrit par le tuyau, par la section du tuyau :

$$V_{1\text{tr}} = 2\pi R \times \frac{\pi D_p^2}{4}$$

On en déduit le débit Q de la pompe en fonction de la vitesse de rotation ω_p de l'arbre comme le volume déplacé pour 1 tour divisé par le temps nécessaire pour 1 tour :

$$Q = \frac{V_{1\text{tr}}}{2\pi/\omega_p} = 2\pi R \frac{\pi D_p^2}{4} \times \frac{\omega_p}{2\pi} = \frac{\pi R D_p^2}{4} \omega_p$$

Question 1.13 Quel est l'intérêt de mélanger l'adjuvant au plus proche de la buse de dépose ?

L'intérêt est d'éviter que le béton ne réagisse dans les tuyaux durant les phase d'arrêt de l'impression.

Partie 2 : Analyse statique du robot

Question 2.1 Proposer un graphe de liaisons du robot et de sa tête d'impression. Faire apparaître les actions mécaniques extérieures sur chacune des pièces. Le modèle est-il isostatique ?

Le graphe des liaisons est donné figure 3. Le modèle étant une chaîne ouverte, il n'y a aucune boucle donc il ne peut pas être hyperstatique. Le modèle est donc nécessairement isostatique.

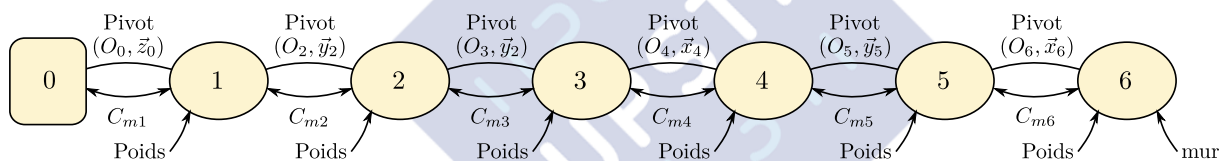


FIGURE 3 – Graphe des liaisons du robot.

Question 2.2 Calculer les ordres de grandeur des couples disponibles en sortie sur les axes.

Le couple disponible en sortie (de réducteur) est le produit du couple moteur par le rapport de réduction, soit :

$$C_{m1\text{maxi}} = 14 \times 191 \simeq 30\,000 \text{ N} \cdot \text{m} \quad C_{m2\text{maxi}} = 9 \times 243 \simeq 2200 \text{ N} \cdot \text{m} \quad C_{m3\text{maxi}} = 9 \times 201 \simeq 1800 \text{ N} \cdot \text{m}$$

$$C_{m4\text{maxi}} = 12 \times ?? \quad C_{m5\text{maxi}} = 12 \times 48 \simeq 580 \text{ N} \cdot \text{m} \quad C_{m6\text{maxi}} = 4 \times 81 \simeq 324 \text{ N} \cdot \text{m}$$

Question 2.3 Sur le diagramme « Capacité de charges » donné dans l'Annexe D, pour une charge de 100 kg, justifier les valeurs maximales de Z et L . Pour cela, vous poserez proprement les modèles utilisés.

La capacité de charge à l'extrémité du robot va (entre autres) dépendre des couples moteurs maximaux des axes 5 et 6. La figure 4 propose un paramétrage dans la situation la plus défavorable pour les couples C_{m5} et C_{m6} , avec $(\vec{x}_6, \vec{y}_6)$ dans le plan horizontal.

Il faut noter que le paramétrage utilisé pour caractériser la capacité de charge dans l'annexe D ne correspond pas au paramétrage de l'annexe C. La longueur Z est mesurée suivant $\vec{x}_6$ et la longueur L est mesurée suivant $\vec{y}_6$.

Le couple maximal de l'axe 6 vaut $4 \times 81 = 324 \text{ N} \cdot \text{m}$. Le produit de la charge par le bras de levier conduit à (en considérant une masse de 100 kg) :

$$C_{m6} = mgL = 1000 \times L < 4 \times 81 \Rightarrow L < 0,324 \text{ m}$$

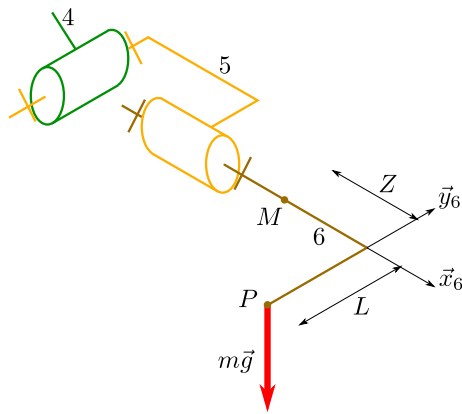


FIGURE 4 – Modèle simplifié.

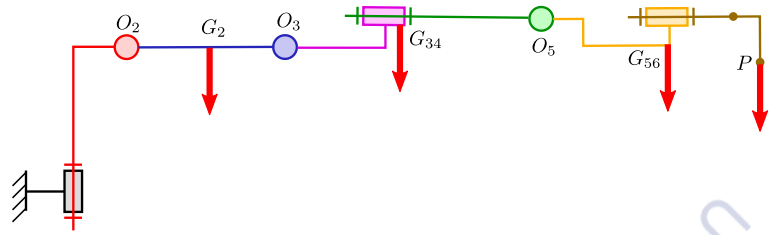


FIGURE 5 – Situation défavorable.

Sur le diagramme des capacités de charge, la valeur maximal lue pour L est de 0,37 m, ce qui est à peu près conforme à la valeur obtenue (15% d'écart).

Le couple maximal de l'axe 5 vaut $12 \times 48 \simeq 580 \text{ N} \cdot \text{m}$. Le produit de la charge par le bras de levier conduit à (en considérant une masse de 100 kg) :

$$C_{m5} = mg[Z + \underbrace{(a_5 + a_M)}_{200 \text{ mm}}] = 1000 \times (Z + 0,2) < 12 \times 48 \Rightarrow Z < 0,58 - 0,2 = 0,38 \text{ m}$$

Sur le diagramme des capacités de charge, la valeur maximal lue pour Z est de 0,5 m, ce qui est tout de même un peu différent de la valeur calculée (30% d'écart).

Question 2.4 Proposer la configuration la plus défavorable pour le dimensionnement en position statique sous forme d'un schéma. Déterminer alors l'expression du couple C_2 en sortie du moto-réducteur de la liaison L2 en fonction des masses des différents constituants (dont celle de la tête d'impression) et des paramètres géométriques adaptés. Ces paramètres apparaîtront sur le schéma proposé.

La configuration la plus défavorable est illustrée sur la figure 5. Le couple moteur s'écrit alors :

$$C_{m2} = z_{G2}m_2g + (c_2 + x_{G34})m_{34}g + (c_2 + a_3 + a_4 + x_{G34})m_{56}g + (c_2 + a_3 + a_4 + x_{Gtete})m_{tete}g$$

Question 2.5 Faire les applications numériques et vérifier que le moteur de l'axe 2 est capable d'assurer cette charge.

Application numérique :

$$\begin{aligned} C_{2m} &= 0,418 \times 117 \times 10 + (0,975 + 0,210) \times 246 \times 10 + (0,975 + 0,887 + 0,100) \times 55 \times 10 \\ &\quad + (0,975 + 0,887 + 0,370) \times 50 \times 10 \\ &\simeq 500 + 3000 + 1100 + 600 \simeq 5200 \text{ N} \cdot \text{m} > 2200 \text{ N} \cdot \text{m} \end{aligned}$$

Le moteur 2 n'est pas capable d'assurer cette charge dans cette position extrême.

Question 2.6 Calculer l'hyperstatisme du modèle du système. Indiquer l'intérêt d'une configuration avec 3 satellites répartis à 120 degrés, comme indiqué sur la Figure 8.

En modélisant le contact entre dents par une liaison ponctuelle, il n'y a alors aucune contrainte de montage pour un unique satellite ($h = 0$), puis une contrainte de montage à chaque satellite supplémentaire. Soit pour 3 satellites, $h = 2$.

Une démonstration plus complète consiste à faire le calcul classique (cinématique ; voir figure 6) :

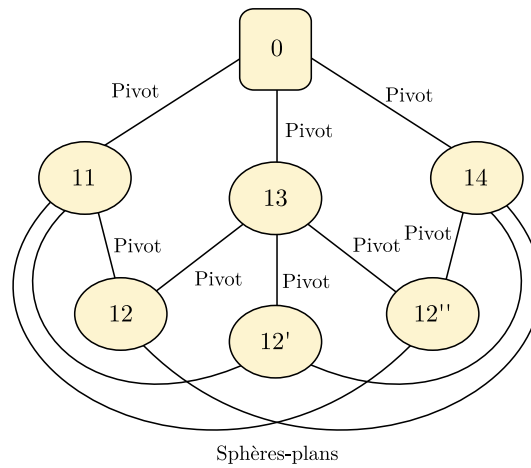


FIGURE 6 – Graphe de structure du train épicycloïdal.

- Nombre de boucles $\gamma = L - S + 1 = 12 - 7 + 1 = 6$;
- Mobilités $m = 2$ (classique pour un train épicycloïdal) ;
- Inconnues cinématiques $I_c = \underbrace{6 \times 1}_{\text{pivot}} + \underbrace{(3 \times 2) \times 5}_{\text{ponctuelle}} = 6 + 30 = 36$ inconnues.

D'où $h = 6\gamma - I_c + m = 6 \times 6 - 36 + 2 = 2$.

L'intérêt d'avoir 3 satellites plutôt qu'un seul est de pouvoir transmettre plus de couple (les dents supportent de l'ordre de 3 fois moins d'efforts) et d'équilibrer les charges radiales sur les planétaires intérieurs et extérieurs.

Question 2.7 Après avoir écrit les conditions de roulement sans glissement aux contacts entre les pièces 11, 12 et 14, déterminer le rapport de réduction $R = \omega_{13/0}/\omega_{11/0}$ du dispositif en fonction des nombres de dents Z_i de chaque pièce i .

Les roulements sans glissement aux contacts engrenants permettent d'écrire la relation des trains d'engrenages par rapport au satellite 13 (les axes étant fixes par rapport à 13) :

$$\frac{\omega_{14/13}}{\omega_{11/13}} = (-1)^1 \frac{Z_{11}Z_{12}}{Z_{12}Z_{14}} \quad \frac{\omega_{14/0} - \omega_{13/0}}{\omega_{11/0} - \omega_{13/0}} = -\frac{Z_{11}}{Z_{14}}$$

$$\omega_{13/0} \left(1 + \frac{Z_{11}}{Z_{14}}\right) = \frac{Z_{11}}{Z_{14}} \omega_{11/0} \quad R = \frac{\omega_{13/0}}{\omega_{11/0}} = \frac{Z_{11}}{Z_{11} + Z_{14}}$$

Question 2.8 Considérons ici la liaison appui-plan seule (contact unilatéral) entre le socle du robot et le sol. Proposer un schéma permettant de décrire la configuration limite où le robot ne bascule pas, en faisant figurer la réaction de l'appui-plan ainsi que le poids du robot.

En notant G_{robot} le centre de gravité du robot et A le point extrémité de l'appui-plan, la figure 7 montre la configuration limite de basculement.

Question 2.9 Énoncer rigoureusement le modèle de frottement de Coulomb.

Lois de Coulomb pour le contact en I entre deux solides 1 et 2 :

- En phase d'adhérence : $\begin{cases} \vec{V}_{I,2/1} = \vec{0} \\ \|\vec{T}_{1 \rightarrow 2}\| \leq f \|\vec{N}_{1 \rightarrow 2}\| \end{cases}$

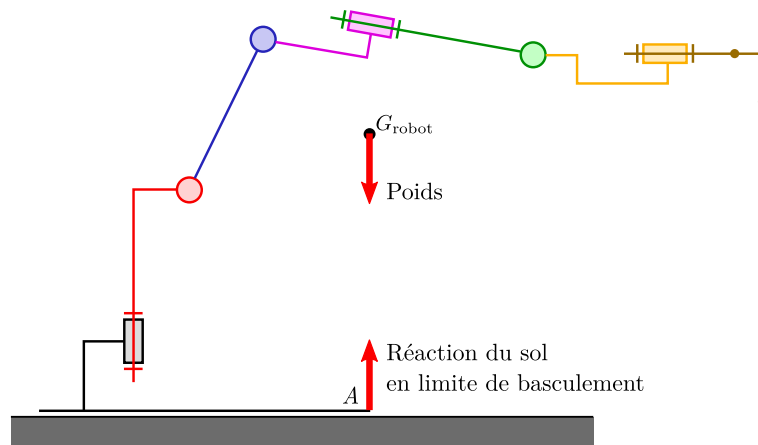


FIGURE 7 – Limite de basculement.

- En phase de glissement :
$$\begin{cases} \|\vec{T}_{1 \rightarrow 2}\| = f \|\vec{N}_{1 \rightarrow 2}\| \\ \vec{T}_{1 \rightarrow 2} \cdot \vec{V}_{I,2/1} < 0 \\ \vec{T}_{1 \rightarrow 2} \wedge \vec{V}_{I,2/1} = \vec{0} \end{cases}$$

Question 2.10 En faisant l'hypothèse qu'une liaison boulonnée peut être représentée par deux liaisons rotule (boulon/bâti, boulon/sol, cf. Figure 9), calculer le degré d'hyperstatisme de la liaison encastrement entre le sol et le robot. Commenter les solutions constructives à mettre en place.

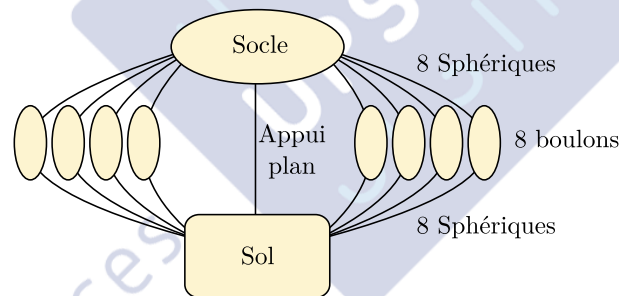


FIGURE 8 – Graphe de structure liaison boulonnée.

La figure 8 propose un graphe de structure du modèle considéré. Le calcul d'hyperstaticité conduit à :

- nombre de boucles : $\gamma = 8$;
- mobilités : $m_u = 3$ localement et $m_i = 8$ (rotation des boulons sur eux-mêmes) ;
- Inconnues cinématiques de l'appui-plan et des sphériques : $I_c = 3 + 2 \times 8 \times 3 = 51$.

D'où le coefficient d'hyperstaticité : $h = 6\gamma - I_c + m = 6 \times 8 - 51 + (3 + 8) = 8$.

Il n'y a aucune solution constructive particulière à prévoir car les boulons sont serrés à volonté lors du montage.

Question 2.11 Sur le document réponse DR1, proposer une répartition des efforts (un par boulon) transmis par frottement permettant de reprendre un couple porté par l'axe vertical. Quelle hypothèse faut-il faire pour pouvoir calculer les actions mécaniques sur chaque boulon ?

La figure 9 propose une répartition des efforts transmis par frottement dessinées dans un plan horizontal : les actions tangentielles de frottement s'opposent à un glissement éventuel. Le mouvement en cas de glissement est une rotation autour de l'axe de lacet, ce qui conduirait à des vitesses orthoradiales au niveau des boulons, d'où une répartition des actions tangentielles orthoradiales elles aussi (opposées aux vitesses de glissement).

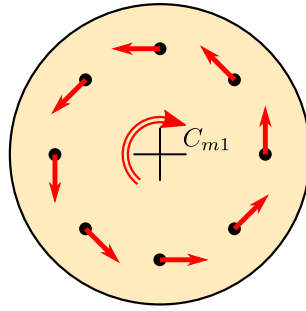


FIGURE 9 – Répartition des efforts transmis par frottement.

Pour les hypothèses à formuler pour « calculer les actions mécaniques sur chaque boulon », on peut se demander si le sujet évoque l'action normale à la table transmise par chaque boulon (auquel cas l'action mécanique dépend directement du serrage de chaque boulon) ou, plus probablement, l'action tangentielle transmise par l'appui-plan au voisinage de chaque boulon, auquel cas on peut supposer qu'un serrage identique de chaque boulon conduirait à un effort tangentiel de même norme pour chaque boulon.

Question 2.12 La documentation constructeur indique qu'une inclinaison de 15° est possible entre le socle et le sol si la charge maximale (masse en bout de bras) supportée par le robot est réduite. Donner la forme de la relation entre la charge maximale et l'inclinaison.

Cette question très ouverte nécessite de faire quelques hypothèses sur le résultat attendu et le modèle à utiliser. Nous supposons que le couple maximal du motoréducteur de l'axe 1 C_{m1} est celui donné dans le tableau, soit $C_{m1} = 14 \times 191 \simeq 2650 \text{ N} \cdot \text{m}$ (ou encore $2674 \text{ N} \cdot \text{m}$ à la calculatrice), et que la question vise à déterminer la masse maximale de la charge en fonction de l'angle α d'inclinaison du socle.

Pour cela, un modèle simplifié est adopté figure 10, où l'axe $\vec{z}_1$ de la pivot 0-1 est incliné d'un angle α par rapport à la verticale suivant $\vec{z}_0$, et où le robot est tendu au maximum dans la direction $\vec{y}_0$, la charge étant alors en M à une distance L de l'axe $(O_0, \vec{z}_1)$. On ne considère que la masse m de la charge, ce qui revient à négliger la masse des bras du robot ; cette hypothèse est probablement la plus forte car le robot pèse 900 kg, pour une charge maximale de 150 kg, mais dans le cadre de cette question il serait peu judicieux d'envisager un modèle très complexe.

Sous ces hypothèses, en isolant la charge et l'ensemble des bras du robot, et en appliquant un théorème du moment statique suivant l'axe $(O_0, \vec{z}_1)$ de la pivot, on obtient l'action du couple du motoréducteur :

$$\begin{aligned} 0 + C_{m1} + \vec{M}_{O_0, \text{poids} \rightarrow \text{charge}} \cdot \vec{z}_1 &= 0 \\ \Rightarrow C_{m1} &= -\vec{M}_{O_0, \text{poids} \rightarrow \text{charge}} \cdot \vec{z}_1 \\ &= (\vec{0} + \vec{O_0 M} \wedge (-mg\vec{z}_0)) \cdot \vec{z}_1 \\ &= -Lmg\vec{x}_0 \cdot \vec{z}_1 = -Lmg \sin \alpha \end{aligned}$$

En laissant la convention de signe à part, la relation entre la charge maximale m et l'inclinaison α s'écrit ainsi :

$$m = \frac{C_{m1}}{Lg \sin \alpha}$$

L'annexe B indique que la portée maximale du robot vaut $L = 2,2 \text{ m}$ et indique une charge utile pouvant aller jusqu'à 150 kg.

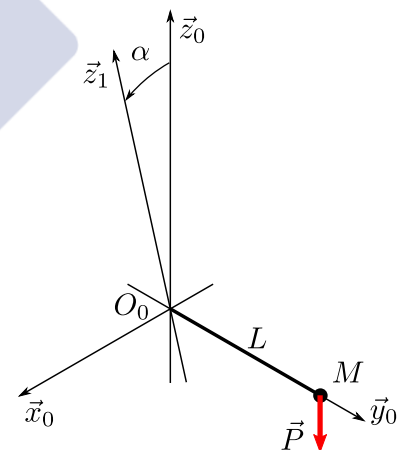


FIGURE 10 – Modèle simplifié.

Pour une inclinaison maximale de $\alpha = 15^\circ$, la masse maximale transportable (sous les hypothèses formulées) serait de :

$$m = \frac{14 \times 191}{2,2 \times 10 \times \sin 15^\circ} \simeq \frac{2650}{22 \times 0,25} \simeq 500 \text{ kg} \quad (\simeq 470 \text{ kg à la calculatrice})$$

Cette valeur est supérieure aux 150 kg de charge utile maximale indiquée, ce qui conduit à dire qu'il faudrait prendre en compte la masse des bras du robot pour obtenir un résultat reflétant les indications de la documentation constructeur...

Question 2.13 Estimer la force ainsi que le couple transmissible par la liaison encastrement. Commenter ce dimensionnement.

La force normale F_N est, en négligeant le frottement, proportionnelle au couple de serrage C . La relation dépend du pas :

$$C = \frac{p}{2\pi} F_N \Rightarrow F_N = \frac{2\pi}{p} C = \frac{2\pi}{3 \text{ mm}} \times 725 \text{ N} \cdot \text{m} \simeq \frac{6}{3 \times 10^{-3}} 175 \simeq 1500 \text{ kN}$$

En considérant une répartition des boulons sur un cercle de rayon 0,4 m, un coefficient de frottement pour un contact acier-acier de l'ordre de $f = 0,1$ et $F_T = f F_N$ on trouve :

$$C_{\text{transmissible}} = 0,4 \times 8 \times f F_N \simeq 500 \text{ kN} \cdot \text{m} > 30 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

Partie 3 : Étude cinématique et dynamique du robot

Question 3.1 Écrire le vecteur position du point P par rapport au référentiel du socle 0, ainsi que la matrice de rotation $R_{6/0}$ reliant les bases $(\vec{x}_6, \vec{y}_6, \vec{z}_6)$ et $(\vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$, en fonction des données géométriques et des variables angulaires. Cette dernière matrice, qui caractérise l'orientation angulaire de la tête d'impression, sera exprimée comme une combinaison de matrices de rotation élémentaires à définir.

Le vecteur position s'écrit :

$$\overrightarrow{O_0 P} = \overrightarrow{O_0 O_2} + \overrightarrow{O_2 O_3} + \overrightarrow{O_3 O_4} + \overrightarrow{O_4 O_5} + \overrightarrow{O_5 O_6} + \overrightarrow{O_6 P} = (a_1 \vec{x}_1 + c_1 \vec{z}_1) + c_2 \vec{z}_2 + (a_3 \vec{x}_3 + c_3 \vec{z}_3) + a_4 \vec{x}_4 + a_5 \vec{x}_5 + (a_P \vec{x}_6 - c_P \vec{z}_6)$$

Les matrices de changement de base s'écrivent pour chaque rotation élémentaire :

$$R_{01} = \begin{pmatrix} \cos \theta_1 & -\sin \theta_1 & 0 \\ \sin \theta_1 & \cos \theta_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}_{B_0} \quad \text{tel que } [\vec{U}]_{B_0} = R_{01} [\vec{U}]_{B_1}$$

$$R_{13} = \begin{pmatrix} \cos(\theta_2 + \theta_3) & 0 & \sin(\theta_2 + \theta_3) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(\theta_2 + \theta_3) & 0 & \cos(\theta_2 + \theta_3) \end{pmatrix}_{B_1} \quad \text{tel que } [\vec{U}]_{B_1} = R_{13} [\vec{U}]_{B_3}$$

$$R_{34} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta_4 & -\sin \theta_4 \\ 0 & \sin \theta_4 & \cos \theta_4 \end{pmatrix}_{B_3} \quad \text{tel que } [\vec{U}]_{B_3} = R_{34} [\vec{U}]_{B_4}$$

$$R_{45} = \begin{pmatrix} \cos \theta_5 & 0 & \sin \theta_5 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \theta_5 & 0 & \cos \theta_5 \end{pmatrix}_{B_4} \quad \text{tel que } [\vec{U}]_{B_4} = R_{45} [\vec{U}]_{B_5}$$

$$R_{56} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta_6 & -\sin \theta_6 \\ 0 & \sin \theta_6 & \cos \theta_6 \end{pmatrix}_{B_5} \quad \text{tel que } [\vec{U}]_{B_5} = R_{56}[\vec{U}]_{B_6}$$

D'où la matrice de changement de base entre la base 6 et la base 0 (attention le produit matriciel n'est pas commutatif) :

$$R_{06} = R_{01}R_{13}R_{34}R_{45}R_{56} \quad \text{tel que } [\vec{U}]_{B_0} = R_{06}[\vec{U}]_{B_6}$$

Question 3.2 Déterminer la précision angulaire de rotation de l'axe 2, et calculer la précision de déplacement correspondante au niveau de la buse, dans la configuration la plus défavorable à indiquer. Conclure vis-à-vis de l'exigence de précision du cahier des charges.

Le codeur mesure information codée sur 10 bits et permet ainsi de définir $2^{10} = 1024$ positions distinctes sur 1 tour de l'arbre moteur.

Le réducteur de rapport $r = 1/243$ conduit à 243 tours de moteur pour 1 tour d'arbre, soit 243×1024 tops codeurs par tour d'arbre du réducteur.

La résolution angulaire sur l'arbre du réducteur vaut donc :

$$\frac{360^\circ}{243 \times 1024} \simeq 1 \times 10^{-3}^\circ \quad \text{sans calculatrice, et } 1,45 \times 10^{-3}^\circ = 5,2'' \text{ avec calculatrice}$$

En considérant la portée de $L = 2,2\text{ m}$ indiquée dans l'annexe B, cette résolution angulaire conduit à une précision de déplacement au niveau de la buse de :

$$L \times \Delta\theta \simeq 2,2 \times 1 \times 10^{-3} \circ \frac{\pi}{180^\circ} \simeq 0,04 \text{ mm}$$

ce qui semble conforme à la répétabilité annoncée dans l'annexe B de $\pm 0,03 \text{ mm}$.

Il n'y a aucun cahier des charges dans le sujet sur lequel conclure. Mais une précision de l'ordre du centième de millimètre semble *a priori* largement suffisante pour déposer la couche de béton dont la largeur et l'épaisseur sont de l'ordre du centimètre.

Question 3.3 Déterminer les composantes du torseur cinématique $\{\mathcal{V}_{6/0}\}$ exprimé au point P , en fonction des données géométriques, des variables angulaires θ_i et de leurs dérivées temporelles $\dot{\theta}_i$. L'écriture la plus simple sera privilégiée.

Le torseur cinématique s'écrit par composition des mouvements :

$$\begin{aligned} \{\mathcal{V}_{6/0}\} &= \{\mathcal{V}_{6/5}\} + \{\mathcal{V}_{5/4}\} + \{\mathcal{V}_{4/3}\} + \{\mathcal{V}_{3/2}\} + \{\mathcal{V}_{2/1}\} + \{\mathcal{V}_{1/0}\} \\ \{\mathcal{V}_{6/0}\} &= \begin{matrix} O_6 \end{matrix} \begin{Bmatrix} \dot{\theta}_6 \vec{x}_6 \\ \vec{0} \end{Bmatrix} + \begin{matrix} O_5 \end{matrix} \begin{Bmatrix} \dot{\theta}_5 \vec{y}_5 \\ \vec{0} \end{Bmatrix} + \begin{matrix} O_5 \end{matrix} \begin{Bmatrix} \dot{\theta}_4 \vec{x}_4 \\ \vec{0} \end{Bmatrix} + \begin{matrix} O_3 \end{matrix} \begin{Bmatrix} \dot{\theta}_3 \vec{y}_3 \\ \vec{0} \end{Bmatrix} + \begin{matrix} O_2 \end{matrix} \begin{Bmatrix} \dot{\theta}_2 \vec{y}_3 \\ \vec{0} \end{Bmatrix} + \begin{matrix} O_1 \end{matrix} \begin{Bmatrix} \dot{\theta}_1 \vec{z}_1 \\ \vec{0} \end{Bmatrix} \end{aligned}$$

La vitesse de rotation est simple à calculer :

$$\vec{\Omega}_{6/0} = \dot{\theta}_6 \vec{x}_6 + \dot{\theta}_5 \vec{y}_5 + \dot{\theta}_4 \vec{x}_4 + \dot{\theta}_3 \vec{y}_3 + \dot{\theta}_2 \vec{y}_3 + \dot{\theta}_1 \vec{z}_1$$

Pour le calcul de la vitesse, la réduction en P de chaque torseur conduit à :

$$\vec{V}_{P,6/5} = \vec{0} + \dot{\theta}_6 \vec{x}_6 \wedge \overrightarrow{O_6 P} = \dot{\theta}_6 \vec{x}_6 \wedge (a_P \vec{x}_6 - c_P \vec{z}_6) = c_P \dot{\theta}_6 \vec{y}_6$$

$$\vec{V}_{P,5/4} = \vec{0} + \dot{\theta}_5 \vec{y}_5 \wedge \overrightarrow{O_5 P} = \dot{\theta}_5 \vec{y}_5 \wedge (a_5 \vec{x}_5 + a_P \vec{x}_6 - c_P \vec{z}_6) = \dot{\theta}_5 (-(a_5 + a_P) \vec{z}_5 - c_P \cos \theta_6 \vec{x}_5)$$

$$\begin{aligned} \vec{V}_{P,4/3} &= \vec{0} + \dot{\theta}_4 \vec{x}_4 \wedge \overrightarrow{O_5 P} = \dot{\theta}_4 \vec{x}_4 \wedge (a_5 \vec{x}_5 + a_P \vec{x}_6 - c_P \vec{z}_6) \\ &= \dot{\theta}_4 (a_5 \sin \theta_5 + a_P \sin \theta_5 - c_P \vec{x}_4 \wedge (\cos \theta_6 \vec{z}_5 - \sin \theta_6 \vec{y}_5)) \\ &= \dot{\theta}_4 (a_5 \sin \theta_5 + a_P \sin \theta_5 - c_P (-\cos \theta_6 \cos \theta_5 \vec{y}_5 - \sin \theta_6 \vec{z}_4)) \end{aligned}$$

$$\vec{V}_{P,3/2} = \vec{0} + \dot{\theta}_3 \vec{y}_3 \wedge \overrightarrow{O_3 P} = \dot{\theta}_3 \vec{y}_3 \wedge (a_3 \vec{x}_3 + c_3 \vec{z}_3 + a_4 \vec{x}_4 + a_5 \vec{x}_5 + a_P \vec{x}_6 - c_P \vec{z}_6)$$

En calculant :

$$\begin{cases} \vec{y}_3 \wedge \vec{x}_5 = \vec{y}_3 \wedge (\cos \theta_5 \vec{x}_4 - \sin \theta_5 \vec{z}_4) = -\cos \theta_5 \vec{z}_3 - \sin \theta_5 \cos \theta_4 \vec{x}_4 \\ \vec{y}_3 \wedge \vec{z}_6 = (\cos \theta_4 \vec{y}_4 - \sin \theta_4 \vec{z}_4) \wedge (\cos \theta_6 \vec{z}_5 - \sin \theta_6 \vec{y}_5) = \cos \theta_4 \cos \theta_6 \vec{x}_5 - \sin \theta_4 \cos \theta_6 \sin \theta_5 \vec{y}_4 - \sin \theta_4 \sin \theta_6 \vec{x}_4 \end{cases}$$

On obtient :

$$\begin{aligned} \vec{V}_{P,3/2} &= \dot{\theta}_3 [-(a_3 + a_4) \vec{z}_3 + c_3 \vec{x}_3 + (a_5 + a_P)(-\cos \theta_5 \vec{z}_3 - \sin \theta_5 \cos \theta_4 \vec{x}_4) \\ &\quad - c_P (\cos \theta_4 \cos \theta_6 \vec{x}_5 - \sin \theta_4 \cos \theta_6 \sin \theta_5 \vec{y}_4 - \sin \theta_4 \sin \theta_6 \vec{x}_4)] \end{aligned}$$

$$\vec{V}_{P,2/1} = \vec{0} + \dot{\theta}_2 \vec{y}_2 \wedge \overrightarrow{O_2 P} = \dot{\theta}_2 \vec{y}_2 \wedge (c_2 \vec{z}_2 + a_3 \vec{x}_3 + c_3 \vec{z}_3 + a_4 \vec{x}_4 + a_5 \vec{x}_5 + a_P \vec{x}_6 - c_P \vec{z}_6)$$

En réutilisant le calcul de $\vec{V}_{P,3/2}$, on obtient :

$$\begin{aligned} \vec{V}_{P,2/1} &= \dot{\theta}_2 [c_2 \vec{x}_2 - (a_3 + a_4) \vec{z}_3 + c_3 \vec{x}_3 + (a_5 + a_P)(-\cos \theta_5 \vec{z}_3 - \sin \theta_5 \cos \theta_4 \vec{x}_4) \\ &\quad - c_P (\cos \theta_4 \cos \theta_6 \vec{x}_5 - \sin \theta_4 \cos \theta_6 \sin \theta_5 \vec{y}_4 - \sin \theta_4 \sin \theta_6 \vec{x}_4)] \end{aligned}$$

$$\vec{V}_{P,1/0} = \vec{0} + \dot{\theta}_1 \vec{z}_1 \wedge \overrightarrow{O_1 P} = \dot{\theta}_1 \vec{z}_1 \wedge (a_1 \vec{x}_1 + c_1 \vec{z}_1 + c_2 \vec{z}_2 + a_3 \vec{x}_3 + c_3 \vec{z}_3 + a_4 \vec{x}_4 + a_5 \vec{x}_5 + a_P \vec{x}_6 - c_P \vec{z}_6)$$

En calculant les produits vectoriels suivant :

$$\begin{cases} \vec{z}_1 \wedge \vec{x}_5 = (\cos(\theta_2 + \theta_3) - \sin(\theta_2 + \theta_3) \vec{x}_3) \wedge (\cos \theta_5 \vec{x}_3 - \sin \theta_5 \vec{z}_4) \\ \quad = \cos(\theta_2 + \theta_3) \cos \theta_5 \vec{y}_3 - \cos(\theta_2 + \theta_3) \sin \theta_5 \sin \theta_4 \vec{x}_4 - \sin(\theta_2 + \theta_3) \sin \theta_5 \vec{y}_4 = \vec{A} \\ \vec{z}_1 \wedge \vec{z}_6 = (\cos(\theta_2 + \theta_3) \vec{z}_3 - \sin(\theta_2 + \theta_3) \vec{x}_3) \wedge (\cos \theta_6 (\cos \theta_5 \vec{z}_4 + \sin \theta_5 \vec{x}_4) - \sin \theta_6 \vec{y}_5) \\ \quad = \cos(\theta_2 + \theta_3) \cos \theta_6 \cos \theta_5 \sin \theta_4 \vec{x}_4 + \cos(\theta_2 + \theta_3) \cos \theta_6 \sin \theta_5 \vec{y}_3 + \cos(\theta_2 + \theta_3) \sin \theta_6 \cos \theta_4 \vec{x}_4 \\ \quad \quad + \sin(\theta_2 + \theta_3) \cos \theta_6 \cos \theta_5 \vec{y}_4 + \sin(\theta_2 + \theta_3) \sin \theta_6 \vec{z}_4 = \vec{B} \end{cases}$$

$$\vec{V}_{P,1/0} = \dot{\theta}_1 [a_1 \vec{y}_1 + c_2 \sin \theta_2 \vec{y}_2 + (a_3 + a_4) \cos(\theta_2 + \theta_3) \vec{y}_2 + c_3 \sin(\theta_2 + \theta_3) \vec{y}_2 + (a_5 + a_6) \vec{A} - c_P \vec{B}]$$

À noter que l'expression n'est pas unique car elle dépend des choix de projections lors des calculs vectoriels. Il aurait aussi été possible d'utiliser la dérivation du vecteur position pour ce calcul, sans qu'il ne faille espérer une résolution plus simple (les produits vectoriels à calculer sont identiques).

S'acharner sur une question aussi calculatoire le jour de l'épreuve est probablement une mauvaise idée. La plupart des candidats auront probablement amorcé le calcul sans le mener à son terme. Il semble d'ailleurs presque impossible pour un correcteur de vérifier rigoureusement tous les termes un éventuel résultat complet. Le rapport de jury précisera peut-être comment la méthode et les résultats intermédiaires étaient évalués sur cette question.

Question 3.4 Proposer un modèle de liaison équivalente pour l'ensemble de liaisons $\{L4+L5+L6\}$, permettant de modéliser la mobilité de l'effecteur (solidaire de l'organe terminal 6) par rapport à l'avant-bras 3.

Les trois liaisons L_4 , L_5 et L_6 sont trois liaisons pivots en série concourantes en un même point O_5 . Le torseur cinématique de la liaison équivalente est la somme des torseurs cinématiques de chaque liaison (association série). Si l'angle θ_5 n'est pas nul, les trois axes ne sont pas coplanaires si bien que les trois rotations autour de O_5 sont indépendantes : la liaison équivalente à l'association série est une liaison sphérique de centre O_5 .

Question 3.5 Donner l'expression en fonction de f de la matrice J telle que $\vec{X}_P = J(\vec{\Theta})\dot{\vec{\Theta}}$, qui relie les composantes du torseur cinématique $\{\mathcal{V}_{6/0}\}$ au point P et les dérivées temporelles $\dot{\theta}_i$ des variables articulaires.

La relation sur les vitesses s'obtient en dérivant la relation en position :

$$\vec{X}_P = \vec{f}(\vec{\Theta}) \Rightarrow \frac{d\vec{X}_P}{dt} = \frac{d\vec{f}}{d\vec{\Theta}}(\vec{\Theta}) \times \frac{d\vec{\Theta}}{dt}(t) = J(\vec{\Theta}) \times \dot{\vec{\Theta}}$$

avec : $J(\vec{\Theta}) = \frac{d\vec{f}}{d\vec{\Theta}}(\vec{\Theta})$ ou encore sous forme indicielle $[J]_{i,j} = \frac{\partial f_i}{\partial \theta_j} = f_{i,j}$

Question 3.6 Montrer de façon illustrative que le modèle géométrique inverse admet plusieurs solutions. Pour cela, on pourra considérer la modélisation simplifiée plane (dans le plan $(O_0, \vec{x}_0, \vec{z}_0)$) telle que $\theta_1 = \theta_4 = \theta_6 = 0^\circ$.

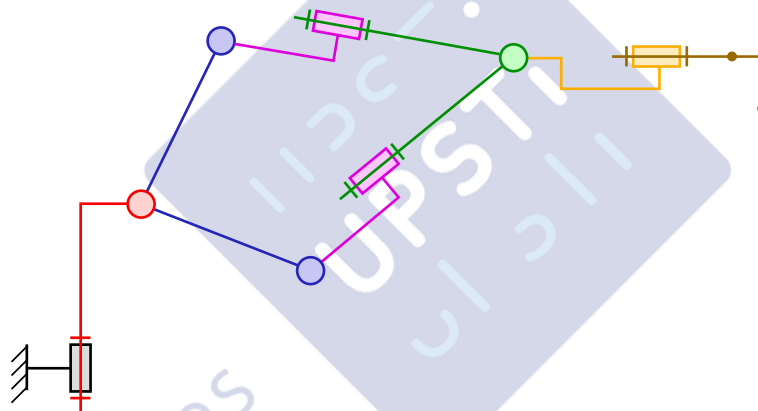


FIGURE 11 – Deux solutions pour le modèle géométrique inverse.

La figure 11 illustre deux configurations des angles articulaires aboutissant à la même position (en translation et en rotation). Le modèle géométrique inverse a donc dans ce cas au moins deux solutions.

Question 3.7 À partir du modèle 3D, identifier une configuration singulière. Proposer un dispositif ou une stratégie de commande permettant d'éviter en pratique les singularités.

Dans le cas où $\theta_5 = 0$, les rotations θ_4 et θ_6 conduisent au même mouvement du solide 6, et donc à la fois à une perte de mobilité du solide 6 et apparition d'une mobilité interne au robot. Il s'agit d'une configuration de singularité.

De même si $\theta_3 = 90^\circ$, on obtient une configuration de singularité.

Il faut éviter d'approcher les positions de singularité. Dans l'application considérée, le robot dispose de 6 axes tandis que l'orientation de la tête d'impression ne nécessite que 5 axes (la rotation de la buse suivant la normale au plan de dépose du béton est indifférent). Le robot dispose donc de 6 degrés de liberté pour 5 consignes.

Il existe donc une infinité de solutions pour atteindre une même position. Il est donc possible d'élaborer une commande privilégiant, parmi cette infinité de solution, la solution « la plus éloignée » des positions singulières.

Cela peut se faire « simplement » par minimisation d'une fonction coût intégrant une pénalité sur les positions singulières à éviter.

Question 3.8 Par écriture du modèle géométrique direct, donner les deux relations entre les angles θ_2 , θ_3 et θ_5 permettant d'assurer l'horizontalité de l'ensemble $\{5+6\}$ d'une part, et le positionnement de la buse d'impression (point P) à la hauteur H_t constante d'autre part.

Pour assurer l'horizontalité (angle nul) de l'ensemble $\{5+6\}$, la fermeture angulaire conduit à la relation :

$$\theta_2 + \theta_3 + \theta_5 = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{z}_1 = \vec{z}_6$$

Le positionnement de la buse d'impression (point P) à la hauteur H_t s'écrit mathématiquement par le produit scalaire $\vec{O_0P} \cdot \vec{z_0} = H_t$.

$$\begin{aligned} \vec{O_0P} \cdot \vec{z_0} &= (\vec{O_0O_2} + \vec{O_2O_3} + \vec{O_3O_4} + \vec{O_4O_5} + \vec{O_5O_6} + \vec{O_6P}) \cdot \vec{z_1} \\ &= c_1 + c_2 \cos \theta_2 - a_3 \sin(\theta_2 + \theta_3) + c_3 \cos(\theta_2 + \theta_3) - a_4 \sin(\theta_2 + \theta_3) - a_5 \sin(\underbrace{\theta_2 + \theta_3 + \theta_5}_{=0}) - c_p \end{aligned}$$

D'où la seconde relation :

$$H_t = c_1 + c_2 \cos \theta_2 - (a_3 + a_4) \sin(\theta_2 + \theta_3) + c_3 \cos(\theta_2 + \theta_3) - c_p$$

Question 3.9 Sur le document réponse DR2, représenter dans le plan $(O_0, \vec{x}_0, \vec{z}_0)$ la configuration du robot dans sa position initiale, correspondant au positionnement de la buse au niveau du point E (points P et E confondus). On respectera l'échelle indiquée.

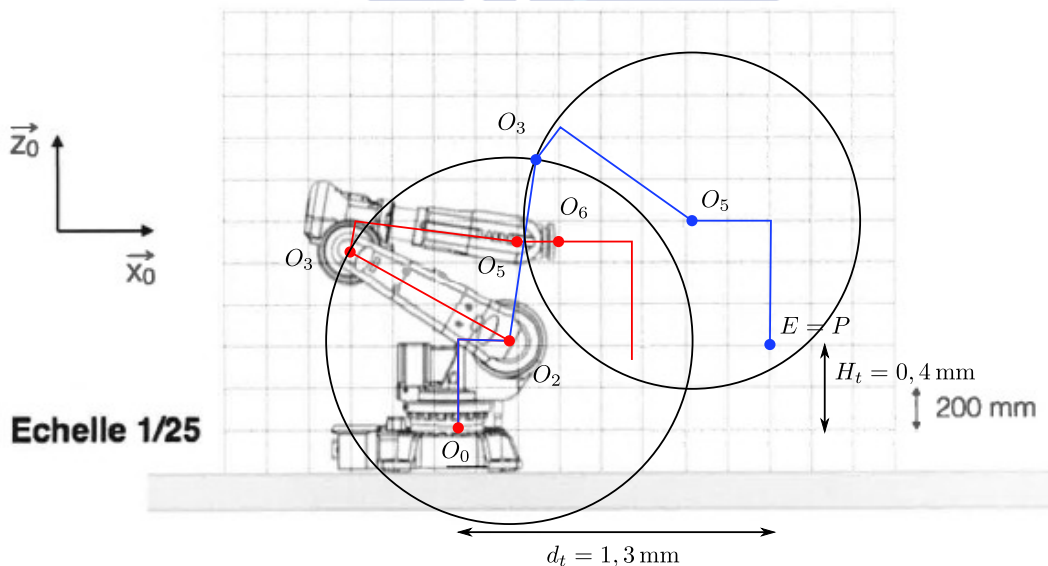


FIGURE 12 – Tracés du document réponse DR2.

Le tracé est donné figure 12. La localisation des points $O_0 = O_1$ et O_6 s'appuie sur celle donnée dans l'annexe B. Les coordonnées des points $P = E$ sont imposées (longueurs H_t et d_t).

La configuration initiale du robot est tracée en rouge tandis que la nouvelle configuration telle que $P = E$ est tracée en bleu.

L'annexe C donne les valeurs numériques des composantes du vecteur $\overrightarrow{O_5P} = 370\vec{x}_1 - 600\vec{z}_1$ en mm, ce qui permet de déterminer la nouvelle position du point O_5 .

Les longueurs O_2O_3 et O_3O_5 sont constantes si bien que la position du point O_3 se retrouve par intersection de deux arcs de cercle.

Question 3.10 Écrire le système de deux équations permettant de déterminer les angles θ_2 et θ_3 dans la configuration initiale ; on pourra introduire les grandeurs $D_1 = H_t + c_P - c_1$ et $D_2 = d_t - a_1 - a_5 - a_P$. Montrer qu'il aboutit à une relation de la forme $D_1 \cos \theta_2 + D_2 \sin \theta_2 = D_3$ et en déduire l'expression de θ_2 et θ_3 à partir des grandeurs géométriques connues et d'angles qu'on pourra introduire.

Par la relation de Chasles :

$$\overrightarrow{O_0O_2} + \overrightarrow{O_2O_3} + \overrightarrow{O_3O_4} + \overrightarrow{O_4O_5} + \overrightarrow{O_5O_6} + \overrightarrow{O_6P} = \overrightarrow{O_0P}$$

$$\Leftrightarrow a_1\vec{x}_1 + c_1\vec{z}_1 + c_2\vec{z}_2 + (a_3 + a_4)\vec{x}_3 + c_3\vec{z}_3 + (a_5 + a_P)\vec{x}_1 - c_P\vec{z}_1 = d_t\vec{x}_1 + H_t\vec{z}_1$$

Soit :

$$c_1\vec{z}_1 + (a_3 + a_4)\vec{x}_3 + c_3\vec{z}_3 = D_1\vec{z}_1 + D_2\vec{x}_1$$

Cette équation vectorielle dans le plan conduit à 2 équations scalaires pour 2 inconnues. L'équation proposée est une projection de l'équation vectorielle sur $\vec{z}_2$:

$$\underbrace{c_2 - (a_3 + a_4) \sin \theta_3 + c_3 \cos \theta_3}_{D_3} = D_1 \cos \theta_2 + D_2 \sin \theta_2$$

À noter que D_3 n'est pas une constante au cours du mouvement, ce qui est assez logique puisque θ_2 évolue au cours du mouvement tandis que D_1 et D_2 sont des constantes.

À ce stade, il est difficile de comprendre que qui est attendu car il n'est pas possible de « déduire » 2 paramètres angulaires θ_2 et θ_3 d'une unique équation scalaire. Pour résoudre tout de même le problème posé, nous allons repartir de l'équation de fermeture géométrique, mais projetée sur la base B_1 pour pouvoir isoler plus facilement l'angle θ_2 :

$$\begin{cases} \frac{1}{\vec{x}_1} \left\{ \begin{aligned} c_2 \sin \theta_2 + (a_3 + a_4) \cos(\theta_2 + \theta_3) + c_3 \sin(\theta_2 + \theta_3) &= D_2 \\ c_2 \cos \theta_2 - (a_3 + a_4) \sin(\theta_2 + \theta_3) + c_3 \cos(\theta_2 + \theta_3) &= D_1 \end{aligned} \right. \end{cases}$$

En isolant le paramètre θ_2 à gauche et en posant l'angle $\alpha = \theta_2 + \theta_3$:

$$\begin{cases} c_2 \sin \theta_2 = D_2 - (a_3 + a_4) \cos \alpha - c_3 \sin \alpha \\ c_2 \cos \theta_2 = D_1 + (a_3 + a_4) \sin \alpha - c_3 \cos \alpha \end{cases}$$

ce qui permet d'obtenir une unique équation en α par la somme des deux équations au carré (technique classique) :

$$\begin{aligned} c_2^2 &= D_1^2 + D_2^2 + (a_3 + a_4)^2 + c_3^2 - 2((a_3 + a_4)D_2 + c_3D_1) \cos \alpha + 2((a_3 + a_4)D_1 - c_3D_2) \sin \alpha \\ \Leftrightarrow \underbrace{-2((a_3 + a_4)D_2 + c_3D_1) \cos \alpha}_{K_1} + \underbrace{2((a_3 + a_4)D_1 - c_3D_2) \sin \alpha}_{K_2} &= \underbrace{c_2^2 - D_1^2 - D_2^2 - (a_3 + a_4)^2 - c_3^2}_{K_3} \\ \Leftrightarrow K_1 \cos \alpha + K_2 \sin \alpha &= K_3 \quad \Leftrightarrow \frac{K_1}{\sqrt{K_1^2 + K_2^2}} \cos \alpha + \frac{K_2}{\sqrt{K_1^2 + K_2^2}} \sin \alpha = \frac{K_3}{\sqrt{K_1^2 + K_2^2}} \end{aligned}$$

Cette dernière forme normalisée permet de poser l'angle φ et la constante K_4 de sorte que¹ :

$$\varphi = \arctan \frac{K_2}{K_1}, \quad K_4 = \frac{K_3}{\sqrt{K_1^2 + K_2^2}}, \quad \text{et} \quad \cos \varphi \cos \alpha + \sin \varphi \sin \alpha = K_4$$

Il est alors possible de résoudre l'équation sous la forme :

$$\cos(\alpha - \varphi) = K_4 \Rightarrow \alpha = \varphi \pm \arccos K_4$$

L'expression de α montre l'existence de deux solutions (illustrées figure 11 dans une précédente question). On en déduit l'angle θ_2 puis l'angle θ_3 ² :

$$\theta_2 = \arctan \left(\frac{D_2 - (a_3 + a_4) \cos \alpha - c_3 \sin \alpha}{D_1 + (a_3 + a_4) \sin \alpha - c_3 \cos \alpha} \right) \quad \text{et} \quad \theta_3 = \alpha - \theta_2$$

Question 3.11 Pour une position (x_P, y_P) sur la trajectoire plane, déterminer par un raisonnement graphique les expressions de θ_1 et $\dot{\theta}_1$ (tracés à faire sur le document réponse DR3). Pour la seconde expression, on séparera le cas où P évolue de A à B (ou C à D) et celui où P évolue de B à C (ou D à A).

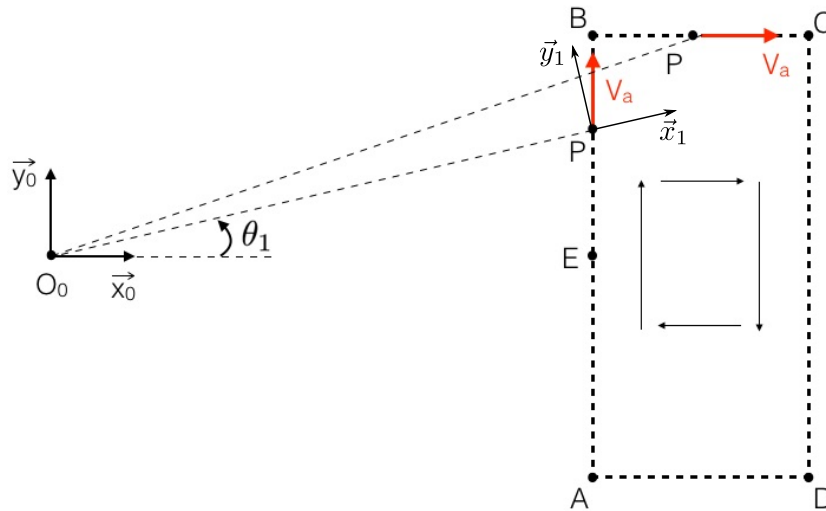


FIGURE 13 – Document réponse DR3.

Une vue de dessus de la trajectoire est proposée figure 13 où ont été ajoutés les vecteur $\vec{x}_1$ et $\vec{y}_1$.

Les relations trigonométriques dans le triangle O_0EP permettent de déduire immédiatement l'angle θ_1 :

$$\theta_1 = \arctan \left(\frac{y_P}{x_P} \right)$$

Pour la vitesse angulaire, elle dépend de la portion de trajectoire. $\dot{\theta}_1$ ne dépend que de la composante orthoradiale de la vitesse. En projetant sur le vecteur orthoradial $\vec{y}_1$:

- sur $[AB]$: $V_a \vec{y}_0 \cdot \vec{y}_1 = \sqrt{x_P^2 + y_P^2} \dot{\theta}_1 \Rightarrow \dot{\theta}_1 = \frac{V_a \cos \theta_1}{\sqrt{x_P^2 + y_P^2}};$

1. L'arctangente détermine φ à π près, mais la connaissance du cosinus et du sinus permet en réalité d'obtenir l'angle à 2π près. La démonstration n'a pas été alourdie ici par ces considérations, sachant qu'une résolution en Python par exemple permet d'utiliser `arctan2()` qui calcule l'arctangente entre 0 et 2π .

2. Même remarque sur l'arctangente.

- de même sur $[CD]$: $\dot{\theta}_1 = \frac{-V_a \cos \theta_1}{\sqrt{x_P^2 + y_P^2}}$;
- sur $[BC]$: $V_a \vec{x}_0 \cdot \vec{y}_1 = \sqrt{x_P^2 + y_P^2} \dot{\theta}_1 \Rightarrow \dot{\theta}_1 = \frac{-V_a \sin \theta_1}{\sqrt{x_P^2 + y_P^2}}$;
- de même sur $[DA]$: $\dot{\theta}_1 = \frac{V_a \sin \theta_1}{\sqrt{x_P^2 + y_P^2}}$.

Question 3.12 Conclure sur la capacité du robot à assurer cinématiquement la dépose du cordon.

Les vitesses angulaires $\dot{\theta}_i$ restent inférieures à $10^\circ/\text{s}$, soit bien inférieures aux vitesses maximales des axes du robot de $90^\circ/\text{s}$ ou plus.

De même les angles θ_i entre -60° et 60° sont largement dans les intervalles permis par le robot.

Le robot est donc tout à fait capable cinématiquement d'assurer la dépose du cordon.

Question 3.13 Indiquer l'intérêt de positionner le centre de gravité de la tête $G_{\text{tête}}$ sur l'axe $(O_5, \vec{x}_5)$.

Positionner $G_{\text{tête}}$ sur $(O_5, \vec{x}_5)$ évite de générer un couple C_{m6} sur l'axe du robot dû au poids.

Question 3.14 Déterminer la valeur de la position $x_{G_{56t}}$, telle que $\overrightarrow{O_5 G_{56t}} = x_{G_{56t}} \vec{x}_5$, du centre de gravité G_{56t} de l'ensemble $\{5+6+\text{tête}\}$. Indiquer la forme de la matrice d'inertie :

$$I(G_{56t}, 56t) = \begin{pmatrix} A_{56t} & -D_{56t} & -E_{56t} \\ -D_{56t} & B_{56t} & -F_{56t} \\ -E_{56t} & -F_{56t} & C_{56t} \end{pmatrix}_{B_{56t}}$$

de cet ensemble au point G_{56t} .

La position du centre de gravité G_{56t} s'exprime comme un barycentre :

$$\overrightarrow{O_5 G_{56t}} = \frac{1}{m_{56} + m_{\text{tête}}} (m_{56} \overrightarrow{O_5 G_{56}} + m_{\text{tête}} \overrightarrow{O_5 G_{\text{tête}}})$$

En projetant sur $\vec{x}_5$:

$$x_{G_{56t}} = \frac{1}{m_{56} + m_{\text{tête}}} (m_{56} x_{G_{56}} + m_{\text{tête}} x_{G_{\text{tête}}}) = \frac{55 \times 100 + 50 \times 370}{55 + 50} = \frac{24\,000}{105} \simeq 230 \text{ mm}$$

(On trouve 229 mm à la calculatrice.)

Pour ce qui concerne la matrice d'inertie, les deux matrices d'inertie des solides 56 et tête sont diagonales dans leurs bases respectives (les bases n'étant pas précisées, on suppose qu'il s'agit des bases attachées aux solides).

Par ailleurs, la matrice de la tête présente les termes diagonaux A et B égaux, donc la matrice est invariante par rotation θ_6 , si bien qu'elle s'exprime de façon identique dans la base B_5 .

Le déplacement des matrices d'inertie par le théorème de Huygens s'effectue suivant $\vec{x}_5 = \vec{x}_6$ uniquement, si bien que les matrices complémentaires de Huygens sont elles aussi diagonales dans la base B_5 .

Les deux matrices peuvent s'additionner terme à terme dans la base B_5 pour obtenir une matrice $I(G_{56t}, 56t)$ diagonale :

$$I(G_{56t}, 56t) = \begin{pmatrix} A_{56t} & 0 & 0 \\ 0 & B_{56t} & 0 \\ 0 & 0 & C_{56t} \end{pmatrix}_{B_{56t}}$$

Question 3.15 Justifier la forme diagonale, voire encore plus spécifique, des matrices d'inertie des ensembles 2, {3+4}, {5+6} et de la tête, ainsi que la forme non-diagonale de la matrice d'inertie de l'embase 1.

Le solide 2 présente un plan de symétrie $(O_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$ si bien que $D_2 = E_2 = 0$. La géométrie ne présentant pas d'autres plans de symétrie, considérer *a priori* $F_2 = 0$ est une approximation, qui se justifie par le caractère élancé du solide 2 dans la direction $\vec{z}_2$, ce qui conduit à des termes A_2 et B_2 très supérieurs à C_2 et F_2 ainsi qu'à la propriété $A_2 \simeq B_2$. Sous ces approximations, la matrice d'inertie est diagonale et, pour spécifier plus encore, $A_2 \simeq B_2$ (ie invariance par rotation autour de $\vec{z}_2$).

Pour l'ensemble {3 + 4}, le plan $(O_3, \vec{x}_3, \vec{z}_3)$ peut être considéré comme un plan de quasi-symétrie, ce qui conduit à $D_{34} = F_{34} \simeq 0$. De même que pour le solide 2, le caractère élancé de l'ensemble {3 + 4} va conduire à des termes B_{34} et C_{34} très supérieurs à A_{34} et E_{34} ainsi qu'à la propriété $B_{34} \simeq C_{34}$. Sous ces approximations, la matrice d'inertie est diagonale et, pour spécifier plus encore, $B_{34} \simeq C_{34}$ (ie invariance par rotation autour de $\vec{X}_3$).

Pour l'ensemble {5+6}, les schémas proposés permettent difficilement de se faire une idée de la répartition de masse mais on peut supposer qu'elle présente deux plans de symétrie, ce qui conduit à une matrice d'inertie diagonale.

Pour l'embase 1, il n'y a aucun plan de symétrie particulier et le solide n'est pas élancé donc la matrice ne présente aucune simplification évidente et, à moins que la géométrie ne soit conçue pour, la matrice d'inertie sera pleine.

Question 3.16 Donner l'expression générale de l'énergie cinétique d'un élément i du système (aucun calcul n'est demandé), et montrer qualitativement que l'énergie cinétique globale du système peut se mettre sous la forme :

$$E_c = \frac{1}{2} \dot{\vec{\Theta}}^T A(\vec{\Theta}) \dot{\vec{\Theta}}$$

où $A(\vec{\Theta})$ est une matrice dont on indiquera la signification physique.

L'énergie cinétique s'écrit pour le solide i sous la forme :

$$E_{ci} = \frac{1}{2} \{ \mathcal{C}_{i/0} \} \otimes \{ \mathcal{V}_{i/0} \}$$

où les deux tenseurs dépendent de $\vec{\theta}$ et chacun est linéaire en $\vec{\theta}$, si bien que l'énergie cinétique peut se mettre sous la forme quadratique :

$$E_{ci} = \frac{1}{2} \dot{\vec{\theta}}^T A_i(\vec{\theta}) \dot{\vec{\theta}}$$

L'énergie cinétique totale est la somme des énergies cinétiques de chaque solides, soit :

$$E_c = \sum_{i=1}^7 E_{ci} = \frac{1}{2} \dot{\vec{\Theta}}^T \left(\sum_{i=1}^7 A_i(\vec{\Theta}) \right) \dot{\vec{\Theta}} = \frac{1}{2} \dot{\vec{\Theta}}^T A(\vec{\Theta}) \dot{\vec{\Theta}}$$

La matrice $A(\vec{\Theta})$ traduit une forme d'inertie équivalente rapportée aux axes du robots, pour chaque mouvement du robot.

Question 3.17 Indiquer une démarche rapide permettant d'aboutir au modèle dynamique global de la forme :

$$A(\vec{\Theta}) \ddot{\vec{\Theta}} + \vec{B}(\vec{\Theta}, \dot{\vec{\Theta}}) + \vec{C}(\vec{\Theta}) = \vec{\gamma}$$

qui décrit le comportement dynamique du mécanisme et permet d'avoir accès aux actions motrices dans les différentes articulations. On détaillera la démarche et on explicitera la signification physique de chaque terme de l'égalité (sans en faire le calcul).

Il s'agit d'un système couplé de 6 équations différentielles dépendant des 6 paramètres de mouvements θ_i et traduisant les équations du mouvement.

Le calcul de la question précédente invite à utiliser une méthode énergétique pour retrouver ces équations du mouvement. Or, le théorème de l'énergie cinétique vu en CPGE ne permet d'obtenir qu'une seule équation (ne faisant pas intervenir d'inconnue de liaison), ce qui est bien adapté pour un système à une unique mobilité mais pas pour un robot 6 axes...

Pour généraliser l'approche énergétique du théorème de l'énergie cinétique, il faut utiliser le principe des puissances virtuelles ou les équations de Lagrange (hors programme évidemment), ou renoncer à une approche énergétique pour privilégier le PFD (en utilisant les équations duales des mouvements des axes du robot pour éviter les inconnues de liaison).

On peut néanmoins raisonner par analogie avec le théorème de l'énergie cinétique et considérer qu'en dérivant l'énergie cinétique, on obtient des termes en dérivées secondes (premier terme de l'équation proposée) ainsi que des produits de dérivées premières (second terme proposé). La puissance des efforts extérieurs (le poids et les couples moteurs) va conduire au 3ème terme (pour le poids) et au second membre (pour les couples moteurs).

Question 3.18 Déterminer les expressions des vecteurs vitesse $\vec{V}_{G_{56t}, 56t/0}$ et moment cinétique $\vec{\sigma}(G_{56t}, 56t/0)$ dans la base la plus appropriée.

L'ensemble $\{56t\}$ est maintenu horizontal et tourne suivant $\dot{\theta}_1$ autour de $\vec{z}_1$.

$$\{\mathcal{V}_{56t/0}\} = \{\mathcal{V}_{56t/34}\} + \{\mathcal{V}_{34/2}\} + \{\mathcal{V}_{2/1}\} + \{\mathcal{V}_{1/0}\}$$

Le plus simple est de calculer la vitesse du point O_5 , puis sachant que 56t reste à l'horizontale, réduire le torseur $\{\mathcal{V}_{56t/0}\}$ en ne tenant compte que de la seule rotation suivant θ_1 .

$$\vec{V}_{O_5, 34/2} = \vec{V}_{O_5, 34/2} + \dot{\theta}_3 \vec{y}_1 \wedge ((a_3 + a_4)\vec{x}_3 + c_3\vec{z}_3) = \dot{\theta}_3(-(a_3 + a_4)\vec{z}_3 + c_3\vec{x}_3) = A$$

$$\vec{V}_{O_5, 2/1} = \vec{V}_{O_5, 2/1} + \dot{\theta}_2 \vec{y}_1 \wedge (c_2\vec{z}_2 + (a_3 + a_4)\vec{x}_3 + c_3\vec{z}_3) = \dot{\theta}_2(c_2\vec{x}_2 - (a_3 + a_4)\vec{z}_3 + c_3\vec{x}_3) = B$$

$$\begin{aligned} \vec{V}_{O_5, 1/0} &= \vec{V}_{O_5, 1/0} + \dot{\theta}_1 \vec{z}_1 \wedge (a_1\vec{x}_1 + c_1\vec{z}_1 + c_2\vec{z}_2 + (a_3 + a_4)\vec{x}_3 + c_3\vec{z}_3) \\ &= \dot{\theta}_1(a_1\vec{y}_1 + c_2 \sin \theta_2 \vec{y}_1 + (a_3 + a_4) \cos(\theta_2 + \theta_3) \vec{y}_1 + c_3 \sin(\theta_2 + \theta_3) \vec{y}_1) = C \end{aligned}$$

Puis par réduction en G_{56t} :

$$\vec{V}_{G_{56t}, 56t/0} = \vec{V}_{O_5, 56t/0} + \dot{\theta}_1 \vec{z}_1 \wedge x_{G_{56t}} \vec{x}_1 = [A + B + C] + \dot{\theta}_1 x_{G_{56t}} \vec{y}_1$$

Le moment cinétique au centre de gravité G_{56t} s'écrit :

$$\vec{\sigma}(G_{56t}, 56t/0) = \bar{\bar{I}}_{G_{56t}, 56t} \vec{\Omega}_{56t/0} + \vec{0} = \bar{\bar{I}}_{G_{56t}, 56t} \dot{\theta}_1 \vec{z}_1 = \begin{bmatrix} -E_{56t} \\ -F_{56t} \\ C_{56t} \end{bmatrix}_{B_1} \dot{\theta}_1$$

Question 3.19 Par le principe fondamental de la dynamique, donner l'expression du couple C_5 et montrer qu'il est constant au cours de la trajectoire.

En isolant $\{56t\}$, le principe fondamental de la dynamique s'écrit :

$$\{\mathcal{T}_{4 \rightarrow 5}\} + \{\mathcal{T}_{C_5}\} + \{\mathcal{T}_{\text{poids} \rightarrow 56t}\} + \{\mathcal{T}_{\text{mur} \rightarrow \text{buse}}\} = \{\mathcal{D}_{56t/0}\}$$

L'action du mur sur la buse est supposée nulle. Par ailleurs, le théorème du moment dynamique (TMD) suivant l'axe $(O_5, \vec{y}_1)$ de la pivot permet d'éviter les inconnues de 4→5.

La seule action mécanique à réduire au point O_5 est donc le poids : $\{\mathcal{T}_{\text{poids} \rightarrow 56t}\}_{G_{56t}} = \begin{Bmatrix} -m_{56t}g\vec{z}_1 \\ \vec{0} \end{Bmatrix}$.

$$\vec{M}_{0_5, \text{poids} \rightarrow 56t} = \vec{0} + (-m_{56t}g\vec{z}_1) \wedge (-x_{56t}\vec{x}_1) = m_{56t}gx_{56t}\vec{y}_1$$

Le calcul du moment dynamique s'appuie sur les torseurs cinématique (rotation $\dot{\theta}_1$) et cinétique. Remarquons immédiatement que l'accélération du centre de gravité est dans le plan horizontal :

$$\vec{\Gamma}_{G_{56t}, 56t/0} = \frac{d\vec{V}_{G_{56t}, 56t/0}}{dt} /_0 \in \text{plan}(\vec{x}_1, \vec{y}_1)$$

La projections du moment dynamique en G_{56t} sur $\vec{y}_1$ s'écrit :

$$\begin{aligned} \vec{y}_1 \cdot \vec{\delta}_{G_{56t}, 56t/0} &= \left(\frac{d\vec{\sigma}(G_{56t}, 56t/0)}{dt} /_0 + \vec{0} \right) \cdot \vec{y}_1 \quad (\text{calcul au centre de masse}) \\ &= \left(\frac{d\vec{\sigma}(G_{56t}, 56t/0)}{dt} /_1 + \vec{\Omega}_{1/0} \wedge \vec{\sigma}(G_{56t}, 56t/0) \right) \cdot \vec{y}_1 \\ &= \left(\begin{bmatrix} -E_{56t} \\ -F_{56t} \\ C_{56t} \end{bmatrix}_{B_1} \quad \ddot{\theta}_1 + \dot{\theta}_1 \vec{z}_1 \wedge \vec{\sigma}(G_{56t}, 56t/0) \right) \cdot \vec{y}_1 \\ &= -F_{56t}\ddot{\theta}_1 - E_{56t}\dot{\theta}^2 \end{aligned}$$

En réduisant au point O_5 :

$$\begin{aligned} \vec{y}_1 \cdot \vec{\delta}_{O_5, 56t/0} &= \vec{y}_1 \cdot \vec{\delta}_{G_{56t}, 56t/0} + \left(m_{56t}\vec{\Gamma}_{G_{56t}, 56t/0} \wedge \overrightarrow{G_{56t}O_5} \right) \cdot \vec{y}_1 \\ &= \vec{y}_1 \cdot \vec{\delta}_{G_{56t}, 56t/0} + m_{56t} \underbrace{\vec{\Gamma}_{G_{56t}, 56t/0}}_{\perp \vec{z}_1} \cdot \left(\underbrace{x_{G_{56t}} \vec{x}_1 \wedge \vec{y}_1}_{// \vec{z}_1} \right) \\ &= -F_{56t}\ddot{\theta}_1 - E_{56t}\dot{\theta}^2 + 0 \end{aligned}$$

D'où le théorème du moment dynamique suivant $(O_5, \vec{y}_1)$:

$$0 + C_5 + m_{56t}gx_{56t} = -F_{56t}\ddot{\theta}_1 - E_{56t}\dot{\theta}^2 \Rightarrow C_5 = -F_{56t}\ddot{\theta}_1 - E_{56t}\dot{\theta}^2 - m_{56t}gx_{56t}$$

Sauf à négliger les effets dynamiques, le couple moteur C_5 ne sera pas constant.

Question 3.20 Justifier que théoriquement le couple C_1 est indépendant des effets de gravité.

Le poids est colinéaire à $\vec{z}_1$ si bien que le moment du poids est nécessairement orthogonal à $\vec{z}_1$. Or, le couple C_1 est colinéaire à $\vec{z}_1$, il est donc indépendant du poids.

Question 3.21 À la vue de ces évolutions, caractériser qualitativement l'impact des effets dynamiques dans une phase de trajectoire rectiligne.

L'évolution de C_1 montre que les effets dynamiques sont négligeables dans les phases de translation rectiligne. C_2 , C_3 et C_5 sont essentiellement soumis au poids.

Question 3.22 Indiquer l'origine des pics observés dans l'évolution des couples, et donner leurs valeurs théoriques. Indiquer les problèmes engendrés par ces pics et proposer une solution pour remédier à ces problèmes.

Les effets dynamiques sont surtout présents aux angles (changements brusque de la direction de la tête). Les valeurs théoriques sont infinies (une discontinuité de vitesse conduit à une accélération infinie et donc un couple infini de la motorisation).

Les problèmes relèvent de l'erreur de suivi de trajectoire (dépassements, vibrations, oscillations). Une solution est de ralentir la vitesse d'avance de la buse lors de passage des angles.

Question 3.23 Remettre en cause le modèle dynamique, en identifiant deux phénomènes physiques qui pourraient être pris en compte dans un modèle plus évolué.

Un modèle plus évolué pourrait prendre en compte :

- les pertes : les frottements et le rendement des transmissions ;
- les actions du mur sur la buse.

Question 3.24 Expliquer la puissance quasi-nulle développée par le moteur de la liaison L1, et la puissance négative, dans certaines zones, développée par le moteur de la liaison L3.

L_1 n'est pas soumise au poids et les effets dynamiques sont négligeables (sauf aux coins), ainsi la puissance développée est quasi-nulle.

L_3 est soumise à l'action du poids donc en phase de descente du bras, la puissance est négative.

Question 3.25 Après avoir donné l'expression de l'énergie consommée E_i^+ dans la liaison L_i pendant le parcours de la trajectoire (entre l'instant initial $t = 0$ et l'instant final $t = T$), commenter les résultats de consommation obtenus. Indiquer la source des différences constatées et conclure sur un positionnement optimal du robot.

L'énergie consommée s'écrit comme l'intégrale de la partie positive de la puissance consommée :

$$E_i^+ = \int_0^T \langle C_i(t) \cdot \omega_i(t) \rangle_+ dt$$

Les commentaires sur les résultats peuvent être les suivants :

- les liaisons 2 et 3 sont les plus sollicitées ;
- plus d_t est grand, plus les bras de levier sur le poids sont grands donc plus l'énergie consommée est importante ;
- la position optimale du robot est située au plus près de la trajectoire à suivre, de sorte que d_t soit minimal.

Partie 4 : Asservissement du robot

Question 4.1 Montrer que le bras oscille verticalement à une fréquence $f_b = 2,6$ Hz.

Sachant que la vitesse d'avance vaut $V_a = 80$ mm/s et que la période spatiale des oscillations est de $\lambda = 30$ mm, il est possible d'en déduire la fréquence des oscillations :

$$f_b = \frac{V_a}{\lambda} = \frac{80}{30} \simeq 2,6 \text{ Hz}$$

Question 4.2 Transformer ces équations dans le domaine de Laplace en précisant les hypothèses nécessaires et proposer un schéma bloc (avec U et C_{re} en entrées et θ_m en sortie).

Sous l'hypothèse des conditions de Heaviside (grandeurs physiques nulles pour $t < 0$), les transformées de Laplace des équations sont :

$$\begin{cases} Jp^2\theta_m(p) = C_m(p) - C_{re}(p) \\ U(p) = E(p) + (R + Lp)I(p) \\ E(p) = K_e p\theta_m(p) \\ C_m(p) = K_t I(p) \end{cases}$$

Le schéma bloc associé est classiquement le schéma de la figure 14, faisant apparaître la vitesse de rotation $\dot{\theta}$.

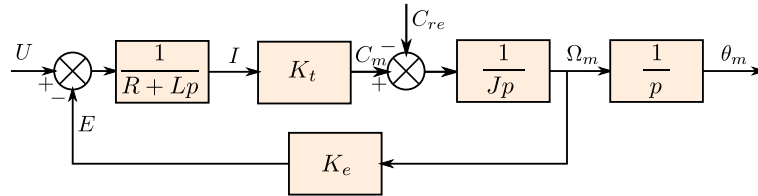


FIGURE 14 – Schéma bloc du moteur à courant continu.

Question 4.3 Sur le document réponse DR4, compléter le schéma bloc de l'asservissement en position.

Le schéma bloc est donné figure 15, où $C(p)$ est le correcteur et avec $k_1 = 1/191$.

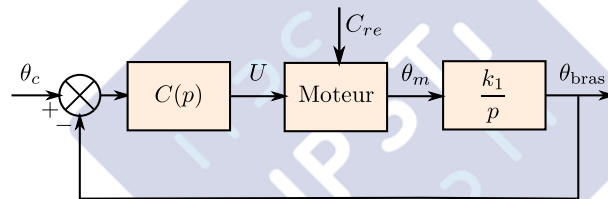


FIGURE 15 – Schéma bloc de l'asservissement en position.

Question 4.4 Calculer la fonction de transfert donnant l'angle de sortie en fonction de l'angle de consigne et du couple résistant.

Le schéma bloc présentant une sortie pour deux entrées, il y aura bien deux fonctions de transfert à déterminer pour calculer la sortie en fonction des entrées.

Par calcul direct en partant de la sortie (et en s'arrêtant aux points de prélèvement) :

$$\theta_{bras} = \frac{k_1}{p} \dot{\theta}_m(p) \text{ puis } \dot{\theta}_m(p) = \frac{1}{J_{eq}p} \left[-C_{re}(p) + \frac{K_t}{R + Lp} \left(-K_e \dot{\theta}_m(p) + C(p)(\theta_c(p) - \theta_{mes}(p)) \right) \right]$$

On en déduit :

$$[J_{eq}p(R + Lp) + K_t K_e] \dot{\theta}_m(p) + K_t C(p) \theta_{bras}(p) = -(R + Lp) C_{re}(p) + K_t C(p) \theta_c(p)$$

Puis en remplaçant $\dot{\theta}_m(p)$:

$$\left[\frac{J_{eq}p^2}{k_1} (R + Lp) + \frac{K_t K_e p}{k_1} + K_t C(p) \right] \theta_{bras}(p) = -(R + Lp) C_{re}(p) + K_t C(p) \theta_c(p)$$

On en déduit les deux fonctions de transfert :

$$\Rightarrow \theta_{\text{bras}}(p) = \frac{k_1 K_t C(p)}{J_{eq} p^2 (R + Lp) + K_t K_e p + k_1 K_t C(p)} \theta_c(p) - \frac{k_1 (R + Lp)}{J_{eq} p^2 (R + Lp) + K_t K_e p + k_1 K_t C(p)} C_{re}(p)$$

Question 4.5 En déduire l'erreur statique pour une consigne en échelon et une perturbation en échelon. Montrer qu'elle est nulle avec un correcteur de type PID.

La chaîne directe comporte un intégrateur en aval de la perturbation. Ainsi, pour des entrées en échelon, on peut affirmer :

- que pour un correcteur de classe 0, le système sera précis mais sensible aux perturbations ;
- que pour un correcteur de classe 1 (ajout d'une intégration en amont de la perturbation), le système sera précis et insensible aux perturbations.

Un correcteur PID permet donc d'annuler l'erreur statique μ_s , même en présence de perturbations. Le sujet demande de *montrer* ce résultat : en considérant un équivalent du PID quand $p \rightarrow 0$:

$$C(p) = K_P + \frac{K_I}{p} + K_D p \underset{p \rightarrow 0}{\sim} \frac{K_I}{p}$$

et des entrées en échelon θ_0/p et C_0/p :

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \mu_s(t) = \lim_{p \rightarrow 0} p \mu_s(p) = \lim_{p \rightarrow 0} p (\theta_c(p) - \theta_{\text{bras}}(p))$$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \mu_s(t) = \lim_{p \rightarrow 0} \theta_0 - \frac{k_1 K_t C(p)}{J_{eq} p^2 (R + Lp) + K_t K_e p + k_1 K_t C(p)} \theta_0 - \frac{k_1 (R + Lp)}{J_{eq} p^2 (R + Lp) + K_t K_e p + k_1 K_t C(p)} C_0$$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \mu_s(t) = \theta_0 - \theta_0 + 0 = 0$$

Question 4.6 Montrer que le système dynamique considéré s'écrit sous la forme :

$$J \ddot{\theta}_{\text{bras}} = -k \theta_{\text{bras}}$$

Le sujet évoque une élasticité dans l'axe 2, mais par continuité avec les questions précédentes et vu que l'équation demandée est dépendante de θ_{bras} , angle de l'axe 1, on suppose qu'il s'agit d'une erreur d'énoncé et que l'élasticité est introduite sur l'axe 1.

Sous cette hypothèse, la modélisation proposée par l'énoncé est représentée figure 16.

En isolant l'ensemble du bras robot jusqu'à la liaison élastique et en appliquant le théorème du moment dynamique suivant l'axe vertical ($O_0, \vec{z}_0$) :

$$J \ddot{\theta}_{\text{bras}} = -k \theta_{\text{bras}} + \underbrace{0}_{\text{pivot}} + \underbrace{0}_{\text{poids}}$$

Question 4.7 En déduire la pulsation propre du système. Comment joue chaque paramètre ?

L'équation différentielle du mouvement s'écrit $\ddot{\theta}_{\text{bras}} + \frac{k}{J} \theta_{\text{bras}} = 0$, ce qui permet de faire apparaître la pulsation propre $\omega_0 = \sqrt{k/J}$.

Une augmentation de l'inertie baisse la pulsation propre tandis qu'une augmentation de la raideur augmente la pulsation propre.

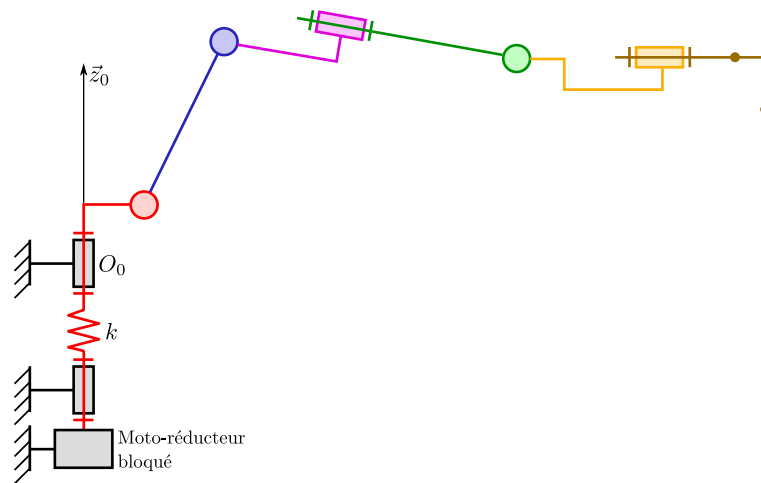


FIGURE 16 – Modèle de transmission avec élasticité.

Question 4.8 Identifier la raideur k introduite en fonction de l'inertie et de la fréquence observée fb .
Connaissant l'inertie et la fréquence propre, il est possible de déduire la raideur :

$$\omega_0 = 2\pi f_b \Rightarrow k = J \frac{f_b^2}{4\pi^2}$$

Question 4.9 Proposer un essai simple permettant de vérifier que cette raideur est correcte. Indiquer des moyens de chargement et de mesure adaptés.

Pour mesurer la raideur sur le robot, il est possible de positionner un comparateur (figure 17) à l'extrémité du robot (à une distance R de l'axe de rotation) et d'exercer une force mesurée par un dynamomètre, pour mesurer le déplacement ΔX suite à la force F_{dynamo} .

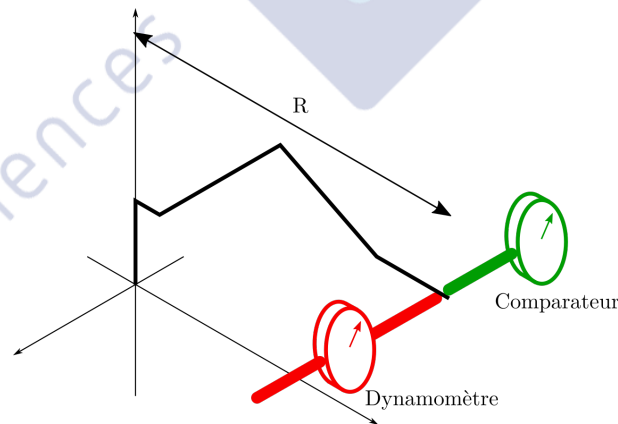


FIGURE 17 – Protocole de mesure de la raideur de la transmission de l'axe 1.

La raideur en torsion sur l'axe du robot s'écrit alors :

$$k = \frac{C}{\Delta\theta} = \frac{RF_{\text{dynamo}}}{\frac{1}{R}\Delta X} = R^2 \frac{F_{\text{dynamo}}}{\Delta X}$$

Question 4.10 Proposer un schéma de la configuration minimisant l'inertie, le justifier sans calcul.

Il faut replier le robot sur lui même et l'incliner vers l'arrière de sorte que le centre de masse total soit au plus près de l'axe de rotation et la répartition de masse la plus proche de l'axe de rotation, tel que sur la figure 18.

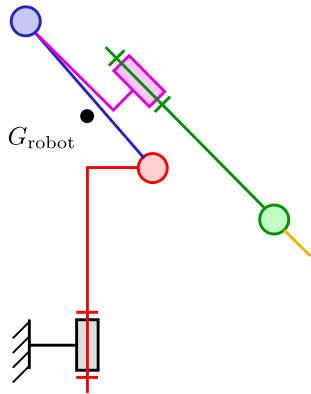


FIGURE 18 – Configuration minimisant l'inertie.

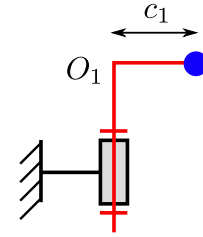


FIGURE 19 – Modèle de répartition de masse de la configuration A.

Question 4.11 Dans la configuration A, estimer grâce à un modèle simple l'inertie du système. Par exemple, le bras pourra être considéré comme une masse ponctuelle.

En adoptant, tel que proposé, le modèle de la figure 19, le moment d'inertie s'écrit :

$$J_A = J_1 + m_{\text{bras}} c_1^2 \quad \text{avec} \quad m_{\text{bras}} = m_2 + m_{34} + m_{56} + m_t$$

L'application numérique conduit à $m_{\text{bras}} = 568 \text{ kg}$, puis $J_A \simeq 270 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$.

Question 4.12 Faire de même dans la configuration B. Pour cela, on pourra utiliser la formule donnant l'inertie d'une barre de longueur L et de masse m autour de son centre de gravité : $mL^2/12$.

En adoptant cette fois le modèle du bras tendu de la figure 20 et en considérant une répartition linéique uniforme de la masse du bras, le moment d'inertie au centre de masse du bras s'écrit $J_{G,\text{bras}} = \frac{m_{\text{bras}} L^2}{12}$.

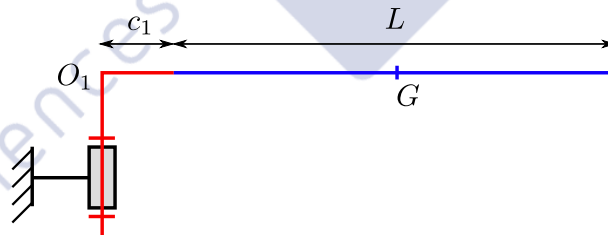


FIGURE 20 – Modèle de répartition de masse de la configuration B.

Sachant que la longueur du bras dans cette configuration vaut $L = C_2 + (a_3 + a_4) + (a_5 + a_P) \simeq 2,1 \text{ m}$, le théorème de Huygens conduit à l'inertie rapporté à l'axe de rotation $(O_1, \vec{z}_0)$ (2,232 m à la calculatrice) :

$$J_{O_1,\text{bras}} = J_{G,\text{bras}} + \left(c_1 + \frac{L}{2}\right)^2 m_{\text{bras}} \simeq 156 + 1400 \simeq 1550 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

Le moment d'inertie total autour de $(O_1, \vec{z}_0)$ vaut donc :

$$J_B = J_1 + J_{O_1,\text{bras}} \simeq 35 + 1550 \simeq 1600 \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \quad (1739 \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \text{ à la calculatrice})$$

Question 4.13 En introduisant le rapport de réduction de l'axe vertical 1 et une inertie du moteur de l'ordre de $J_{\text{mot}} = 1 \times 10^{-2} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$, donner l'expression de l'inertie équivalente ramenée à l'arbre moteur.

En notant k le rapport de réduction ($k = 191$ pour l'axe 1), l'inertie équivalente rapportée à l'arbre moteur s'écrit classiquement :

$$J_{eq} = J_{mot} + \frac{1}{k^2} J_{robot}$$

Question 4.14 Dans les configurations A et B, calculer l'inertie équivalente et commenter. Les dimensions et masses sont données dans les Annexes B et C.

Les applications numériques conduisent, dans la configuration A, à :

$$J_{eq}^{(A)} = J_{mot} + \frac{1}{k^2} J_A \simeq 1,5 \times 10^{-2} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

et dans la configuration B :

$$J_{eq}^{(B)} = J_{mot} + \frac{1}{k^2} J_B \simeq 5 \times 10^{-2} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

Les deux inerties équivalentes présentent un facteur 3, ce qui va imposer une prise en compte de la position du robot dans la commande pour espérer atteindre de bonnes performances dynamiques.

À noter que les annexes B et C évoquées dans la question n'ont pas été utiles pour le calcul dans les configurations A et B car ces deux configurations (proposées dans les questions précédentes) font l'objet d'hypothèses simplificatrices sur la répartition de masse.

Question 4.15 Comment cette constante de temps varie avec l'inertie ? Comment le diagramme de Bode du système en boucle ouverte varie avec τ_m ?

La fonction de transfert d'un moteur à courant continu modélisé comme un premier ordre (L négligé) s'écrit $H_m(p) = \frac{\frac{1}{K_e}}{1 + \frac{RJ}{K_t K_e}}$, où on reconnaît la constante de temps $\tau_m = \frac{RJ}{K_t K_e}$.

Ainsi la constante de temps τ_m augmente avec l'inertie J . Le diagramme de Bode (figure 21) est, avec l'augmentation de J , translaté horizontalement vers les basses pulsations.

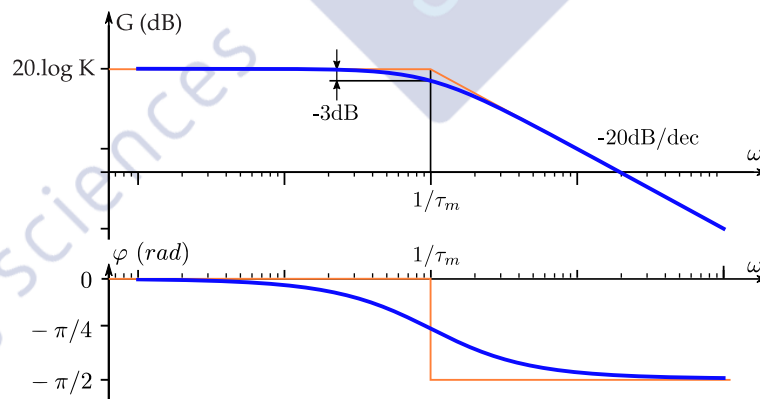


FIGURE 21 – Diagramme de Bode

Question 4.16 En déduire de manière qualitative l'effet théorique de se placer en configuration B sur la précision, la stabilité et la rapidité pour une réponse à un échelon de rotation autour de l'axe vertical.

La *précision* restera inchangée car le régime permanent ne dépend pas des caractéristiques dynamiques telles que J , mais seulement du gain statique.

La *stabilité* sera dégradée car l'augmentation de J conduit à diminuer la phase à pulsation fixée, donc pour une bande passante donnée, la marge de phase sera diminuée.

La *rapidité* sera diminuée car à stabilité donnée, la bande passante à 0dB de la boucle ouverte va diminuer donc la rapidité va diminuer.

On remarque qu'il y a un compromis à trouver entre stabilité et rapidité, mais l'augmentation de J va dégrader ce compromis, soit au détriment de la stabilité, soit au détriment de la rapidité, soit les deux.

Question 4.17 Écrire l'équation de commande donnant C_m en fonction des consignes (rotation θ_c , vitesse $\dot{\theta}_c$, accélération $\ddot{\theta}_c$) et des rotations et vitesses mesurées ($\theta_m, \dot{\theta}_m$).

D'après le schéma bloc :

$$C_m = A(\theta)\ddot{\theta} + B(\theta, \dot{\theta}) + C(\theta) = A(\theta_m) \left[\ddot{\theta}_c + K_p(\theta_c - \theta_m) + K_v(\dot{\theta}_c - \dot{\theta}_m) \right] + B(\theta_m, \dot{\theta}_m) + C(\theta_m)$$

Question 4.18 Montrer que l'erreur $\varepsilon = \theta_c - \theta_m$ respecte l'équation suivante :

$$\ddot{\varepsilon} + K_p \varepsilon + K_v \dot{\varepsilon} = 0$$

L'erreur s'écrit : $\varepsilon = \theta_c - \theta_m$, et en supposant le modèle parfait : $C_m = \Gamma(\ddot{\theta}_m, \dot{\theta}_m, \theta_m)$.

D'après le schéma bloc, en remplaçant C_m par l'expression issue de la combinaison des consignes ($\ddot{\theta}$) et mesures ($\dot{\theta}$ et θ) :

$$\Rightarrow A(\theta_m) \left[\ddot{\theta}_c + K_p(\theta_c - \theta_m) + K_v(\dot{\theta}_c - \dot{\theta}_m) \right] + B(\theta_m, \dot{\theta}_m) + C(\theta_m) = A(\theta_m)\ddot{\theta}_m + B(\theta_m, \dot{\theta}_m) + C(\theta_m)$$

$$\Rightarrow (\ddot{\theta}_c - \ddot{\theta}_m) + K_p(\theta_c - \theta_m) + K_v(\dot{\theta}_c - \dot{\theta}_m) = 0$$

$$\Rightarrow \ddot{\varepsilon} + K_p \varepsilon + K_v \dot{\varepsilon} = 0$$

Selon les valeurs de K_p et K_v , la solution de cette équation est oscillante ou pas, mais elle converge toujours vers zéro.

Question 4.19 Quel est le rôle de K_v , K_p sur la forme de la solution ? En particulier montrer que K_v joue sur la rapidité du système.

K_p qualifie ω_0 , donc la bande passante (et donc la rapidité).

K_v qualifie l'amortissement, et donc lui aussi la rapidité : il faut viser un amortissement compris entre 0,7 et 1 pour optimiser la rapidité.

Partie 5 : Étude du dispositif de fixation de la tête d'impression

Question 5.1 Indiquer une technologie qui peut être utilisée pour les capteurs de verrouillage/déverrouillage utilisés sur le système.

La technologie probablement utilisée est le *capteur inductif*, particulièrement approprié car il est sans contact (pas d'usure) et peut détecter le piston en matériau ferromagnétique, éventuellement à travers le carter s'il est en aluminium (pas d'étanchéité nécessaire dans ce cas).

Question 5.2 Réaliser le graphe de liaisons du mécanisme, en faisant apparaître les actions mécaniques. On ne représentera qu'un seul dispositif à billes, celui lié à la bille 9a, parmi les six identiques disposés en hexagone.

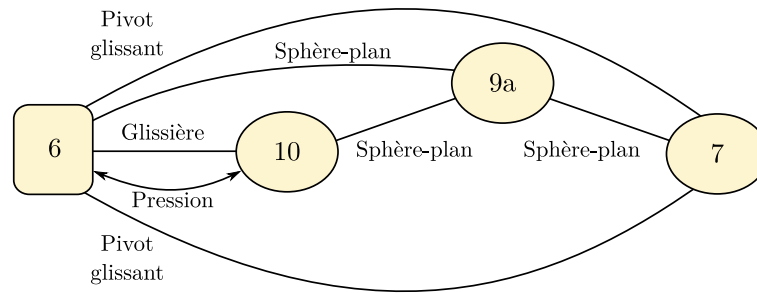


FIGURE 22 – Graphe des liaisons.

Le graphe de liaisons est donné figure 22.

Question 5.3 Déterminer le degré d'hyperstatisme du modèle du mécanisme complet. En cas d'hyperstatisme, proposer des modifications à apporter pour diminuer voire annuler ce degré d'hyperstatisme.

Le mécanisme complet comporte 6 billes. Le nombre de solides vaut donc $N = 3 + 6 = 9$ solides (3 solides {7, 10, 6} et les 6 billes).

En comptant la glissière, les deux pivot-glissant, ainsi que 3 contacts sphère-plan par bille, le nombre de liaisons vaut $L = 3 + 6 \times 3 = 21$ liaisons.

Le nombre cyclomatique se déduit : $\gamma = L - N + 1 = 21 - 9 + 1 = 13$ boucles indépendantes.

Les liaisons sphère-plan sont supposées parfaites, si bien que les billes sont (théoriquement) libres de tourner sur elles-mêmes suivant les 3 rotations spatiales, et peuvent aussi translater dans la direction orthoradiale, soit 4 mobilités par billes. Le nombre de mobilités internes vaut donc $m_i = 4 \times 6 = 24$.

La translation de 7 est liée (via les billes) à la translation de 10, soit une mobilité utile $m_u = 1$. La mobilité totale est donc de $m = m_u + m_i = 25$.

Par une approche cinématique, le nombre d'inconnues cinématiques est la somme des inconnues cinématiques de la glissière, des deux pivot-glissant et des 6×3 sphères-plan : $I_c = 1 + 2 \times 2 + 6 \times 3 \times 5 = 95$ inconnues cinématiques.

Le degré d'hyperstaticité vaut donc :

$$h = 6\gamma - I_c + m = 6 \times 13 - 95 + 25 = 8$$

Par une approche statique, le raisonnement est similaire, le nombre d'inconnues statiques s'écrit $I_s = 5 + 2 \times 4 + 6 \times 3 \times 1 = 31$. Le degrés d'hyperstaticité vaut donc : $h = I_s - 6(N - 1) + m = 31 - 6 \times 8 + 25 = 8$.

Le degré d'hyperstaticité important vient d'une part de l'association parallèle des deux pivot-glissant, et d'autre part du nombre de billes en contact avec les mêmes pièces. En suivant cette approche plus qualitative, il est possible de retrouver le résultat :

- l'association parallèle de deux pivot-glissant conduit à 3 contraintes de positionnement surabondant (contrainte de parallélisme des axes et distance d'entraxe) ;
- une unique bille lie la mobilité de 7 à celle de 10 (sans contrainte particulière), tandis que les 5 autres billes vont conduire à des contraintes de contacts aux ponctuelles surabondants (pour le visualiser, il suffit d'imaginer qu'une bille est d'un diamètre légèrement plus grand que les autres, auquel cas les autres billes ne seront plus en contact), soit 5 contraintes de contacts surabondants.

On retrouve bien un total de 8 contraintes de montage : $h = 8$.

Pour diminuer le degré d'hyperstaticité,

- il faut limiter les contraintes de guidage de 7/6 car ce sont les billes qui assurent le centrage. En supprimant

les deux pivot-glissant, la mobilité augmente de 1 (rotation de 7 rendue possible) tandis que les contraintes statiques (I_s) diminuent de 4 $\Rightarrow h = 5$.

- Il faut placer le plan d'appui sur une sphérique. m augmente de 1 (rotation du plan d'appui) tandis que le nombre d'inconnues cinématique (I_c) augmente de 3 $\Rightarrow h = 3$.
- Il faut réduire le nombre de billes à 3, ce qui supprime 3 contraintes statiques de contact $\Rightarrow h = 0$.

Question 5.4 Expliquer la démarche à appliquer (isolements successifs, théorèmes et équations utilisés) pour déterminer l'expression de F_7 en fonction de p_p . Mettre en œuvre cette démarche et donner l'expression de F_7 en fonction de p_p et des grandeurs géométriques.

On suppose pour cette question qu'il n'y a qu'une seule bille pour rendre le système résoluble. La relation entre F_7 et p_p sera identique mais il faudra noter que les efforts calculés sur la bille seront en réalité répartis sur les 6 billes. Il faudra aussi bien se référer aux directions $\vec{x}_6$ et $\vec{y}_6$ attachées à la figure en haut à gauche, le diagramme de changement de base étant tourné par rapport à la figure.

Démarche :

- En isolant {10} et en appliquant un théorème de la résultante statique (TRS) suivant $\vec{x}_6$ (pour éviter les inconnues de la glissière), on obtient $F_{9a \rightarrow 10}$ en fonction de p_p .
- En isolant {9a} et en appliquant un théorème de la résultante statique (TRS) suivant $\vec{y}_6$ (pour éviter les inconnues de $6 \rightarrow 9a$), on obtient $F_{7 \rightarrow 9a}$ en fonction de p_p .
- En isolant {7} et en appliquant un théorème de la résultante statique (TRS) suivant $\vec{x}_6$ (pour éviter les inconnues des pivot-glissant), on obtient F_7 en fonction de p_p .

Mise en œuvre de la démarche :

- En isolant {10} et en appliquant un théorème de la résultante statique (TRS) suivant $\vec{x}_6$:

$$0 + F_{\text{pression}} \vec{x}_6 \cdot \vec{x}_6 + F_{9a \rightarrow 10} \cdot \vec{x}_6 = 0 \Rightarrow p_p \frac{\pi d_p^2}{4} + F_{9a \rightarrow 10} \cos \beta = 0 \Rightarrow F_{9a \rightarrow 10} = -p_p \frac{\pi d_p^2}{4 \cos \beta}$$

- En isolant {9a} et en appliquant un théorème de la résultante statique (TRS) suivant $\vec{y}_6$:

$$0 + F_{10 \rightarrow 9a} \vec{w}_2 \cdot \vec{y}_6 + F_{7 \rightarrow 9a} \vec{w}_1 \cdot \vec{y}_6 = 0 \Rightarrow p_p \frac{\pi d_p^2}{4 \cos \beta} \sin \beta + F_{7 \rightarrow 9a} \sin \alpha = 0 \Rightarrow F_{7 \rightarrow 9a} = \frac{-\pi d_p^2 \tan \beta}{4 \sin \alpha} p_p$$

(remarque : $\tan 106^\circ < 0$)

- En isolant {7} et en appliquant un théorème de la résultante statique (TRS) suivant $\vec{x}_6$:

$$0 + 0 + F_{9a \rightarrow 7} \vec{w}_1 \cdot \vec{x}_6 + F_7 \vec{x}_6 \cdot \vec{x}_6 = 0 \Rightarrow F_{9a \rightarrow 7} \cos \alpha + F_7 = 0 \Rightarrow F_7 = \frac{-\pi d_p^2 \tan \beta}{4 \tan \alpha} p_p$$

(remarque : malgré le signe de l'expression, F_7 sera bien positive).

Question 5.5 Montrer que l'effort de la platine 7 sur la bille 9a s'écrit $F_{79a} = k F_7$ où k est une grandeur à déterminer.

La relation demandée a déjà été écrite à la question précédente, lors de l'isolement du solide {7} : $F_{9a \rightarrow 7} \cos \alpha + F_7 = 0$, d'où l'expression $F_{7 \rightarrow 9a} = \frac{1}{\cos \alpha} F_7$ dans l'hypothèse où il n'y a qu'une seule bille.

S'il y a 6 billes, les efforts sur chaque bille sont *a priori* indéterminés (modèle hyperstatique), mais en faisant l'hypothèse d'une répartition égale sur chaque bille, on obtient $F_{7 \rightarrow 9a} = \frac{1}{6 \cos \alpha} F_7$, soit $k = \frac{1}{6 \cos \alpha}$.

Question 5.6 Faire l'application numérique et conclure quant à la pression nécessaire pour maintenir la tête d'impression (soumise à son propre poids) sur l'organe terminal du robot considéré en position verticale descendante ($\vec{x}_6 = -\vec{z}_0$). Indiquer si la gamme de pression est en accord avec le dimensionnement de l'architecture pneumatique prévue par le constructeur et indiquée sur la figure ci-dessous.

Si la tête d'impression est uniquement soumise à son propre poids, $F_7 = Mg$ où $M_{\text{tête impression}} = 50 \text{ kg}$ d'après l'annexe A.

On en déduit la pression :

$$p_p = \frac{-4 \tan \alpha}{\pi d_p^2 \tan \beta} Mg \quad \text{AN :} \quad p_p = \frac{-4 \tan 62^\circ}{\pi \times 0,08^2 \tan 106^\circ} \times 50 \times 10 \simeq 1 \times 10^5 \text{ Pa} \simeq 1 \text{ bar}$$

La pression d'alimentation allant de 4,1 bar à 6,9 bar, le coefficient de sécurité est supérieur à 4, ce qui est largement suffisant.

Question 5.7 Imaginer un dispositif qui pourrait être ajouté pour maintenir, avec le modèle précédent, le verrouillage même lorsque le changeur n'est plus alimenté en air comprimé.

Il serait possible d'ajouter un ressort qui maintient le système verrouillé. L'air comprimé serait alors utile uniquement au déverrouillage.

Question 5.8 Dans cette position, une augmentation de F_7 peut-elle provoquer le déverrouillage induit par la translation du piston 10 suivant $-\vec{x}_6$? Quelle est alors la valeur limite admissible pour F_7 ? Qu'est-ce qui pourrait remettre en cause cette valeur?

Si F_7 augmente, la bille, en appui sur le bâti en bas, est plaquée vers la droite sur les deux contacts en I'_{910} et I''_{910} donc elle n'induit pas de translation de la tige du vérin 10. Il n'y a donc pas de déverrouillage possible.

Il n'y a pas de limite, sauf à la rupture des pièces.

Question 5.9 Expliquer la démarche (théorème utilisé, inventaire des actions mécaniques extérieures, équations pertinentes) permettant d'obtenir la formule donnée pour le moment effectif. Pourquoi le constructeur préconise-t-il un dimensionnement en fonction du moment effectif et non de l'effort d'arrachement F_7 calculé précédemment?

En isolant l'outillage embarqué et en appliquant le théorème du moment dynamique (TMD) en M , le bilan des actions mécaniques se limite à l'action du robot sur l'outillage et du poids sur l'outillage. Le TMD s'écrit :

$$\vec{\delta}_{M, \text{outillage}/R_0} = \vec{M}_{M, \text{poids} \rightarrow \text{outillage}} + \vec{M}_{M, \text{robot} \rightarrow \text{outillage}}$$

Dans le cas où l'accélération est vers le haut (sens défavorable), l'équation projetée suivant la normale au plan de la figure s'écrit :

$$-\alpha g M L = M g L - M t \quad \Rightarrow \quad M t = P L (1 + \alpha)$$

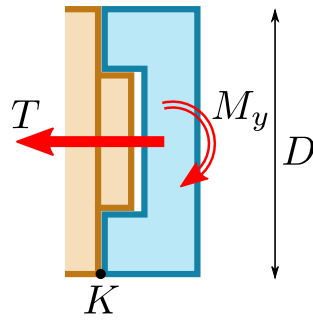
On retrouve la formule donnée pour le moment effectif.

Le constructeur préconise un dimensionnement en fonction du moment effectif car il conduit à des efforts plus importants dans le changeur d'outils, et répartis sur moins de billes.

Question 5.10 En tenant compte des dimensions du système de verrouillage données dans l'Annexe E, et en faisant un croquis du modèle adopté, estimer la valeur du moment en M autour de $\vec{y}_6$ correspondant à un effort de traction T . Est-elle en cohérence avec les capacités de chargement données dans la documentation du robot (Annexe D)? Si non, expliquer les sources d'incohérence.

Le système de fixation est *mis en position* par un plan d'appui et des pions de centrage, et il est *maintenu en position* par un système de bille de la figure 17 du sujet qui exerce un effort T plaquant les plans l'un contre l'autre. La force T correspond à la force d'arrachement et doit être proche de la traction maximale $T = 5340 \text{ N}$ indiquée dans le sujet.

Lorsqu'un moment M_y est transmis au travers du système de verrouillage, il va tendre à décoller le plan d'appui, par une rotation autour de K (figure 23). Dans une situation limite, si le contact effectif n'est plus réalisé qu'au point K , la relation entre T et M_y s'écrit $M_y = \frac{D}{2} T$.

FIGURE 23 – Modèle établissant une relation entre T et M_y .

Le diamètre D n'est pas indiqué sur le dessin technique mais la largeur total étant de 160 mm, on peut considérer $D = 160$ mm. Le moment maximal transmissible serait alors :

$$M_y = \frac{D}{2}T \simeq 80 \text{ mm} \times 5340 \text{ N} \simeq 430 \text{ N} \cdot \text{m}$$

La capacité de charge indiquée dans l'annexe D vaut $M_y = 2490 \text{ N} \cdot \text{m}$ ce qui est supérieur à la valeur calculée d'un facteur 6. Il est probable que la valeur de T indiquée ne corresponde pas à la limite d'arrachement.

Remarque : le calcul de la question 5.6 conduit à une pression de 1 bar pour une force de traction de 500 N. La pression pouvant aller jusqu'à 6,9 bars, cela conduit à une force maximale de traction $T \simeq 3500 \text{ N}$ ce qui est là aussi bien inférieur à la valeur indiquée pour la capacité de chargement de $T = 5340 \text{ N}$.