

Proposition de corrigé

Concours : Banque PT

Année : 2024

Filière : PT

Épreuve : Sciences Industrielles A

Ceci est une proposition de corrigé des concours de CPGE, réalisée bénévolement par des enseignants de Sciences Industrielles de l'Ingénieur et d'Informatique, membres de l'[UPSTI](https://www.upsti.fr) (Union des Professeurs de Sciences et Techniques Industrielles), et publiée sur le site de l'association :

<https://www.upsti.fr/espace-etudiants/annales-de-concours>

A l'attention des étudiants

Ce document vous apportera des éléments de corrections pour le sujet traité, mais n'est ni un corrigé officiel du concours, ni un corrigé détaillé ou exhaustif de l'épreuve en question.

L'UPSTI ne répondra pas directement aux questions que peuvent soulever ces corrigés : nous vous invitons à vous rapprocher de vos enseignants si vous souhaitez des compléments d'information, et à vous adresser à eux pour nous faire remonter vos éventuelles remarques.

Licence et Copyright

Toute représentation ou reproduction (même partielle) de ce document faite sans l'accord de l'UPSTI est **interdite**. Seuls le téléchargement et la copie privée à usage personnel sont autorisés (protection au titre des [droits d'auteur](#)).

En cas de doute, n'hésitez pas à nous contacter à : corrigesconcours@upsti.fr.

Informez-vous !

Retrouvez plus d'information sur les [Sciences de l'Ingénieur](#), l'[orientation](#), les [Grandes Ecoles](#) ainsi que sur les [Olympiades de Sciences de l'Ingénieur](#) et sur les [Sciences de l'Ingénieur au Féminin](#) sur notre site : www.upsti.fr

L'équipe UPSTI

Grande Salle P. BOULEZ Philharmonie de Paris

Corrigé UPSTI

ETUDE DU PARTERRE ESCAMOTABLE

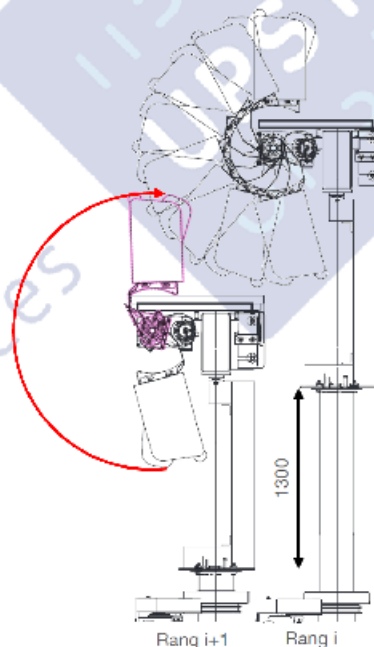
1 Étude du parterre escamotable

1.1 Structure du gradinage

- Objectif -

Dans cette première partie, on étudie le passage d'un parterre en configuration debout (pas de gradin) à un parterre en configuration assise .

Question 1 Justifier par un tracé sur le cahier réponses qu'il n'est pas possible de retourner les sièges du rang i à la hauteur $H_i^{rot} = 1300$ mm si les sièges du rang $i + 1$ sont en position levée.



Il y a interférence entre les sièges, on ne peut pas tourner les sièges du rang i si les sièges du rang $i + 1$ sont levés.

Question 2 Calculer H_{11}^{fin} en fin de gradinage complet. Est-il possible d'utiliser le même mécanisme de levage pour tous les rangs ?

$$H_{11}^{fin} = 200 \times 10 = 2000 \text{ mm}$$

La diversité des courses impose l'utilisation de mécanismes différents.
Risque de flambage de la tige du vérin pour les plus grandes courses.

1.2 Cycle d'ouverture

Question 3 Quelle est la durée T_{mep} ? Calculer uniquement pour le rang 6 la durée T_6 de l'étape de « positionnement final ». On suppose que $T_{moy} = T_6$ est la durée moyenne de cette étape. En déduire le temps de déploiement total des 11 rangs et conclure vis-à-vis du cahier des charges. Toutes les applications numériques sont demandées avec un chiffre significatif.

Etat	Durée (seconde)
Mise en position	$T_{mep} = 108$ s
Retournement sièges	$t_r = 15$ s
Positionnement final (calculé au rang 6 de durée moyenne)	$T_6 = T_{moy} = 48$ s
Durée totale	$T_{tot} = 1881$ s

$$T_{mep} = \frac{H_s}{v_z}$$

$$T_6 = \frac{|H^s - H_6^{fin}|}{v_z}$$

$$T_{tot} = 11 \cdot (T_{mep} + t_r + T_6)$$

AN :

$$H_6 = (6 - 1) \times 200 = 1000 \text{ mm}$$

$$T_6 = \frac{|1000 - 1800|}{1000/60} = 48 \text{ s}$$

$$T_{tot} = 11 \times (108 + 15 + 48) = 1881 \text{ s}$$

Conclusion : $T_{tot} > 10mn$. L'exigence « changer rapidement la configuration du parterre » n'est pas respectée.

Question 4 En 10 lignes maximum, compléter les lignes 23 et 24 du code ci-dessus pour construire les deux listes nécessaires pour déplacer l'ensemble des rangs en position finale lors de l'état "positionnement final".

```

1 Hfinal = [(k - 1) * 200 for k in range(1, 12)] # rang 1 hauteur 200, rang 2 hauteur 400...
2 Rtot   = [k for k in range(1, 12)] # on déplace les rangs 1 à 11
3

```

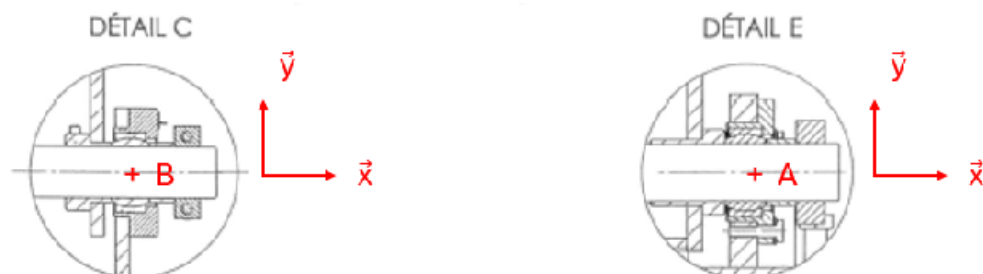
2 Modélisation d'un module de gradinage d'orchestre

2.1 Modélisation des liaisons

2.1.1 Modélisation d'une penture

Question 5 À partir du plan (détail E de la vue en coupe A-A Figure 36) et après avoir analysé la géométrie des contacts, proposer une modélisation simple des 2 liaisons (en parallèle) entre le bâti 0 et le caisson P1. Que dire de la liaison entre le caisson P2 et plateforme 3 (détail D de la vue en coupe A-A Figure 36) ? À partir du plan (détail C de la vue en coupe B-B sur Figure 36) et après avoir analysé la géométrie des contacts, proposer une modélisation simple des 4 liaisons (en parallèle) entre les deux caissons P1 et P2.

Solides	Nature de la géométrie de(s)contact(s)	Liaison normalisée
Entre 0 et P_1	Sphère \ sphère	Sphérique
Entre 0 et P_1	Sphère \ sphère	Sphérique
Entre P_1 et P_2	Sphère \ sphère	Sphérique
Entre P_1 et P_2	Sphère \ sphère	Sphérique
Entre P_1 et P_2	Sphère \ sphère	Sphérique
Entre P_1 et P_2	Sphère \ sphère	Sphérique

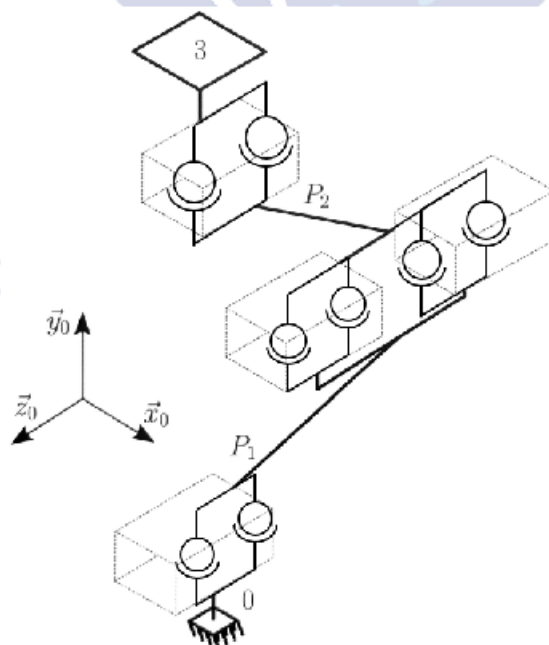


Liaison bâti 0 / caisson P1 : Pivot d'axe $(A, \vec{x})$

Liaison caisson P2 / plateforme P3 : Pivot d'axe $(C, \vec{x})$

Liaison caisson P1 / caisson P2 : Pivot d'axe $(B, \vec{x})$

Question 6 Compléter le schéma cinématique partiel 3D du cahier réponses en faisant apparaître les huit liaisons proposées.

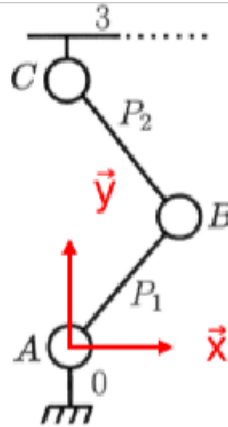


Question 7 Donner (sans démonstration) la liaison équivalente entre le bâti 0 et le caisson P1. La liaison entre le caisson P2 et la plateforme 3 est de même type.

De même, donner (sans démonstration) la liaison équivalente entre les caissons P1 et P2.

Dessiner alors le schéma cinématique minimal en 2D.

La liaison équivalente entre le bâti 0 et le caisson P1 est une liaison pivot. Idem pour les deux autres liaisons demandées



2.2 Validation de la cinématique de la plateforme

2.2.1 Association de deux pentures

Question 8 Déterminer (par le calcul) la liaison équivalente entre la plateforme 3 et le bâti 0 réalisée par une penture.

Indiquer (sans calculs) la liaison équivalente entre la plateforme 3 et le bâti 0 réalisée par les deux pentures en parallèle.

La chaîne cinématique (0-1-2-3) est constituée de liaisons pivots en série :

- Liaison entre 1 et 0 :

$$\mathcal{C}_{(1/0)} = \left\{ \begin{array}{c} \dot{\theta}_{P_1} \vec{z}_0 \\ 0 \end{array} \right\}_A = \left\{ \begin{array}{c} \dot{\theta}_{P_1} \vec{z}_0 \\ L_P \dot{\theta}_{P_1} \vec{y}_1 \end{array} \right\}_B$$

- Liaison entre 2 et 1 :

$$\mathcal{C}_{(2/1)} = \left\{ \begin{array}{c} \dot{\theta}_{P_2} \vec{z}_0 \\ 0 \end{array} \right\}_B$$

- Liaison entre 3 et 2 :

$$\mathcal{C}_{(3/2)} = \left\{ \begin{array}{c} \dot{\theta}_{P_3} \vec{z}_0 \\ 0 \end{array} \right\}_C = \left\{ \begin{array}{c} \dot{\theta}_{P_3} \vec{z}_0 \\ -L_P \dot{\theta}_{P_3} \vec{y}_2 \end{array} \right\}_B$$

La liaison équivalente entre 3 et 0 admet comme torseur cinématique :

$$\mathcal{C}_{(3/0)} = \left\{ \begin{array}{c} (\dot{\theta}_{P_1} + \dot{\theta}_{P_2} + \dot{\theta}_{P_3}) \vec{z}_0 \\ L_P \dot{\theta}_{P_3} \cos \theta_{P_2} \vec{x}_1 + L_P \dot{\theta}_{P_1} - L_P \dot{\theta}_{P_3} \sin \theta_{P_2} \vec{y}_1 \end{array} \right\}_B$$

Ce torseur est celui d'une liaison appui plan de normale $\vec{z}_0$.

La liaison équivalente avec deux pentures en parallèle est également un appui plan de normale $\vec{z}_0$.

Question 9 Y a-t-il un intérêt cinématique à disposer de deux pentures en parallèle plutôt qu'une seule ? Deux pentures non motorisées en parallèle permettent-elles d'assurer l'horizontalité de la plateforme ?

Le débattement permis permet-il de vérifier le cahier des charges ?

Quel peut alors être l'intérêt mécanique de ces structures pentures ?

Pas d'intérêt cinématique : mouvement non maîtrisé. L'horizontalité du plateau 3 n'est pas garantie. De plus, d'après Q.8, il n'y a pas de modification de la liaison entre 3 et 0.

Le débattement angulaire permet de vérifier le critère de débattement du cahier des charges ($2L_p = 2600 \text{ mm} > 1200 \text{ mm}$).

Ces structures en penture permettraient d'augmenter la rigidité suivant la direction normale au plan considéré.

2.2.2 Structure ciseaux

Question 10 Quelle est la particularité géométrique du quadrilatère HEDG ? En déduire sans calcul la caractéristique du mouvement de la plateforme 3 par rapport au bâti 0 ? Quel est l'intérêt cinématique d'une structure ciseaux ?

Le quadrilatère HEDG est un rectangle déformable.

La plateforme 3 est animée d'une translation rectiligne de direction $\vec{y}_0$ par rapport au bâti 0.

L'intérêt d'une structure ciseaux est d'obtenir un mouvement de translation verticale.

Remarque :

Numérotation différente entre les fig 21 et 22 : inversion 1/2 et g_1/g_2

Question 11 Écrire les fermetures géométriques des deux chaînes (0-1-2- g_2) et (3- g_1 -1-2) et exprimer $\vec{ED}$ en fonction d'un unique paramètre ainsi que θ_2 en fonction de θ_1 .

$$\begin{aligned} \text{Fermeture géométrique (0-1-2-}g_2\text{)} : \vec{HF} + \vec{FG} + \vec{GH} &= \vec{0} \\ \Leftrightarrow \frac{L_b}{2}\vec{x}_1 - \frac{L_b}{2}\vec{x}_2 - \lambda\vec{x}_0 &= \vec{0} \end{aligned}$$

En projetant sur $\vec{x}_0$ et $\vec{y}_0$ cette dernière relation vectorielle, il vient :

$$\begin{cases} \frac{L_b}{2} \cos \theta_1 - \frac{L_b}{2} \cos \theta_2 - \lambda = 0 \\ \frac{L_b}{2} \sin \theta_1 - \frac{L_b}{2} \sin \theta_2 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \text{Fermeture géométrique (3-}g_1\text{-1-2)} : \vec{EF} + \vec{FD} + \vec{DE} &= \vec{0} \\ \Leftrightarrow -\frac{L_b}{2}\vec{x}_2 + \frac{L_b}{2}\vec{x}_1 - \vec{ED} &= \vec{0} \end{aligned}$$

$$\text{Donc } \vec{ED} = \lambda\vec{x}_0$$

$$\begin{cases} \cos \theta_1 - \cos \theta_2 = \frac{2\lambda}{L_b} \\ \sin \theta_1 - \sin \theta_2 = 0 \end{cases}$$

Les solutions possibles sont :

$$\theta_2 \equiv \theta_1[2\pi] \text{ ou } \theta_2 \equiv \pi - \theta_1[2\pi]$$

La première solution n'est pas envisageable car λ serait nul.

On a donc :

$$\theta_2 \equiv \pi - \theta_1[2\pi]$$

Question 12 Quel encombrement horizontal prévoir pour une telle structure ciseaux de débattement vertical imposé ? Quelle solution visible en figure 16 et figure 17 est utilisée au niveau supérieur et pour quelle raison ?

L'encombrement horizontal est du même ordre de grandeur que le débattement vertical. Sur les fig. 16 et 17, l'encombrement horizontal est réduit en utilisant 2 structures en série : l'une au-dessus de l'autre pour doubler le débattement vertical à encombrement horizontal identique.

Question 13 Exprimer les torseurs cinématiques $\mathcal{V}_{(1/0)}$, $\mathcal{V}_{(2/1)}$, $\mathcal{V}_{(2/g_2)}$, et $\mathcal{V}_{(g_2/0)}$. Écrire la fermeture cinématique de chaîne 0-1-2- g_2 . En déduire l'équation vectorielle de vitesse au point F.

$$\begin{aligned}\mathcal{V}_{(1/0)} &= \left\{ \begin{array}{c} \dot{\theta}_1 \vec{z}_0 \\ \vec{0} \end{array} \right\}_H \\ \mathcal{V}_{(2/1)} &= \left\{ \begin{array}{c} (\dot{\theta}_2 - \dot{\theta}_1) \vec{z}_0 \\ \vec{0} \end{array} \right\}_F \\ \mathcal{V}_{(2/g_2)} &= \left\{ \begin{array}{c} \dot{\theta}_2 \vec{z}_0 \\ \vec{0} \end{array} \right\}_G \\ \mathcal{V}_{(g_2/0)} &= \left\{ \begin{array}{c} \vec{0} \\ \dot{\lambda} \vec{x}_0 \end{array} \right\}_G\end{aligned}$$

La fermeture cinématique (0-1-2- g_2) donne :

$$\mathcal{V}_{(2/0)} = \mathcal{V}_{(g_2/2)} + \mathcal{V}_{(2/1)} + \mathcal{V}_{(1/0)}$$

L'équation vectorielle de vitesse au point F est :

$$\vec{V}_{F \in G_2/0} = \vec{V}_{F \in G_2/2} + \vec{V}_{F \in 2/1} + \vec{V}_{F \in 1/0}$$

c'est à dire :

$$\dot{\lambda} \vec{x}_0 = -\frac{L_b}{2} \dot{\theta}_2 \vec{y}_2 + \frac{L_b}{2} \dot{\theta}_1 \vec{y}_1$$

2.3 Modélisation globale

2.3.1 Première modélisation

Question 14 Exprimer $V_{30}(t)$ et $\lambda(t)$ en fonction de $\theta_1(t)$ et de la géométrie du système. En déduire une relation liant $\dot{\lambda}(t)$ et $\dot{V}_{30}(t)$ indépendante de $\theta_1(t)$.

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}(\overrightarrow{HE}) &= \frac{d}{dt}(\overrightarrow{HD} + \overrightarrow{DE}) \\ &= \frac{d}{dt}(L_b \vec{x}_1 - \lambda \vec{x}_0) \\ &= -\dot{\lambda} \vec{x}_0 + L_b \dot{\theta}_1 \vec{y}_1\end{aligned}$$

On projette ces deux équations sur $\vec{x}_0$ et $\vec{y}_0$:

$$V_{30} = L_b \dot{\theta}_1 \cos \theta_1 \quad (1)$$

$$\dot{\lambda} = -L_b \dot{\theta}_1 \sin \theta_1 \quad (2)$$

En effectuant le rapport $\frac{(2)}{(1)}$, il vient :

$$\frac{\dot{\lambda}}{V_{30}} = -\tan \theta_1$$

Question 15 Déterminer le degré d'hyperstatisme de cette modélisation en considérant que le problème est tridimensionnel.

$$N_P = 10$$

$$I_S = 5 \times 15 = 75$$

$$m_u = 1$$

Il n'y a pas de mobilité interne : $m_i = 0$

$$E_S = 6(N_P - 1) = 54$$

$$h = m - E_S + I_S = 22$$

Le système est hyperstatique de degré 22 .

Question 16 Déterminer le degré d'hyperstatisme de cette modélisation en considérant maintenant que le problème est bidimensionnel. Comment expliquer les différences avec la valeur d'hyperstatisme en 3D calculée à la question précédente ?

$$N_P = 10$$

$$I_S = 2 \times 15 = 30$$

$$m_u = 1 \text{ et } m_i = 0$$

$$E_S = 3(N_P - 1) = 27$$

$$h = m - E_S + I_S = 4$$

Le système est hyperstatique de degré 4 .

Les résultantes normales au plan ainsi que les moments suivant les directions dans le plan sont nuls. Le rang du système diminue.

2.3.2 Évolution de la modélisation vers un isostatisme

Question 17 Quel composant visible en Annexe B2 Figure 39 permet de justifier la possibilité d'une rotation dans la liaison de chaque tige de vérin Ti avec la plateforme supérieure 3 ?

Le coussinet en néoprène permet de justifier la possibilité d'une rotation dans la liaison de chaque tige de vérin Ti avec la plateforme supérieure 3.

2.4 Modélisation globale

2.4.1 Isolement des éléments d'une penture

Question 18 Par un isolement simple mais rigoureusement justifié, sous l'hypothèse de problème plan, donner la direction du glisseur appliqué par le caisson inférieur P1 sur le caisson supérieur P2.

Par un raisonnement similaire, donner la direction du glisseur appliqué par le caisson supérieur P2 sur le caisson

inférieur P_1 .

Indiquer ces directions sur le schéma cinématique partiel du cahier réponses.

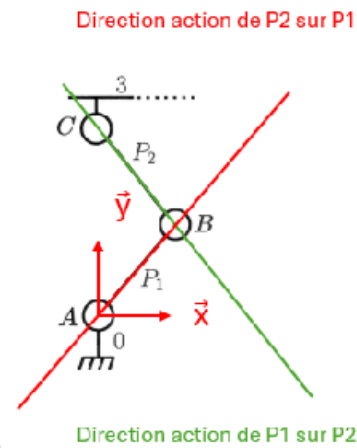
En déduire la valeur de l'effort transmis entre les deux caissons P_1 et P_2 .

Conclure sur la capacité d'une penture à transmettre un effort entre la plateforme 3 et le bâti 0 dans le plan $(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0)$.

On isole P_2 . P_2 est soumis à 2 glisseurs de direction (BC).

Idem avec P_1 : glisseurs de direction (AB).

Les efforts ne peuvent être que nuls. La penture ne transmet pas d'efforts entre la plateforme 3 et le bâti 0 dans le plan $(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0)$.



2.4.2 Bilan

Question 19 Par des raisonnements similaires qu'il n'est pas nécessaire de préciser, indiquer sur le tableau du cahier réponses quelle(s) structure(s) permet(tent) de transmettre chacune des actions mécaniques entre la plateforme 3 et le bâti 0 : F_X (effort suivant $\vec{x}_0$), F_Y (effort suivant $\vec{y}_0$), F_Z (effort suivant $\vec{z}_0$) et M_X (moment suivant $\vec{x}_0$), M_Y (moment suivant $\vec{y}_0$), M_Z (moment suivant $\vec{z}_0$). On entourera les cas correspondants. Conclure sur le choix de l'association de pentures, ciseaux et vérins.

Action mécanique 3 $\rightarrow$ 0 reprise par...	... les pentures	... les ciseaux	... les vérins
Effort suivant $\vec{x}_0$: F_X	oui non	oui non	oui non
Effort suivant $\vec{y}_0$: F_Y	oui non	oui non	oui non
Effort suivant $\vec{z}_0$: F_Z	oui non	oui non	oui non
Moment suivant $\vec{x}_0$: M_X	oui non	oui non	oui non
Moment suivant $\vec{y}_0$: M_Y	oui non	oui non	oui non
Moment suivant $\vec{z}_0$: M_Z	oui non	oui non	oui non

L'association des pentures, ciseaux et vérins permet de transmettre l'ensemble des actions mécaniques.

3 Dimensionnement des actionneurs

3.1 Calcul des énergies cinétiques mises en jeu

Question 20 À partir de l'analyse de ses caractéristiques géométriques, préciser la forme de la matrice d'inertie d'un caisson de penture P_1 au centre de gravité G_{P_1} dans la base $\mathcal{B}_1 = (\vec{x}_{P_1}, \vec{y}_{P_1}, \vec{z}_0)$

Le plan $(G_{P_1}, \vec{x}_{P_1}, \vec{y}_{P_1})$ est plan de symétrie matérielle.

La matrice d'inertie d'un caisson de penture P_1 au centre de gravité G_{P_1} dans la base $\mathcal{B}_1 = (\vec{x}_{P_1}, \vec{y}_{P_1}, \vec{z}_0)$ a pour forme :

$$I(G_{P_1}, P_1) = \begin{bmatrix} A & -F & 0 \\ -F & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{bmatrix}$$

Question 21 Donner l'énergie cinétique de la plateforme 3 dans son mouvement par rapport au bâti 0, notée $Ec(3/0)$, en fonction de $\delta(t)$ et des paramètres de masse et de géométrie.

$$\begin{aligned} Ec(3/0) &= \frac{1}{2} m_3 \vec{v}_{G \in 3/0}^2 \\ &= \frac{1}{2} \frac{\rho_D}{g} l_3 L_3 \dot{\delta}^2 \end{aligned}$$

Question 22 Que dire de l'énergie cinétique des éléments de la structure ciseaux dans leurs mouvements par rapport au bâti 0 ?

Les masses et inerties des éléments considérés sont négligeables. Leur énergie cinétique respective peut être considérée comme nulle.

Question 23 Préciser les éléments de réduction du torseur cinétique $\mathcal{C}(P_1/0)$ en son centre de gravité G_{P_1} . Déterminer l'énergie cinétique du caisson de penture P_1 dans son mouvement par rapport au bâti 0, notée $Ec(P_1/0)$, en fonction de $\dot{\theta}_{P_1}$ et des paramètres de masse et de géométrie.

$$\mathcal{C}(P_1/0) = \left\{ \begin{array}{c} m_{P_1} \vec{v}_{G_{P_1}} \\ \vec{\sigma}(G_{P_1}, P_1/0) \end{array} \right\}_{G_{P_1}}$$

avec :

$$\begin{aligned} \vec{v}_{G_{P_1}} &= \frac{1}{2} L_P \dot{\theta}_{P_1} \vec{y}_1 \\ \vec{\sigma}(G_{P_1}, P_1/0) &= I_P \dot{\theta}_{P_1} \vec{z}_0 \\ Ec(P_1/0) &= \frac{1}{2} m_{P_1} \left(\frac{L_P}{2} \dot{\theta}_{P_1} \right)^2 + \frac{1}{2} I_P \dot{\theta}_{P_1}^2 \end{aligned}$$

Question 24 Préciser les éléments de réduction du torseur cinétique $\mathcal{C}(P_2/0)$ en son centre de gravité G_{P_2} . Déterminer l'énergie cinétique du caisson de penture P_2 dans son mouvement par rapport au bâti 0, notée $Ec(P_2/0)$, en fonction de $\dot{\theta}_{P_1}$, $\dot{\theta}_{P_2}$ et des paramètres de masse et de géométrie.

$$m_P \vec{v}_{G_{P_2}} = m_P \left[L_P \dot{\theta}_{P_1} \vec{y}_1 + \frac{L_P}{2} (\dot{\theta}_{P_1} + \dot{\theta}_{P_2}) \vec{y}_2 \right]$$

$$\vec{\sigma}(G_{P_2}, P_2/0) = I_P (\dot{\theta}_{P_1} + \dot{\theta}_{P_2}) \vec{z}_0$$

$$Ec(P_2/0) = \frac{1}{2} m_{P_2} \left\{ \left[\frac{L_P}{2} \dot{\theta}_{P_1} \right]^2 + \left[\frac{L_P}{2} (\dot{\theta}_{P_1} + \dot{\theta}_{P_2}) \right]^2 + L_P^2 \dot{\theta}_{P_1} (\dot{\theta}_{P_1} + \dot{\theta}_{P_2}) \cos \theta_{P_2} \right\} + \frac{1}{2} I_P (\dot{\theta}_{P_1} + \dot{\theta}_{P_2})^2$$

3.2 Calcul des puissances en jeu

Question 25 Déterminer la puissance de l'action motrice développée par le vérin : $\mathcal{P}_{T_1 \rightarrow 3/0}$.
Que dire de la puissance des actions mécaniques intérieures à Σ , notée $\mathcal{P}_{int}$?

$$\mathcal{P}_{T_1 \rightarrow 3/0} = F_v \dot{\delta}$$

Les liaisons sont parfaites :

$$\mathcal{P}_{int} = 0$$

Question 26 Déterminer la puissance des actions de pesanteur, notées $\mathcal{P}_{pes \rightarrow \Sigma/0}$ appliquées à Σ en fonction de $\dot{\delta}$, $\dot{\theta}_{P_1}$, $\dot{\theta}_{P_2}$ et des paramètres de masse et de géométrie.

$$\mathcal{P}_{pes \rightarrow \Sigma/0} = -m_p g \vec{y}_0 \cdot \vec{v}_{G_{P_1} \in \Sigma/0} - m_p g \vec{y}_0 \cdot \vec{v}_{G_{P_2} \in \Sigma/0} - \rho_D l_3 L_3 \dot{\delta}$$

$$\vec{v}_{G_{P_1} \in \Sigma/0} = \frac{1}{2} L_P \dot{\theta}_{P_1} \vec{y}_1$$

$$\vec{v}_{G_{P_2} \in \Sigma/0} = L_P \dot{\theta}_{P_1} \vec{y}_1 + \frac{L_P}{2} (\dot{\theta}_{P_1} + \dot{\theta}_{P_2}) \vec{y}_2$$

$$\mathcal{P}_{pes \rightarrow \Sigma/0} = \frac{-m_P}{2} g L_P \dot{\theta}_{P_1} \cos \theta_{P_1} - m_P g L_P \left[\dot{\theta}_{P_1} \cos \theta_{P_1} + \frac{1}{2} (\dot{\theta}_{P_1} + \dot{\theta}_{P_2}) \cos (\theta_{P_1} + \theta_{P_2}) \right] - \rho_D l_3 L_3 \dot{\delta}$$

$$\mathcal{P}_{pes \rightarrow \Sigma/0} = \frac{-3m_P}{2} g L_P \dot{\theta}_{P_1} \cos \theta_{P_1} - \frac{-m_P}{2} g L_P (\dot{\theta}_{P_1} + \dot{\theta}_{P_2}) \cos (\theta_{P_1} + \theta_{P_2}) - \rho_D l_3 L_3 \dot{\delta}$$

3.3 Loi de mouvement

Question 27 En précisant la relation vectorielle utilisée, prouver que $\delta = 2L_p \sin \theta_{P_1}$ et : $\theta_{P_2} = \pi - 2\theta_{P_1}$

Fermeture géométrique (ABC) : $\vec{AB} + \vec{BC} + \vec{CA} = \vec{0}$

En projetant sur $\vec{x}_0$ et $\vec{y}_0$ cette dernière relation vectorielle, il vient :

$$\begin{cases} L_p \cos (\theta_{P_1} + \theta_{P_2}) = -L_p \cos \theta_{P_1} \\ L_p \sin (\theta_{P_1} + \theta_{P_2}) = \delta - L_p \sin \theta_{P_1} \end{cases}$$

En élevant au carré et en sommant ces deux dernières équations scalaires, on obtient :

$$L_p^2 = L_p^2 + \delta^2 - 2L_p\delta \sin \theta_{P_1} \Leftrightarrow \delta(\delta - 2L_p \sin \theta_{P_1}) = 0$$

δ n'étant pas nul, on a bien : $\delta = 2L_p \sin \theta_{P_1}$

En injectant ce résultat dans le système précédent, il vient :

$$\begin{cases} \cos(\theta_{P_1} + \theta_{P_2}) = -\cos \theta_{P_1} = \cos(\pi - \theta_{P_1}) \\ \sin(\theta_{P_1} + \theta_{P_2}) = \sin \theta_{P_1} = \sin(\pi - \theta_{P_1}) \end{cases}$$

On en déduit : $\theta_{P_1} + \theta_{P_2} = \pi - \theta_{P_1} \Leftrightarrow \theta_{P_2} = \pi - 2\theta_{P_1}$

Question 28 Citer rigoureusement le théorème permettant d'obtenir la loi de mouvement, à savoir l'expression de l'effort moteur F_v en fonction des masse(s), longueur(s) et inertie(s) en jeu et des paramètres de mouvement $\delta(t)$ et $\dot{\delta}(t)$.

On applique le théorème de l'énergie cinétique au système Σ préalablement isolé.

$$\frac{d}{dt} (Ec(\Sigma/0)) = \mathcal{P}_{int} + \mathcal{P}_{ext \rightarrow \Sigma/0}$$

Question 29 Détailler les calculs permettant d'obtenir la loi de mouvement ainsi simplifiée, à savoir l'expression de l'effort moteur F_v en fonction des masse(s), longueur(s) et inertie(s) en jeu et des paramètres de mouvement $\delta(t)$ et $\dot{\delta}(t)$.

$$\frac{d}{dt} (Ec(\Sigma/0)) = \frac{\rho_D}{g} l_3 L_3 \dot{\delta} \ddot{\delta}$$

$$\mathcal{P}_{int} = 0$$

$$\mathcal{P}_{ext} = -\rho_D l_3 L_3 \dot{\delta} + 3F_v \dot{\delta}$$

On peut donc écrire :

$$\frac{\rho_D}{g} l_3 L_3 \dot{\delta} \ddot{\delta} = -\rho_D l_3 L_3 \dot{\delta} + 3F_v \dot{\delta}$$

On en déduit :

$$F_v = \frac{1}{3} \rho_D l_3 L_3 \left[1 + \frac{\ddot{\delta}}{g} \right]$$

4 Structure et dimensionnement d'une motorisation double

4.1 Modélisation de la double motorisation

Question 30 Donner la fonction de transfert équivalente de ce moteur en l'absence de couple résistant ($Cr(p) = 0$).

$$H(p) = \frac{\frac{K_{eq}}{R_{eq}} \cdot \frac{1}{Jp + f}}{1 + \frac{K_{eq}^2}{R_{eq}} \cdot \frac{1}{Jp + f}}$$

Mise sous forme canonique :

$$H(p) = \frac{\frac{K_{eq}}{K_{eq}^2 + fR_{eq}}}{1 + \frac{JR_{eq}}{K_{eq}^2 + fR_{eq}}p}$$

Question 31 Montrer qu'en l'absence de couple résistant ($C_r(p) = 0$) ce schéma-blocs est équivalent à celui d'une unique machine à courant continu telle que présentée Figure 29. On identifiera K_{eq} et R_{eq} en fonction de K et R .

Par lecture directe, on a :

$$\begin{aligned} 2 \frac{K}{R} (U - K\Omega) \frac{1}{Jp + f} &= \Omega \\ \Leftrightarrow 2 \frac{K}{R(Jp + f)} U &= 2 \left[\frac{K^2}{R(Jp + f)} + 1 \right] \Omega \\ \Leftrightarrow \frac{\Omega}{U} &= \frac{\frac{2K}{2K^2 + fR}}{1 + \frac{JR}{2K^2 + fR}p} \end{aligned}$$

Par identification, on obtient :

$$\begin{cases} \frac{K_{eq}}{K_{eq}^2 + fR_{eq}} = \frac{2K}{2K^2 + fR} \\ \frac{JR_{eq}}{K_{eq}^2 + fR_{eq}} = \frac{JR}{2K^2 + fR} \end{cases}$$

Au final :

$$\begin{cases} K_{eq} = K \\ R_{eq} = \frac{R}{2} \end{cases}$$

Question 32 Que deviennent ces valeurs en cas de panne d'un moteur ? On considèrera par exemple que $K = 0$ pour un des deux moteurs seulement. Comment le fonctionnement général du système est-il impacté ?

$$K_{eq} = K$$

$$R_{eq} = R$$

Le système fonctionne comme si il n'y avait qu'un seul moteur installé.

4.2 Contrôle de la vitesse

Question 33 Déterminer le temps de réponse à 5% de ce système. L'exigence de rapidité est-elle respectée ? Qu'en est-il de celle associée à la présence de dépassement ?

Le système est modélisé par un 1er ordre :

$$tr_{5\%} = 3 \frac{JR_{eq}}{K^2_{eq} + f \cdot R_{eq}}$$

$$A.N : tr_{5\%} = 8.10^{-3}s < 0.1s$$

L'exigence de rapidité est respectée.

Le système est modélisé par un 1er ordre : il n'y a pas de dépassement.

L'exigence de dépassement est respectée.

Question 34 Pour une tension d'entrée maximale $U_{eq} = U_M = 540V$ et un chargement maximal $C_r = -10Nm$, quelle est la vitesse de rotation du moteur en régime permanent ? Le cahier des charges est-il respecté ?

$$\begin{aligned}\Omega_m(p) &= \frac{\frac{K_{eq}}{K_{eq}^2 + fR_{eq}}}{1 + \frac{JR_{eq}}{K_{eq}^2 + fR_{eq}}p} U_{eq}(p) + \frac{\frac{R_{eq}}{K_{eq}^2 + fR_{eq}}}{1 + \frac{JR_{eq}}{K_{eq}^2 + fR_{eq}}p} C_r(p) \\ &= \frac{K_v}{1 + JK_{pert}p} U_{eq}(p) + \frac{K_{pert}}{1 + JK_{pert}p} C_r(p)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lim_{t \rightarrow +\infty} \omega_m(t) &= \lim_{p \rightarrow 0} p \cdot \Omega_m(p) \\ &= K_v U_{eq} + K_{pert} C_r\end{aligned}$$

A.N :

$$\omega(+\infty) = 0.3 \times 540 = 3.10$$

$$\omega(+\infty) = 132 \text{ rad.s}^{-1} \text{ soit } 1260 \text{ tr.min}^{-1}$$

$$\omega(+\infty) > 1400 \times 0.8 = 1120 \text{ tr.min}^{-1}$$

Le cahier des charges est respecté.

4.3 Asservissement en position

Question 35 Donner l'expression du gain K_{adapt} à partir des fonctions de transfert des autres blocs du schéma de la Figure 31 afin que l'écart $\varepsilon(p)$ soit bien nul lorsque la consigne est atteinte.

Le système est correctement asservi si :

$$\begin{cases} Z_c(p) = Z(p) \\ \varepsilon(p) = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow Z_c(p) K_{adapt} - \frac{2\pi}{pas \cdot r_1 \cdot r_2 \cdot r_3} \cdot K_{capt} Z(p) = 0$$

$$\Rightarrow K_{adapt} = \frac{2\pi}{pas \cdot r_1 \cdot r_2 \cdot r_3} \cdot K_{capt}$$

Question 36 Quelle est la classe minimale du correcteur $C_z(p)$ permettant d'annuler l'erreur statique pour une entrée en échelon ? Qu'en est-il de celle permettant d'annuler le critère d'erreur statique pour un chargement $C_r = -10 \text{ Nm}$? Justifier individuellement chaque réponse. Citer le nom d'un correcteur permettant d'annuler ces deux erreurs.

La FTBO est de classe 1 et d'ordre 2. La classe minimale du correcteur $C_z(p)$ permettant d'annuler l'erreur statique pour une entrée en échelon est une classe 0.

Une intégration placée en amont de la perturbation permet de respecter le critère d'erreur statique pour une perturbation de type échelon. La classe minimale du correcteur $C_z(p)$ doit être de 1.

Un correcteur de type PI permet d'annuler les deux erreurs.

Question 37 Montrer que $Z(p)$ peut prendre la forme indiquée dans l'énoncé.

Par superposition :

$$Z(p) = \frac{C_z \frac{1}{p} r \frac{K_v}{1 + \tau_v p}}{1 + K_{capt} C_z \frac{K_v}{1 + \tau_v p}} K_{adapt} Z_c(p) + \frac{\frac{K_{pert}}{K_v} \frac{1}{p} r \frac{K_v}{1 + \tau_v p}}{1 + K_{capt} C_z \frac{K_v}{1 + \tau_v p}} C_r(p)$$

$$Z(p) = \frac{C_z K_v K_{capt}}{p(1 + \tau_v p) + C_z K_v K_{adapt}} Z_c(p) + \frac{r K_{pert}}{p(1 + \tau_v p) + C_z K_v K_{adapt}} C_r(p)$$

Question 38 Donner littéralement l'expression de la valeur maximale de K_p permettant de respecter le critère de dépassement.

S'il n'y a aucun dépassement, le coefficient d'amortissement : $\xi \geq 1$

La forme canonique de $Z(p)$ est :

$$Z(p) = \frac{1}{1 + \frac{1}{K_v K_p K_{capt}} p + \frac{\tau_v}{K_v K_p K_{capt}} p^2} Z_c(p) + \frac{\frac{r K_{pert}}{K_v K_p K_{capt}}}{1 + \frac{1}{K_v K_p K_{capt}} p + \frac{\tau_v}{K_v K_p K_{capt}} p^2} C_r(p)$$

$$\begin{cases} \frac{1}{\omega_0^2} = \frac{\tau_v}{K_v K_p K_{capt}} \\ \frac{2\xi}{\omega_0} = \frac{1}{K_v K_p K_{capt}} \end{cases}$$

On en déduit les valeurs des paramètres caractéristiques :

$$\begin{cases} \omega_0 = \sqrt{\frac{1}{\tau_v} K_v K_p K_{capt}} \\ \xi = \frac{1}{2\sqrt{\tau_v K_v K_p K_{capt}}} \end{cases}$$

$$\xi \geq 1 \Leftrightarrow \frac{1}{2\sqrt{\tau_v K_v K_p K_{capt}}} \geq 1$$

$$K_p \leq \frac{1}{\underbrace{4\tau_v K_v K_{capt}}_{K_{pmax}}}$$

A.N :

$$K_{pmax} = \frac{1}{4 \times 3.10^{-3} \times 0,3} \simeq 278$$

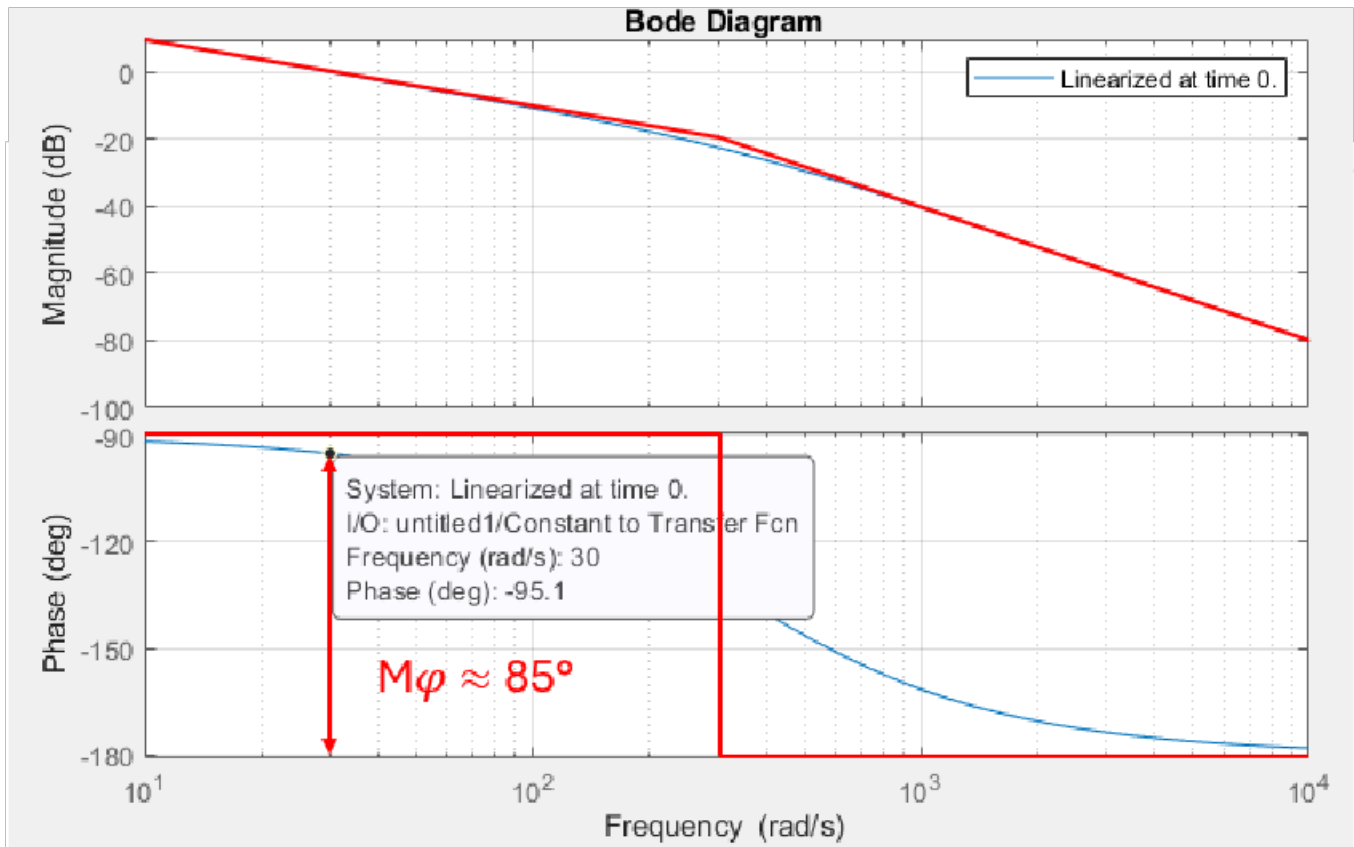
Question 39 Donner littéralement l'expression de la valeur minimale de K_p permettant de respecter le critère d'erreur statique pour un chargement C_r donné.

$$\left| \frac{r K_{pert} C_r}{K_v K_p K_{capt}} \right| \leq 1 \Leftrightarrow K_p \geq \left| \frac{r K_{pert} C_r}{K_v K_{capt}} \right|$$

A.N :

$$K_p > \frac{0.5 \times 3 \times 10}{0,3} \Leftrightarrow K_p > 50$$

Question 40 Tracer sur le document réponse le diagramme de Bode asymptotique de la fonction de transfert $FTBO_2$. On fera apparaître les points particuliers, notamment la pulsation de cassure ω_c et la pulsation de coupure à 0 dB notée ω_{0dB} dont on donnera les valeurs numériques avec 1 chiffre significatif.



$$\omega_{0dB} = 30 \text{ rad.s}^{-1}$$

$$\omega_c = 300 \text{ rad.s}^{-1} \text{ (1 chiffre significatif)}$$

$$M\varphi = 85^\circ$$

MG infinie

Question 41 Tracer sur le graphique de la question précédente l'allure des courbes réelles et en déduire l'ordre de grandeur des marges. Calculer ensuite la valeur de la marge de phase, les approximations numériques effectuées seront justifiées. On rappelle que pour un petit angle θ , $\arctan \theta \approx \theta$. Le cahier des charges est-il respecté ?

$$M\varphi = \text{Arg}(FTBO_2(j\omega_{0dB})) + 180^\circ$$

$$FTBO_2(j\omega) = \frac{30}{j\omega(1 + 30 \cdot 10^{-3} j\omega)}$$

$$\text{Arg}[FTBO_2(j\omega)] = -90 - \arctan(3 \times 10^{-3} \omega)$$

$$M\varphi = -90 - 9 \times 10^{-2} + 180$$

$$M\varphi = 89.91^\circ$$

Question 42 Sur quelle performance du cahier des charges la saturation influe-t-elle ? Conclure quant au respect du cahier des charges complet.

La saturation influe sur la durée d'élévation de la plateforme, donc sur la rapidité.

Critère	Validation		Justification
Durée d'élévation d'une plateforme sur 2000 mm	oui	non	$t_{r5\%} = 25,8s$
Erreur statique pour un échelon de 2000 mm	oui	non	$z_{\infty} > 1999 \text{ mm}$
Erreur statique pour un chargement $C_r = -10 \text{ Nm}$	oui	non	$z_{\infty} > 1999 \text{ mm}$
Dépassement	oui	non	$z < 2000 \text{ mm}, \forall t$
Marge de phase	oui	non	Q.41
Marge de gain	oui	non	Q.41

