

Proposition de corrigé

Concours : Concours Commun Mines-Ponts

Année : 2013

Filière : MP

Épreuve : Sciences Industrielles pour l'Ingénieur

Ceci est une proposition de corrigé des concours de CPGE, réalisée bénévolement par des enseignants de Sciences Industrielles de l'Ingénieur et d'Informatique, membres de l'[UPSTI](http://www.upsti.fr) (Union des Professeurs de Sciences et Techniques Industrielles), et publiée sur le site de l'association :

<https://www.upsti.fr/espace-etudiants/annales-de-concours>

A l'attention des étudiants

Ce document vous apportera des éléments de corrections pour le sujet traité, mais n'est ni un corrigé officiel du concours, ni un corrigé détaillé ou exhaustif de l'épreuve en question.

L'UPSTI ne répondra pas directement aux questions que peuvent soulever ces corrigés : nous vous invitons à vous rapprocher de vos enseignants si vous souhaitez des compléments d'information, et à vous adresser à eux pour nous faire remonter vos éventuelles remarques.

Licence et Copyright

Toute représentation ou reproduction (même partielle) de ce document faite sans l'accord de l'UPSTI est **interdite**. Seuls le téléchargement et la copie privée à usage personnel sont autorisés (protection au titre des [droits d'auteur](#)).

En cas de doute, n'hésitez pas à nous contacter à : corrigesconcours@upsti.fr.

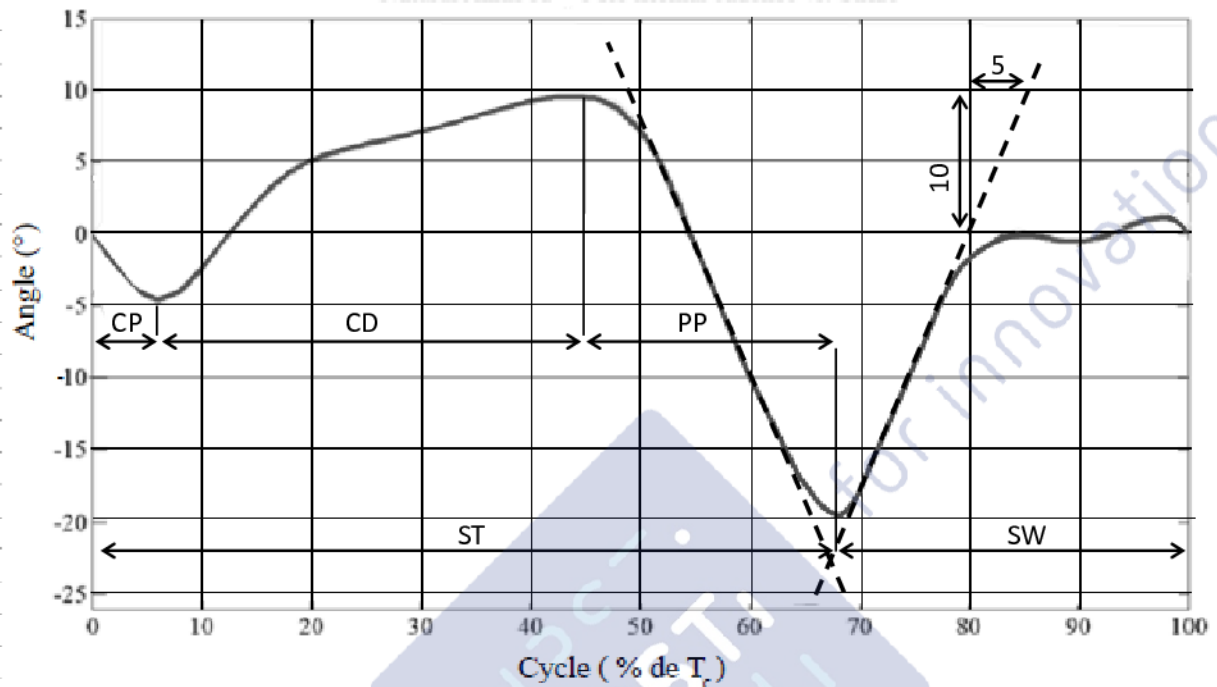
Informez-vous !

Retrouvez plus d'information sur les [Sciences de l'Ingénieur](#), l'[orientation](#), les [Grandes Ecoles](#) ainsi que sur les [Olympiades de Sciences de l'Ingénieur](#) et sur les [Sciences de l'Ingénieur au Féminin](#) sur notre site : www.upsti.fr

L'équipe UPSTI

Analyse de l'ensemble transtibial lors de la marche

Question 1.



Détermination de $\left| \frac{d\theta}{dt} \right|_{\max}$

Les pentes en pointillés ci-dessus ont des valeurs absolues à peu près identiques.

Elles sont maximales sur le tracé complet.

Le temps de cycle T_c est égal en marche normale à $\frac{2 \times 60}{105} = 1,14 \text{ s}$.

Copie MP page 1/16

On en déduit $\left| \frac{d\theta}{dt} \right|_{\max} \approx \frac{10}{5} \times \frac{100}{T_c} \approx 175^\circ/\text{s} \approx 3,1 \text{ rad/s}.$

$$\left| \frac{d\theta}{dt} \right|_{\max} = 3,1 \text{ rad.s}^{-1}$$

Définition du cahier des charges

Question 2.

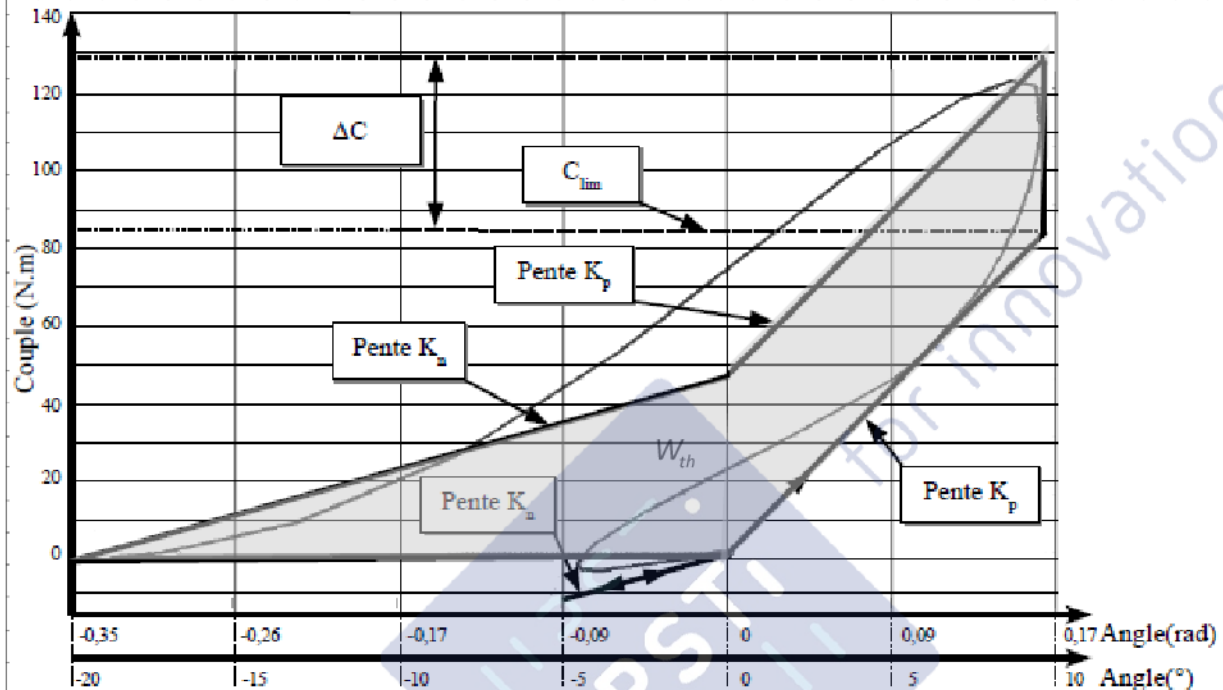
Critères	Valeurs du CDC	Valeurs relevées
Valeurs extrêmes de l'angle θ	Flexion plantaire propulsive : -25° Dorsiflexion : 15°	$-20^\circ < \theta < 10^\circ$
Vitesse angulaire maximale $\theta_{\max}$	$5,2 \text{ rad.s}^{-1}$	$3,1 \text{ rad.s}^{-1}$
Couple maximal à fournir	140 N.m	125 N.m
Travail maximal à fournir	20 J	14 J

Conclusion :

Le cahier des charges semble cohérent avec les valeurs relevées, l'expérimentation ayant été faite pour une marche normale et des mensurations moyennes.

Définition de la loi de consigne

Question 3.



Comparaison des lois théorique et expérimentale pour une cadence normale

$$K_n = 130 \text{ N.m.rad}^{-1} \quad K_p = 520 \text{ N.m.rad}^{-1} \quad C_{\text{lim}} = 85 \text{ N.m} \quad \Delta C = 44 \text{ N.m}$$

W_{th} est défini par l'aire grisée ci-dessus.

On en déduit : $W_{\text{th}} = \frac{1}{2} \frac{\Delta C^2}{K_n} + \Delta C \times \frac{C_{\text{lim}}}{K_p}$

Triangle Parallélogramme

Expression littérale de W_{th} :

$$W_{\text{th}} = \frac{1}{2} \frac{\Delta C^2}{K_n} + \Delta C \times \frac{C_{\text{lim}}}{K_p}$$

A.N. : $W_{\text{th}} = 14,6 \text{ J}$

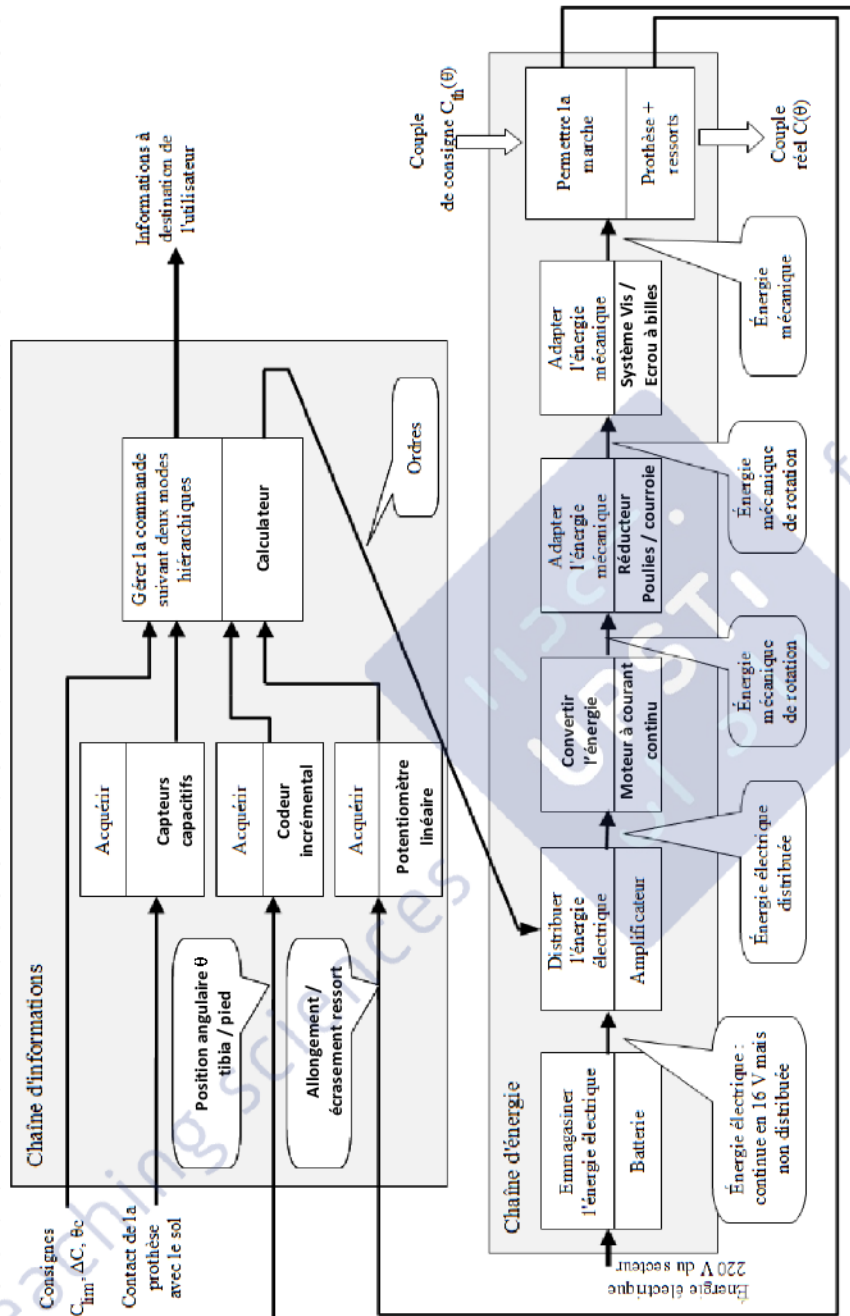
Conclusion :

Le résultat théorique est cohérent avec l'expérimentation.

Copie MP page 3/16

Organisation structurelle de la prothèse

Question 4.



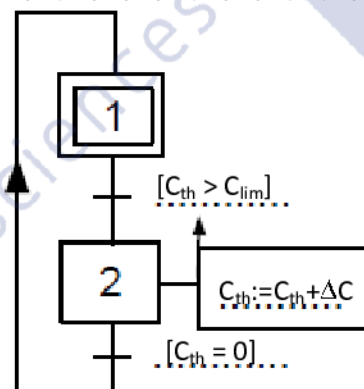
Copie MP page 4/16

Question 5.



$$\text{Cor} = \overline{P} \cdot \overline{T_a}$$

Question 6.



Modélisation de la chaîne de transmission

Question 7.

Relation de fermeture dimensionnelle : $\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{OA}$.

On en déduit : $-by_2 + \lambda y_3 = az_0$.

En projection sur $\vec{y}_0$ et $\vec{z}_0$:

$$\begin{cases} -b\cos\alpha + \lambda\cos\beta = 0 \\ -b\sin\alpha + \lambda\sin\beta = a \end{cases}$$

On élimine β : $\lambda^2 = b^2\cos^2\alpha + b^2\sin^2\alpha + a^2$.

Finalement : $\lambda = \sqrt{b^2 + a^2 + 2absin\alpha}$.

D'après l'allure du tracé (illustration 9), on effectue une approximation linéaire du type $\lambda = A\alpha + B$.

On choisit deux points passant par la courbe :

$$\begin{cases} 115 = -12,5 \times A + B \\ 135 = 22 \times A + B \end{cases}$$

On trouve alors $A = 0,6 \text{ mm/}^\circ = 34 \text{ mm/rad}$ et $B = 122 \text{ mm}$.

On donne alors $K_G = A = 34 \text{ mm/rad}$.

$$K_G = 34 \text{ mm/rad}$$

Question 8.

$$H_i(p) = \frac{1}{p}$$

$$H_r(p) = \frac{1}{R_r}$$

$$\lambda = k \frac{p_v}{2\pi} \omega_M. \text{ On en déduit } R_T = \frac{k p_v}{2\pi K_G}.$$

A vide, la vitesse maximale du moteur est de 7600 tr/min.

$$\text{On en déduit : } \left| \frac{d\alpha}{dt} \right|_{\max} = \frac{7600 * 2\pi}{60} * R_T = 5,3 \text{ rad/s.}$$

$$\text{A.N. : } R_T = 0,0067$$

$$\left| \frac{d\alpha}{dt} \right|_{\max} = \left| \frac{d\theta}{dt} \right|_{\max} = 5,3 \text{ rad/s}$$

Conclusion :

Le moteur semble donc avoir la capacité d'engendrer la vitesse maximale de 5,2 rad/s.

Comportement dynamique de la prothèse

Question 9.

On isole le pied artificiel 1.

Les actions mécaniques extérieures sont :

- l'action des ressorts $\vec{F}_{\text{ressorts} \rightarrow 1} = F_{RS} \vec{n}_1$ en S
- le couple extérieur $-C \vec{x}$
- l'action de 2 sur 1 par l'intermédiaire de la liaison pivot parfaite d'axe $O, \vec{x}$.

Les quantités dynamiques ainsi que l'action de la pesanteur sont négligées.

La projection sur l'axe $O, \vec{x}$ du théorème du moment dynamique appliqué au pied 1 dans son mouvement par rapport au repère supposé galiléen lié au tibia 0, nous donne :

$$-C + \vec{OS} \wedge \vec{F}_{\text{ressorts} \rightarrow 1} \cdot \vec{x} = 0$$

$$-C + -b\vec{z}_2 \wedge F_{RS} \vec{n}_1 \cdot \vec{x} = 0$$

$$C + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ bF_{RS} \begin{vmatrix} -\sin \alpha & \cos \theta + \delta \\ \cos \alpha & \sin \theta + \delta \end{vmatrix} \end{pmatrix} \cdot \vec{x} = 0 \text{ et donc } \boxed{C = bF_{RS} \cos \alpha - \theta - \delta}.$$

Question 10.

Autour de la position de repos, $C = bF_{RS} \cos \alpha_R + \Delta\alpha - \theta - \delta_R$.

On en déduit $C = d_0 F_{RS}$ avec $d_0 = b \cos \alpha_R + \Delta\alpha - \theta - \delta_R$.

Au 1^{er} ordre : $d_0 \approx b \cos \alpha_R - \delta_R$.

De plus, $\Delta\chi = d_0 \Delta\alpha - \theta$ et $F_{RS} = k_{RS} \Delta\chi$.

$$H_1(p) = \frac{C}{\Delta\alpha - \theta} = \frac{d_0 F_{RS}}{\Delta\alpha - \theta} = k_{RS} d_0^2.$$

$$H_1(p) = k_{RS} d_0^2$$

Question 11.

$$P_{ressorts \rightarrow 2/1} = \begin{Bmatrix} \vec{F}_{ressorts \rightarrow 2} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_S \otimes \begin{Bmatrix} \vec{\Omega}_{2/1} \\ \vec{v}_{S,2/1} \end{Bmatrix}_S = \begin{Bmatrix} -k_{RS} \Delta\chi \vec{n}_1 \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_S \otimes \begin{Bmatrix} \dot{\alpha} - \dot{\theta} \vec{x} \\ b\vec{z}_2 \wedge \dot{\alpha} - \dot{\theta} \vec{x} \end{Bmatrix}_S$$

$$P_{ressorts \rightarrow 2/1} = -k_{RS} \Delta\chi \vec{n}_1 \cdot b \dot{\alpha} - \dot{\theta} \vec{y}_2 = -k_{RS} b d_0 \Delta\alpha - \theta \dot{\alpha} - \dot{\theta} \vec{n}_1 \cdot \vec{y}_2$$

$$\text{Au 1^{er} ordre : } P_{ressorts \rightarrow 2/1} = -k_{RS} b d_0 \Delta\alpha - \theta \dot{\alpha} - \dot{\theta} \cos \alpha_R - \delta_R$$

On en déduit : $P_{ressorts \rightarrow 2/1} = -k_{RS} d_0^2 \Delta\alpha - \theta \dot{\alpha} - \dot{\theta}$.

Question 12.

On appelle E l'ensemble de la prothèse en mouvement par rapport au tibia.

Le théorème de l'énergie cinétique appliqué à l'ensemble E dans son mouvement par rapport au

repère supposé galiléen lié au tibia 0 s'écrit : $\frac{dT_{E/0}}{dt} = P_{E \rightarrow E/0} + P_{int(E)}$.

Avec les hypothèses d'étude :

$$T_{E/0} = \frac{1}{2} J_M \omega_M^2 = \frac{1}{2} \frac{J_M}{R_T^2} \dot{\alpha}^2.$$

$$P_{E \rightarrow E/0} = -C \dot{\alpha} \dot{\theta} = -C \dot{\theta}$$

$$P_{int(E)} = P_{amortisseur \rightarrow M/0} + P_{Moteur \rightarrow M/0} + P_{ressorts \rightarrow 2/1}$$

$$P_{int(E)} = \dot{C}_{amortisseur \rightarrow M} \cdot \omega_M \dot{\alpha} + \dot{C}_{Moteur \rightarrow M} \cdot \omega_M \dot{\alpha} - k_{RS} d_0^2 \Delta\alpha - \theta \dot{\alpha} - \dot{\theta}$$

$$P_{int(E)} = -\mu_M \omega_M^2 + C_M \omega_M - k_{RS} d_0^2 \Delta\alpha - \theta \dot{\alpha} - \dot{\theta}.$$

$$P_{int(E)} = -\frac{\mu_M}{R_T^2} \dot{\alpha}^2 + \frac{C_M}{R_T} \dot{\alpha} - C \dot{\alpha} - \dot{\theta}$$

L'application du théorème donne : $\frac{J_M}{R_T^2} \dot{\alpha} \ddot{\alpha} = -\frac{\mu_M}{R_T^2} \dot{\alpha}^2 + \frac{C_M}{R_T} \dot{\alpha} - C \dot{\alpha}.$

Finalement : $\frac{J_M}{R_T^2} \ddot{\alpha} = -\frac{\mu_M}{R_T^2} \dot{\alpha} + \frac{C_M}{R_T} - C.$

Question 13.

Dans le domaine symbolique :

$$U_M(p) - E(p) = R I(p)$$

$$E(p) = k_c \Omega_M(p) ; C_M(p) = k_c I(p)$$

$$\frac{J_M p + \mu_M}{R_T^2} \Delta \alpha'(p) = \frac{C_M(p)}{R_T} - C(p)$$

$$H_1(p) = \frac{k_c}{R}$$

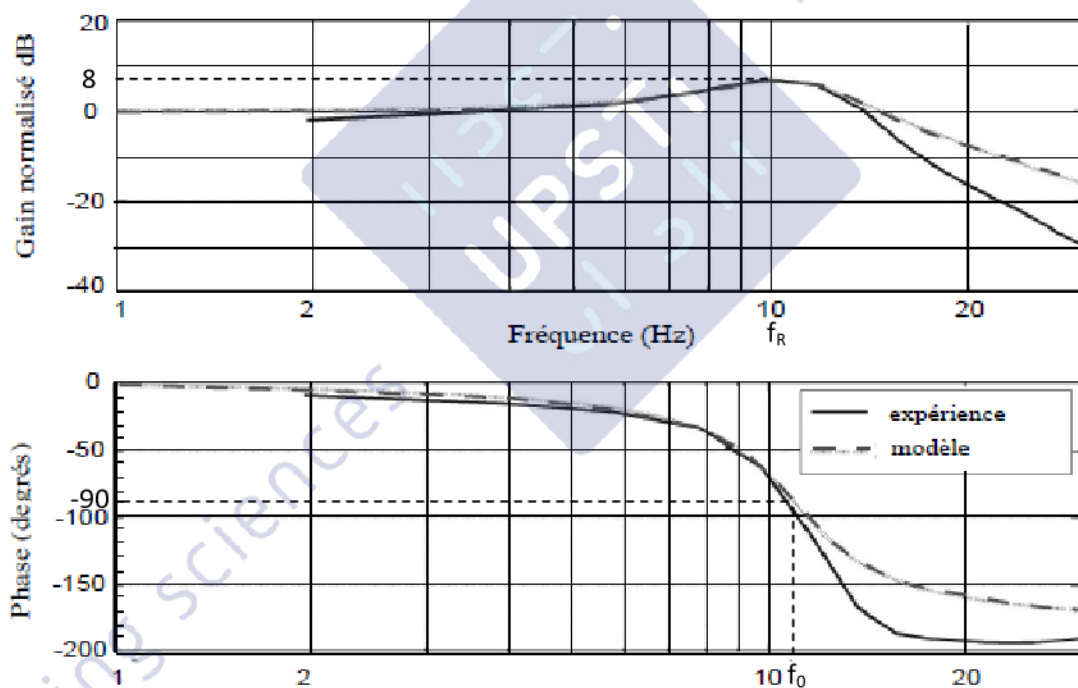
$$H_2(p) = \frac{1}{R_T}$$

$$H_3(p) = \frac{R_T^2}{\mu_M + J_M p}$$

$$H_4(p) = k_c$$

Identification d'un modèle de comportement de la chaîne d'énergie

Question 14.



La résonance lorsqu'elle existe a lieu pour $f_R = f_0 \sqrt{1 - 2\xi^2}$. Ici, on relève $f_R = 10$ Hz.

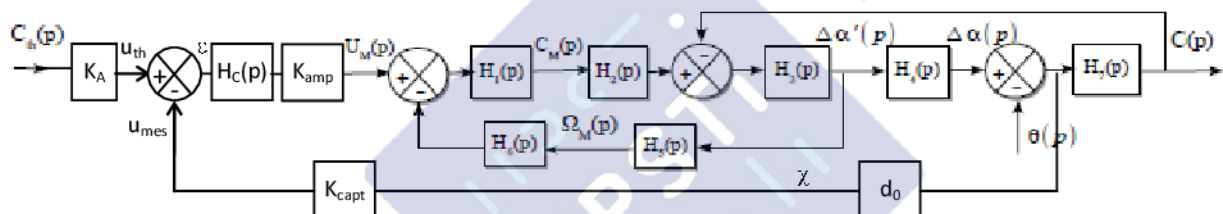
On peut alors en déduire $\xi_0 = \sqrt{\frac{1}{2} \left[1 - \left(\frac{f_R}{f_0} \right)^2 \right]} = 0,2$.

On peut aussi utiliser le facteur de résonance : $m = 20 \log \left[\frac{1}{2\xi_0 \sqrt{1 - \xi_0^2}} \right]$. Ici, on relève $m=8$.

Cela donne $\xi_0 = 0,2$.

Mise en place de l'asservissement en couple

Question 15.



Expression du bloc d'adaptation K_A

Si $C_{th} = C$, on doit avoir $\varepsilon = 0$.

Cela implique $K_A = \frac{K_{capt} d_0}{H_7(p)} = \frac{K_{capt}}{k_{RS} d_0}$

Analyse des performances de l'asservissement de couple

Question 16.

La fonction de transfert en boucle ouverte est de classe 0.

L'écart statique pour une entrée unitaire est alors donné par $\varepsilon_s = \frac{1}{1 + K_{BO}}$.

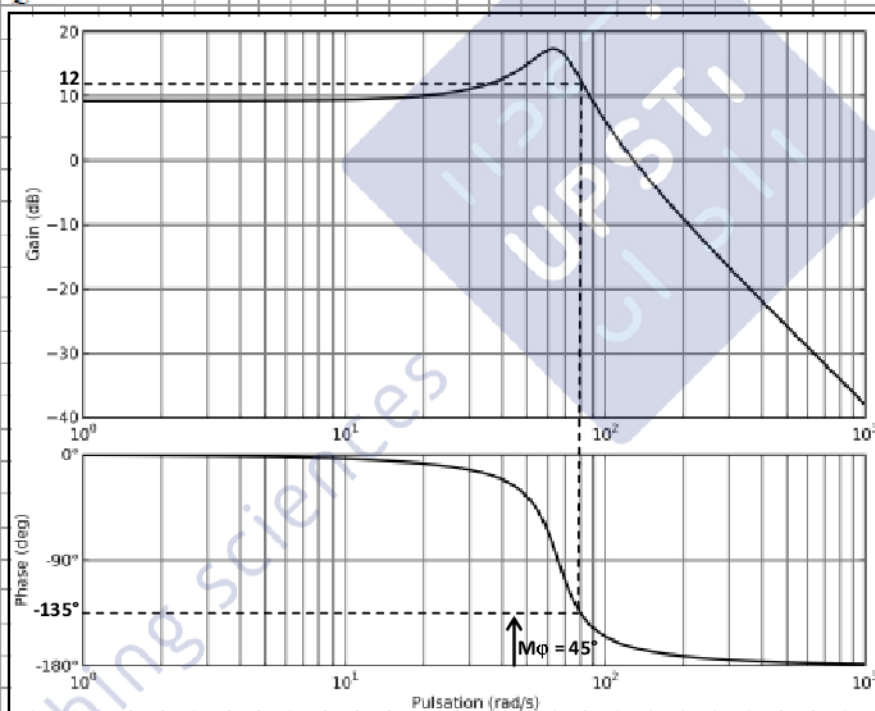
Ici, le gain de la boucle ouverte est $K_{BO} = a_0 K_{cor}$.

On a donc $\varepsilon_s = \frac{1}{1 + a_0 K_{cor}}$.

Pour un écart relatif de 10 %, cela donne $10\% = \frac{1}{1 + a_0 K_{cor1}}$.

Soit $K_{cor1} = 3,1 \text{ V.N}^{-1}.\text{m}^{-1}$.

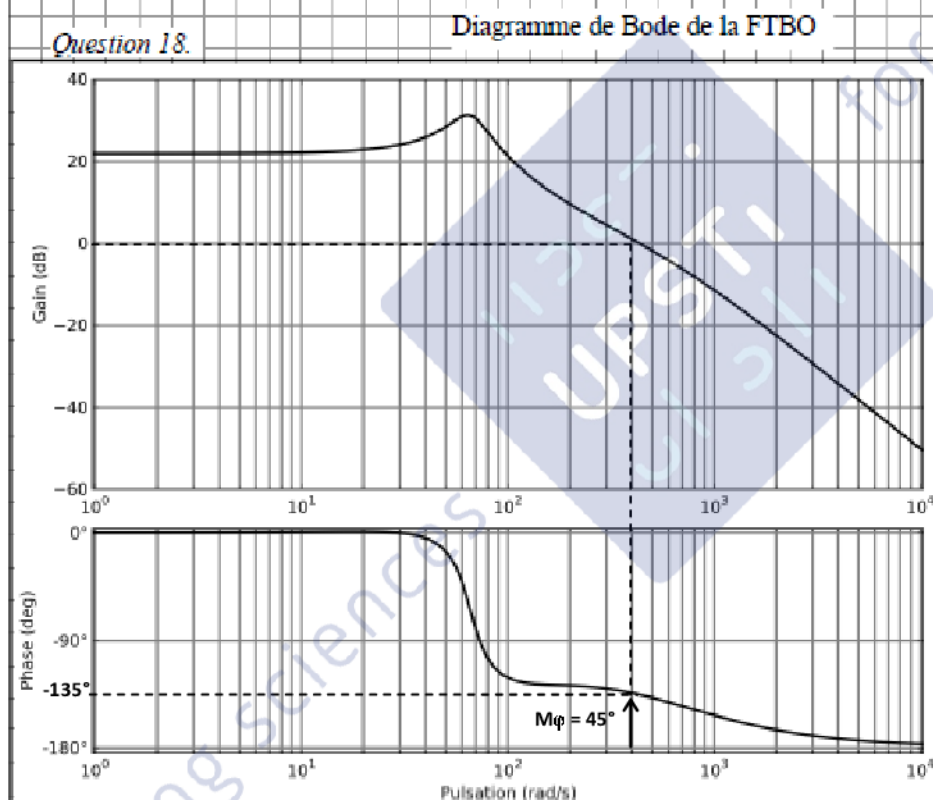
Question 17.



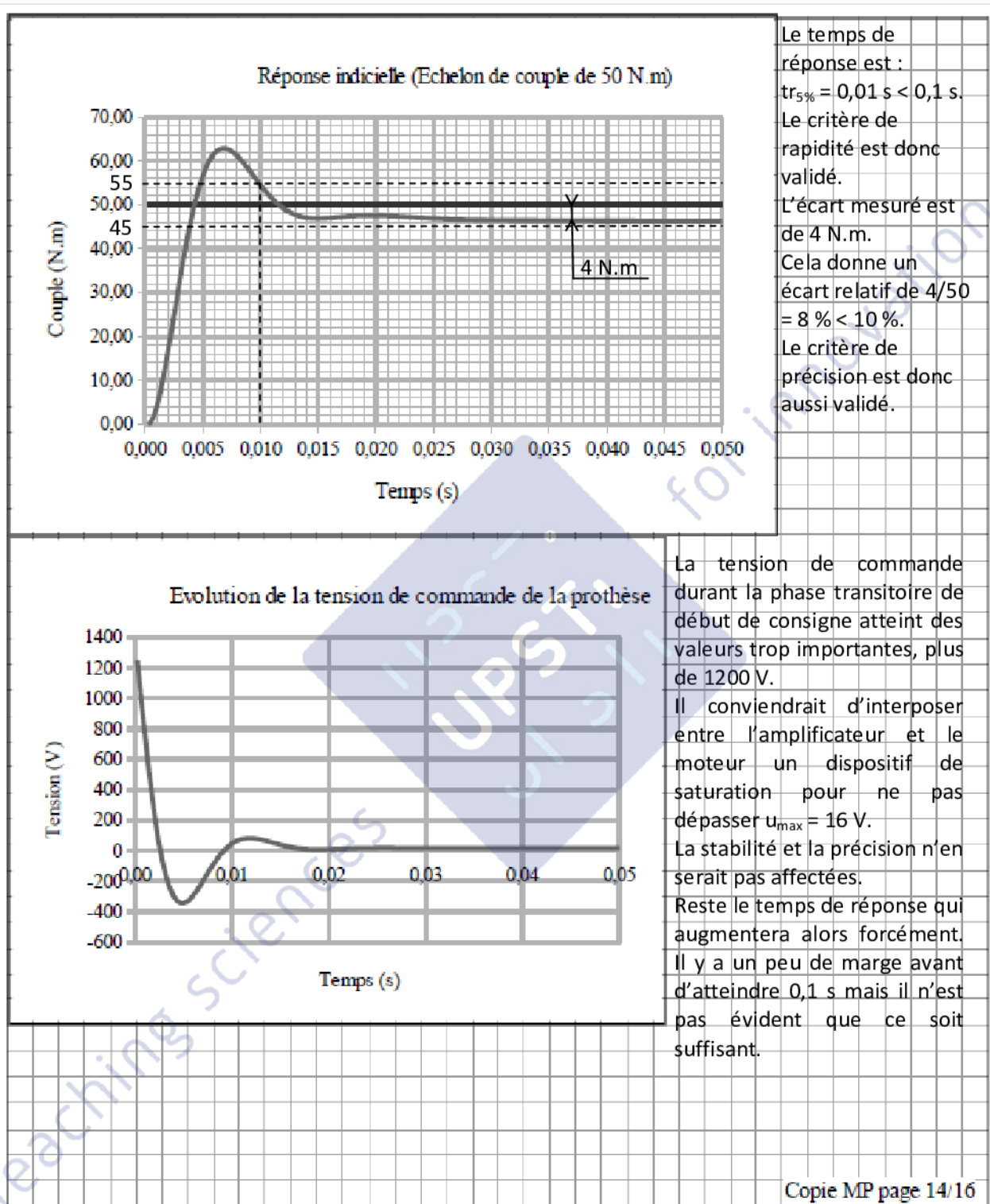
Il faut donc $20\log K_{cor2} = -12$.

Soit $K_{cor2} = 10^{-\frac{12}{20}} = 0,25 \text{ V.N}^{-1}.\text{m}^{-1}$.

Le correcteur proportionnel ne peut donc pas satisfaire simultanément les critères de précision et de stabilité.



Le critère de stabilité est validé.



Validation clinique de la prothèse active

Question 19.

Le coût métabolique de transport (COT) permet de caractériser la dépense énergétique du patient ramenée à sa masse et sa vitesse.

La problématique mise en évidence en introduction, montre qu'il y a une dépense énergétique plus importante de 20 à 30 % pour un patient ayant une prothèse passive que pour une personne non amputée.

Pour le sujet 1, on passe de 0,27 (prothèse classique) à 0,23 (prothèse active). Soit un gain d'énergie de $(0,27-0,23)/0,27 = 15 \%$. Pour les sujets 2 et 3, les gains sont respectivement de 20 et 10 %.

La prothèse active apporte donc une amélioration significative mais en deçà des exigences pour ramener la dépense énergétique à des valeurs équivalentes à celle d'une personne non amputée.

La moyenne du travail propulsif et celle du travail résistif sont identiques pour une prothèse classique montrant la restitution quasi intégrale de l'énergie mécanique élastique accumulée dans la phase résistive.

Pour la prothèse active, la différence des travaux propulsif et résistif vient de la part fournie par la motorisation pour limiter la dépense énergétique du patient.

La moyenne du travail propulsif des actions du sol sur un cycle de marche montre que dans le cas d'une prothèse active, l'énergie fournie au sol est légèrement plus importante mais dans des proportions raisonnables.

La moyenne du travail résistif des actions du sol sur un cycle de marche indique que pour une prothèse active, le patient subit moins de chocs dans les articulations qu'avec une prothèse classique. Soit une amélioration de $(67-53)/67 = 21 \%$.

Copie MP page 15/16

La dissymétrie de la marche qui fatigue les articulations des membres sains avec des prothèses classique est donc significativement atténuée avec des prothèses actives.

L'insuffisance des améliorations avec le type de étudié, a certainement conduit à des évolutions technologiques matérialisées ici par le modèle BIOM présenté en fin de sujet.

