

Proposition de corrigé

Concours : Banque PT

Année : 2023

Filière : PT

Épreuve : Sciences Industrielles B

Ceci est une proposition de corrigé des concours de CPGE, réalisée bénévolement par des enseignants de Sciences Industrielles de l'Ingénieur et d'Informatique, membres de l'[UPSTI](https://www.upsti.fr) (Union des Professeurs de Sciences et Techniques Industrielles), et publiée sur le site de l'association :

<https://www.upsti.fr/espace-etudiants/annales-de-concours>

A l'attention des étudiants

Ce document vous apportera des éléments de corrections pour le sujet traité, mais n'est ni un corrigé officiel du concours, ni un corrigé détaillé ou exhaustif de l'épreuve en question.

L'UPSTI ne répondra pas directement aux questions que peuvent soulever ces corrigés : nous vous invitons à vous rapprocher de vos enseignants si vous souhaitez des compléments d'information, et à vous adresser à eux pour nous faire remonter vos éventuelles remarques.

Licence et Copyright

Toute représentation ou reproduction (même partielle) de ce document faite sans l'accord de l'UPSTI est **interdite**. Seuls le téléchargement et la copie privée à usage personnel sont autorisés (protection au titre des [droits d'auteur](#)).

En cas de doute, n'hésitez pas à nous contacter à : corrigesconcours@upsti.fr.

Informez-vous !

Retrouvez plus d'information sur les [Sciences de l'Ingénieur](#), l'[orientation](#), les [Grandes Ecoles](#) ainsi que sur les [Olympiades de Sciences de l'Ingénieur](#) et sur les [Sciences de l'Ingénieur au Féminin](#) sur notre site : www.upsti.fr

L'équipe UPSTI

Système d'ouverture de porte sur un avion cargo

Corrigé UPSTI

1 Caractéristiques d'un actionneur permettant de valider l'exigence 1.4

Objectif

Dans cette partie, on souhaite déterminer les caractéristiques principales du système d'actionnement de la porte afin de respecter les exigences 1.4.1, 1.4.2 et 1.4.3

1.1 Validation de l'exigence 1.4.1 : course de l'actionneur

Question 1 Quelle est la trajectoire du point D dans le mouvement du basculeur (S_2) par rapport au châssis (S_0) ? Quelle est la trajectoire du point E dans le mouvement du basculeur (S_0) : par rapport au châssis (S_0) ? Quelle est la trajectoire du point F dans le mouvement du basculeur (S_1) par rapport au châssis (S_0) ? Pour chaque réponse, on précisera les éléments géométriques permettant de définir complètement la trajectoire (centre et rayon par exemple pour une trajectoire circulaire).

Trajectoire de D : cercle de centre B et de rayon $[BD]$

Trajectoire de E : cercle de centre B et de rayon $[BE]$

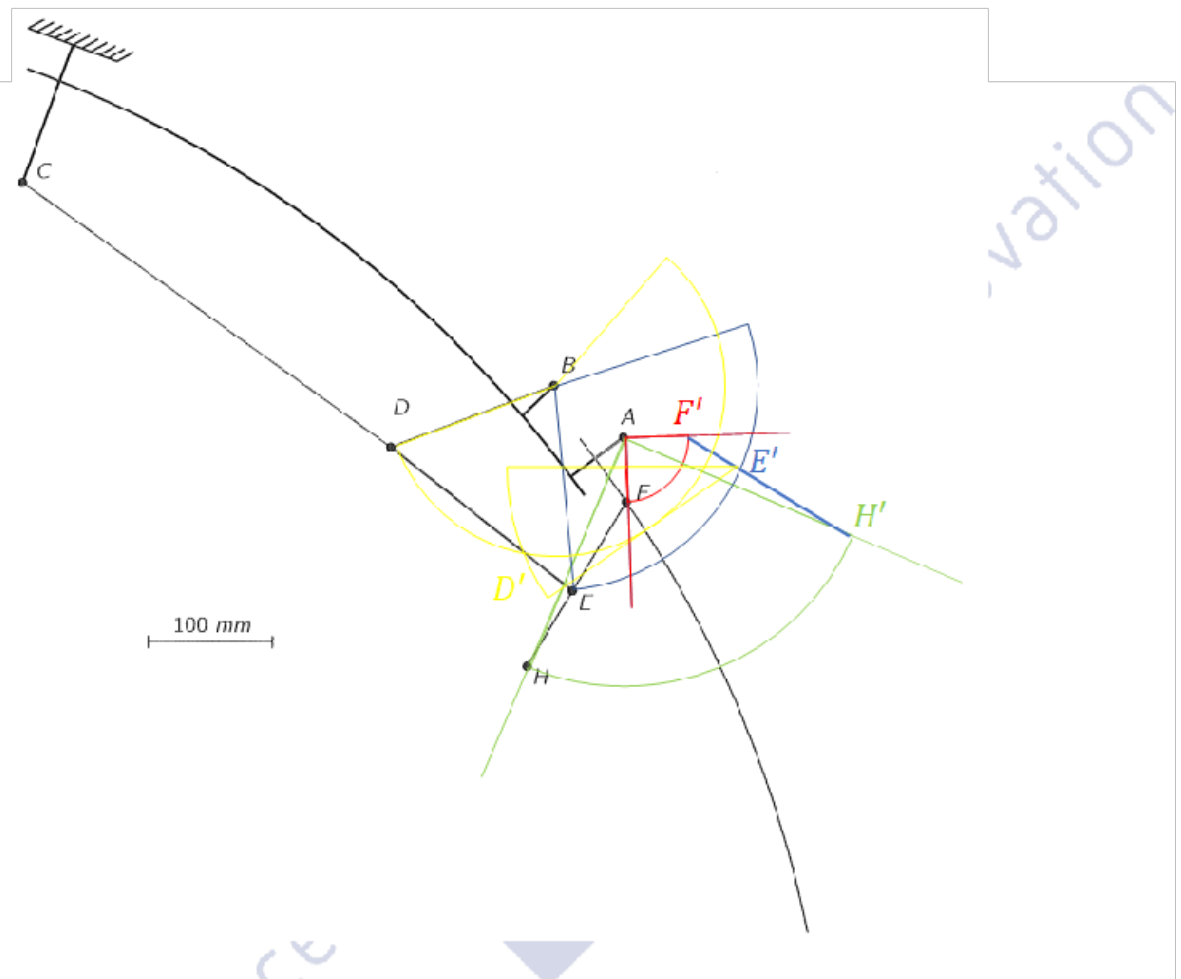
Trajectoire de F : cercle de centre A et de rayon $[AF]$

Question 2 Pour chaque liaison proposée, indiquer avec une croix dans le tableau si le mécanisme est bloqué ou mobile, et indiquer également la ou les liaisons à retenir.

Liaison (S_1)/(S_2)	Mécanisme bloqué	Mécanisme mobile	A retenir
Pivot d'axe ($E, \vec{z}$)	X		
Glissière de direction ($\vec{x}_1$)	X		
Ponctuelle de normale ($E, \vec{y}_1$)		X	X
Rotule de centre E	X		

Pour la pivot et la rotule, le mécanisme est bloqué car le point devrait décrire simultanément un cercle de centre B et de rayon $[BE]$ ainsi qu'un cercle de centre A et de rayon $[AE]$, ce qui n'est pas possible. Pour la glissière, au cours du mouvement le triangle ABE devrait pouvoir évoluer avec une longueur AE variable tout en ayant l'angle $(\widehat{BEA})$ fixe car la glissière bloque la rotation entre (S_2) et (S_1), ce qui n'est pas possible.

Question 3 A l'aide des instruments classiques (règle, compas), représenter le mécanisme complet dans la configuration porte ouverte ; on notera X' la position en configuration ouverte d'un point X en configuration fermée ; pour ce tracé, on considèrera que le point E ne peut se déplacer que sur la droite (FH) au cours du mouvement.



Le point F' est obtenu en traçant $1/4$ de cercle de centre A et de rayon $[AF]$.

Le point H' est obtenu en traçant $1/4$ de cercle de centre A et de rayon $[AH]$.

Le point E' est obtenu en trouvant l'intersection de la droite $(F'H')$ et du cercle de centre B et de rayon $[BE]$.

Le point D' est obtenu en trouvant l'intersection du cercle de centre B et de rayon $[BD]$ et du cercle de centre E' et de rayon $[DE]$.

Question 4 Dédurre des tracés précédents la longueur $\lambda = CD$ de l'actionneur lorsque la porte est fermée, la longueur $\lambda' = C'D'$ de l'actionneur lorsque la porte est ouverte, et la course $\Delta\lambda$ nécessaire pour l'actionneur permettant de passer de la configuration fermée à la configuration ouverte.

À l'aide de l'échelle donnée dans le document réponse, on trouve :

$$\lambda = CD = 350 \text{ mm}$$

$$\lambda' = C'D' = 500 \text{ mm}$$

$$\Delta\lambda = 150 \text{ mm}$$

1.2 Validation de l'exigence 1.4.2 : vitesse de l'actionneur

Question 5 Exprimer la vitesse linéaire moyenne de l'actionneur $\tilde{V}$ en fonction de $\Delta\lambda$ et T ; donner la valeur numérique de $\tilde{V}$ en $\text{mm}\cdot\text{s}^{-1}$.

$$\tilde{V} = \frac{\Delta\lambda}{T} = \frac{150}{30} = 5 \text{ mm}\cdot\text{s}^{-1}$$

Question 6 Quel est le nombre de mobilités utiles du mécanisme ? Combien de paramètres permettant de décrire le mouvement du système ont été introduits ? Combien d'équations scalaires liant ces paramètres faut-il écrire pour obtenir la loi entrée/sortie reliant λ à θ_1 ?

Nombre de mobilités utiles : 1

Nombre de paramètres indépendants : 5 ($\theta_1, \theta_2, \theta_3, \lambda, \delta$)

Nombre d'équations à écrire : 4

Question 7 Préciser pour chaque équation proposée le nombre d'équations scalaires que l'on peut en tirer, les paramètres de position impliqués, et indiquer enfin avec une croix si l'ensemble d'équations est pertinent pour répondre à l'objectif.

Jeu d'équations	Nombre d'équation	Paramètres impliqués	A retenir
$\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{0}$	2	$\theta_2, \theta_3, \lambda$	X
$\overrightarrow{BE} \cdot \overrightarrow{x}_1 = (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AF} + \overrightarrow{FE}) \cdot \overrightarrow{x}_1$	1	$\theta_1, \theta_2, \delta$	
$\overrightarrow{BE} \cdot \overrightarrow{y}_1 = (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AF} + \overrightarrow{FE}) \cdot \overrightarrow{y}_1$	1	θ_1, θ_2	X

Question 8 Exprimer la vitesse linéaire $V(\theta_1) = \dot{\lambda}$ du vérin en fonction de l'angle de porte θ_1 , de f et/ou de sa dérivée, et de $\dot{\theta}_1$.

$$\dot{\lambda} = \frac{d\lambda}{dt} = \frac{d}{dt}(f(\theta_1)) = \dot{\theta}_1 \frac{df}{d\theta_1} = \dot{\theta}_1 f'(\theta_1)$$

Question 9 Si l'on souhaite que la vitesse angulaire de la porte soit au moins de $3^\circ\cdot\text{s}^{-1}$ pour toute configuration entre la position fermée et la position ouverte, quelle doit être la vitesse linéaire du vérin en $\text{mm}\cdot\text{s}^{-1}$? Si l'on souhaite que la vitesse angulaire de la porte soit au plus de $3^\circ\cdot\text{s}^{-1}$ pour toute configuration entre la position fermée et la position ouverte, quelle doit être la vitesse linéaire du vérin en $\text{mm}\cdot\text{s}^{-1}$?

$$\text{On a } \dot{\lambda} = V = \dot{\theta}_1 f'(\theta_1) \text{ ou } \dot{\theta}_1 = \frac{V}{f'(\theta_1)}$$

À l'aide de l'annexe D, on trouve $\min(f'(\theta_1)) = 0,0625 \text{ m/rad}$ et $\max(f'(\theta_1)) = 0,1225 \text{ m/rad}$

Pour une vitesse angulaire $\dot{\theta}_1$ d'au moins $3^\circ/\text{s}$ ($3\pi/180 \text{ rad/s}$), soit le minimum de $\dot{\theta}_1$ obtenu pour $\max(f'(\theta_1))$ donc $V = 3\pi \times 0,1225 \times 10^3/180 = 6,4 \text{ mm/s}$

Pour une vitesse angulaire $\dot{\theta}_1$ d'au plus $3^\circ/\text{s}$ ($3\pi/180 \text{ rad/s}$), soit le maximum de $\dot{\theta}_1$ obtenu pour $\min(f'(\theta_1))$ donc $V = 3\pi \times 0,0625 \times 10^3/180 = 3,3 \text{ mm/s}$

1.3 Validation de l'exigence 1.4.3 : poussée de l'actionneur

Question 10 Déterminer la puissance P_v , fournie par le vérin en fonction de $V(\theta_1)$ et F_v ; de même, déterminer la puissance P_p , associée à la pesanteur en fonction de M , g , θ_1 , $\dot{\theta}_1$ et des paramètres géométriques positionnant le centre de gravité G de la porte.

$$P_v = F_v V(\theta_1)$$

$$P_p = \{\mathcal{F}(\text{poids} \rightarrow S_0)\} \otimes \{\mathcal{V}(S_1/S_0)\}$$

$$\text{avec } \{\mathcal{F}(\text{poids} \rightarrow S_0)\} = \left\{ \begin{matrix} -Mg\vec{y} \\ \vec{0} \end{matrix} \right\}_G = \left\{ \begin{matrix} -Mg\vec{y} \\ Mg(a_1 \cos(\theta_1) - b_1 \sin(\theta_1))\vec{z} \end{matrix} \right\}_A \text{ et}$$

$$\{\mathcal{V}(S_1/S_0)\} = \left\{ \begin{matrix} \dot{\theta}_1\vec{z} \\ \vec{0} \end{matrix} \right\}_A \text{ donc } P_p = Mg\dot{\theta}_1(a_1 \cos(\theta_1) - b_1 \sin(\theta_1))$$

Question 11 Préciser les hypothèses associées à l'utilisation du théorème de l'énergie cinétique, le système isolé, puis donner l'expression de F_v , en fonction de $f'(\theta_1)$, θ_1 , M , g , a_1 , et b_1 .

En plus des hypothèses du sujet, on peut rajouter que le référentiel attaché à S_0 soit galiléen et que la loi entrée/sortie du mécanisme soit une constante pour que $\frac{dE_c}{dt} = 0$.

On isole l'ensemble $E = \{S_1, S_2, S_3, S_4\}$.

L'application du théorème de l'énergie cinétique donne : $P_{int} + P_{ext} = \frac{dE_c}{dt} = 0$ avec $P_{int} = P_v$ et $P_{ext} = P_p$.

Donc $F_v V(\theta_1) + Mg\dot{\theta}_1(a_1 \cos(\theta_1) - b_1 \sin(\theta_1)) = 0$ et avec $V(\theta_1) = \frac{V}{f'(\theta_1)}$,

on obtient $F_v = \frac{Mg(-a_1 \cos(\theta_1) + b_1 \sin(\theta_1))}{f'(\theta_1)}$

Question 12 Effectuer l'application numérique donnant l'effort maximal à fournir par le vérin pour une masse de porte nominale, sans surcharge, ainsi que la position angulaire de la porte pour laquelle cet effort est atteint.

L'annexe E donne l'effort du vérin pour une masse de porte de 1 kg et la porte a une masse de 100 kg.

Donc, $F_{v_{max}} = 85 \times 100 = 8500$ N pour $\theta_1 = \theta_{1_{max}} = 130^\circ$.

2 Choix de la transmission interne à l'actionneur

- Objectif -

La partie I a permis de définir les principales caractéristiques de l'actionneur linéaire à concevoir. Ces caractéristiques permettent d'obtenir : l'amplitude de mouvement de la porte cargo en adéquation avec l'exigence 1.4.1, un temps d'ouverture de la porte cargo en adéquation avec l'exigence 1.4.2, et une force de poussée en adéquation avec la masse de la porte cargo indiquée dans l'exigence 1.4.3. L'objectif de cette partie est de détailler le choix de la transmission interne à l'actionneur linéaire permettant d'obtenir ces caractéristiques.

2.1 Choix d'une architecture

Question 13 Donner l'expression du rendement total η de la chaîne de transmission en fonction de η_r , et η_v ; exprimer la puissance P_m nécessaire au niveau du moteur pour entraîner le mouvement de la porte cargo en fonction de F_v , V et η ; donner la valeur numérique de P_m en W.

$\eta = \eta_r^3 \eta_v$ et en régime établi, on peut affirmer que $\eta = \frac{P_v}{P_m}$

$$P_m = \frac{F_v V}{\eta} = \frac{12000 \times 5 \times 10^{-3}}{0,7 \times 0,95^3} \approx 100 \text{ W}$$

Question 14 Quelles sont les références des moteurs adaptées au besoin et à l'environnement du vérin ?

D'après le résultat de la question précédente ainsi que l'exigence sur l'encombrement et la tension d'alimentation nominale, on peut choisir les références $RE - 40 - 150 - 24$ et $RE - 50 - 200 - 24$.

Question 15 Donner le lien entre ω_v , V et p ; donner l'expression de la vitesse linéaire d'allongement du vérin V en fonction de ω_m , r_i $i \in \{1, 2, 3\}$, et p .

$$V = \frac{p}{2\pi} \omega_v \text{ et } \omega_v = \frac{\omega_m}{r_1 r_2 r_3} \text{ donc } V = \frac{p}{2\pi} \frac{\omega_m}{r_1 r_2 r_3} = \frac{p}{2\pi} \frac{\omega_m}{r}$$

Question 16 Donner l'expression du rapport p/r permettant d'obtenir la vitesse d'allongement souhaitée V connaissant le régime ω_m ; donner la valeur numérique du rapport p/r en mm| | |

$$J_p = \int_{(S_1)} w^2 dm = \int_0^{\beta_0} 4R^2 \sin^2\left(\frac{\beta}{2}\right) \frac{M}{\beta_0} d\beta = \int_0^{\beta_0} 2R^2 (1 - \cos^2(\beta)) \frac{M}{\beta_0} d\beta = \frac{2R^2 M}{\beta_0} [\beta - \sin(\beta)]_0^{\beta_0}$$

$$J_p = \frac{2R^2 M}{\beta_0} (\beta_0 - \sin \beta_0) \approx 163,5 \text{ kg}\cdot\text{m}^2$$

Question 20 Donner l'expression de $J_{m,eq}$ en fonction de r , r' , p et J_m : effectuer l'application numérique ; peut-on se permettre de négliger l'inertie du rotor moteur devant J_p ?

$$E_c = \frac{1}{2} J_{m,eq} \dot{\theta}_1^2 = \frac{1}{2} J_m \omega_m^2$$

$$\text{d'où } J_{m,eq} = J_m \left(\frac{\omega_m}{\dot{\theta}_1}\right)^2 = 3008 \text{ kg}\cdot\text{m}^2$$

$J_{m,eq}$ ne peut pas être négligée devant J_p , c'est même l'inverse, c'est l'inertie de la porte qui peut être négligée devant celle du rotor ramenée au niveau de la porte.

Question 21 Appliquer le théorème de l'énergie cinétique à l'ensemble mobile et en déduire l'équation différentielle du mouvement en θ_1 ; l'équation différentielle étant mise sous la forme $\ddot{\theta}_1 + A_1 \dot{\theta}_1 + A_0 \theta_1 = B(\theta_1)$, indiquer les expressions des termes A_1 , A_0 et $B(\theta_1)$ en fonction de J_{eq} , r , r' , p , R_m , k_m , U_m , $C_p(\theta_1)$.

En appliquant, le TEC à l'ensemble mobile : $P_{int} + P_{ext} = \frac{dE_c}{dt}$ avec $P_{int} = C_m \omega_m$, $P_{ext} = C_p \dot{\theta}_1$ et $E_c = \frac{1}{2} J_{eq} \dot{\theta}_1^2$

On obtient $C_m \omega_m + C_p \dot{\theta}_1 = J_{eq} \dot{\theta}_1 \ddot{\theta}_1$, or $\frac{\omega_m}{\dot{\theta}_1} = \frac{2\pi r' r}{p}$ donc $C_m \frac{2\pi r' r}{p} \dot{\theta}_1 + C_p \dot{\theta}_1 = J_{eq} \dot{\theta}_1 \ddot{\theta}_1$

Et $C_m = k_m i_m = k_m \left(\frac{U_m - e_m}{R_m}\right) = k_m \left(\frac{U_m - k_m \omega_m}{R_m}\right) = \frac{k_m}{R_m} \left(U_m - k_m \frac{2\pi r' r}{p} \dot{\theta}_1\right)$

On obtient, $\frac{k_m}{R_m} \left(U_m - k_m \frac{2\pi r' r}{p} \dot{\theta}_1\right) \frac{2\pi r' r}{p} + C_p = J_{eq} \ddot{\theta}_1$

D'où $\ddot{\theta}_1 + \frac{(k_m r' r 2\pi)^2}{p^2 R_m J_{eq}} \dot{\theta}_1 = \frac{C_p}{J_{eq}} + \frac{k_m U_m r' r 2\pi}{R_m J_{eq} p}$

Au final, on a $A_1 = \frac{(k_m r' r 2\pi)^2}{p^2 R_m J_{eq}}$, $A_0 = 0$ et $B(\theta_1) = \frac{C_p(\theta_1)}{J_{eq}} + \frac{k_m U_m r' r 2\pi}{R_m J_{eq} p}$

Question 22 Indiquer, dans le cas où $C_p(\theta_1)$ est quelconque, puis dans le cas simplifié où $C_p(\theta_1)$ est supposé indépendant de θ_1 , quel est l'ordre de l'équation différentielle obtenue puis si l'équation différentielle est linéaire ? Par quelle méthode numérique proposez-vous de résoudre cette équation différentielle dans le cas général où $C_p(\theta_1)$ est quelconque ?

Ordre de l'équation différentielle (cas où $C_p(\theta_1)$ est quelconque) : Ordre 2

Ordre de l'équation différentielle (cas où $C_p(\theta_1)$ est supposé indépendant de θ_1) : Ordre 2

Linéarité de l'équation différentielle (cas où $C_p(\theta_1)$ est quelconque) : Non linéaire

Linéarité de l'équation différentielle (cas où $C_p(\theta_1)$ est supposé indépendant de θ_1) : Linéaire

Méthode de résolution dans le cas général : Euler explicite ou Euler arrière

Question 23 Donner, en fonction des termes A_0 , A_1 et B ou d'une partie de ces termes, l'expression de la constante de temps τ associée au problème dans le cas où $C_p(\theta_1)$ est supposé indépendant de θ_1 ; effectuer l'application numérique ; sous cette hypothèse concernant $C_p(\theta_1)$, la durée du régime transitoire est-elle à prendre en compte dans l'estimation du temps d'ouverture de la porte ?

Comme $A_0 = 0$, on peut se ramener à une équation différentielle d'ordre 1 sur $\dot{\theta}_1$ comme inconnue et on peut donc définir une constante de temps $\tau = \frac{1}{A_1} = \frac{p^2 R_m J_{eq}}{(k_m r' r 2\pi)^2} \approx 0,016 \text{ s}$. Ce temps peut être négligé

devant la durée d'ouverture et donc la durée du régime transitoire n'est pas à prendre en compte dans l'estimation du temps d'ouverture de la porte.

Question 24 Quelle est la constante de temps numérique $\tilde{\tau}$ associée au problème ? Commenter cette valeur relativement à celle trouvée pour τ ; le temps d'ouverture de la porte cargo incluant les effets dynamiques est-il correct ?

À partir de la figure 15 (b) de l'annexe I, on peut estimer une constante de temps sur la réponse en $\dot{\theta}_1$ en prenant le temps correspondant à 63% de la valeur finale : $\tilde{\tau} \approx 0,02$ s, ce qui est très proche de la valeur trouvée à la question précédente. Le temps d'ouverture de la porte cargo est bien de 30 s.

2.2 Protection du système vis-à-vis des surcharges

Question 25 Donner l'expression de F_r en fonction de p_0 , R_e , R_i .

La pression de contact étant uniforme, on a $F_r = p_0 S = p_0 \pi (R_e^2 - R_i^2)$

Question 26 Donner l'expression du couple limite transmissible C_l ; en fonction de p_0 , R_e , R_i et μ .

D'après l'annexe J, il y a 2 surfaces frottantes donc $C_l = 2 \int_S r dT = 2 \int_S r \mu p_0 dS$

Soit $C_l = 2 \int_0^{2\pi} \int_{R_i}^{R_e} r \mu p_0 r dr d\theta = \frac{4}{3} \mu p_0 \pi (R_e^3 - R_i^3)$

Question 27 Donner l'expression du couple C_l que doit pouvoir transmettre le limiteur dans les configurations $\mathcal{L}_1$, $\mathcal{L}_2$, ou $\mathcal{L}_3$, notés respectivement C_l^1 , C_l^2 , et C_l^3 , en fonction de F_v^{max} , p , r_1 , r_2 et r_3 .

En considérant que les puissances sont conservées lors de la transmission de puissance par les différents des étages du réducteur, on a $F_v^{max} V = C_l^1 \omega_{A2} = C_l^2 \omega_{A3} = C_l^3 \omega_{A4}$

et avec $V = \frac{p}{2\pi} \omega_{A4} = \frac{p}{2\pi r_3} \omega_{A3} = \frac{p}{2\pi r_2 r_3} \omega_{A2}$, on obtient $C_l^1 = \frac{p F_v^{max}}{2\pi r_2 r_3}$, $C_l^2 = \frac{p F_v^{max}}{2\pi r_3}$ et $C_l^3 = \frac{p F_v^{max}}{2\pi}$

Question 28 Dédurre des questions précédentes la pression de contact p_0 à installer dans les configurations $\mathcal{L}_1$, $\mathcal{L}_2$, ou $\mathcal{L}_3$, notés respectivement p_0^1 , p_0^2 , et p_0^3 , en fonction de F_v^{max} , p , r_1 , r_2 , r_3 , μ , R_e et R_i .

En combinant les équations obtenues aux 2 questions précédentes, on obtient :

$$p_0^1 = \frac{3 p F_v^{max}}{8 \pi^2 \mu r_2 r_3 (R_e^3 - R_i^3)}$$

$$p_0^2 = \frac{3 p F_v^{max}}{8 \pi^2 \mu r_3 (R_e^3 - R_i^3)}$$

$$p_0^3 = \frac{3 p F_v^{max}}{8 \pi^2 \mu (R_e^3 - R_i^3)}$$

Question 29 Pour les trois configurations envisagées $\mathcal{L}_1$, $\mathcal{L}_2$, ou $\mathcal{L}_3$, exprimer la vitesse de glissement maximale sur la zone de contact entre plateau presseur ou fixe et roue dentée, notées V_g^1 , V_g^2 , et V_g^3 , en fonction de ω_m , de R_e , r_1 , r_2 et r_3 .

La vitesse de glissement maximale pour chaque limiteur est donnée par $V_g^i = R_e \omega_{Ai+1}$ donc

$$V_g^1 = R_e \omega_{A2} = R_e \frac{\omega_m}{r_1}$$

$$V_g^2 = R_e \omega_{A3} = R_e \frac{\omega_m}{r_1 r_2}$$

$$V_g^3 = R_e \omega_{A4} = R_e \frac{\omega_m}{r_1 r_2 r_3}$$

Question 30 Exprimer, pour les trois configurations $\mathcal{L}_1$, $\mathcal{L}_2$, ou $\mathcal{L}_3$, la puissance maximale dissipée par unité de surface, notée respectivement P_d^1 , P_d^2 et P_d^3 , en fonction de ω_m , r_1 , r_2 , r_3 , F_v^{max} , μ , R_e , et R_i ; la puissance maximale à dissiper est-elle un critère pertinent pour choisir entre les trois configurations proposées?

On considère que la puissance maximale dissipée $P_d^i = -V_g^i \frac{dT_i}{dS} = V_g^i \mu p_0^i$

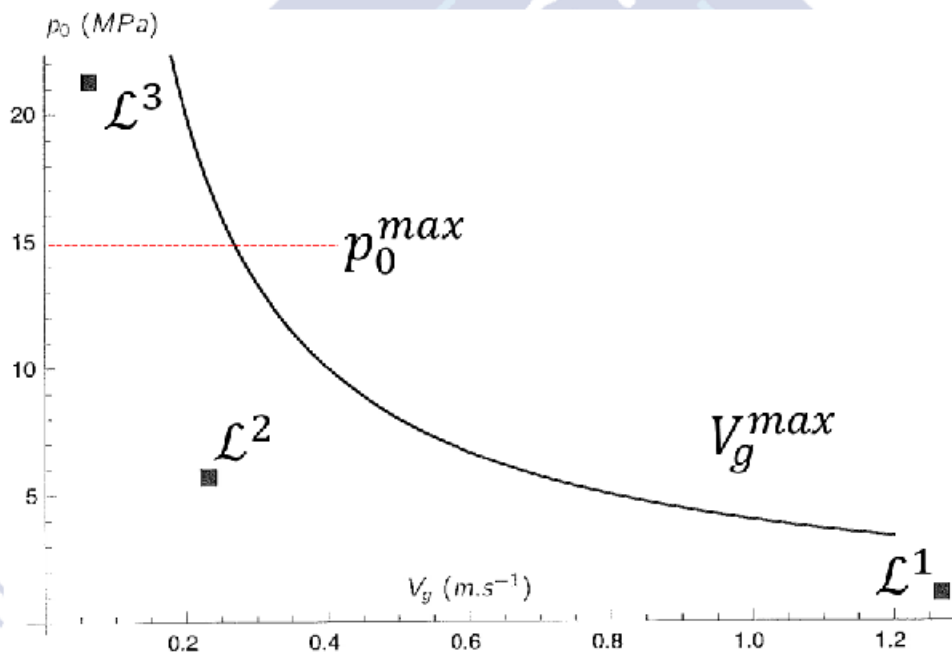
$$P_d^1 = -V_g^1 \mu p_0^1 = -\frac{3 p F_v^{max} R_e \omega_m}{8 \pi^2 r_1 r_2 r_3 (R_e^3 - R_i^3)}$$

$$P_d^2 = -V_g^2 \mu p_0^2 = -\frac{3 p F_v^{max} R_e \omega_m}{8 \pi^2 r_1 r_2 r_3 (R_e^3 - R_i^3)}$$

$$P_d^3 = -V_g^3 \mu p_0^3 = -\frac{3 p F_v^{max} R_e \omega_m}{8 \pi^2 r_1 r_2 r_3 (R_e^3 - R_i^3)}$$

On a donc $P_d^1 = P_d^2 = P_d^3$. La puissance maximale à dissiper n'est donc pas un critère pertinent pour choisir entre les 3 configurations.

Question 31 On a tracé sur la figure du document réponse les couples (V_g^i, p_0^i) pour $i \in 1, 2, 3$ ainsi que la limite associée à la puissance maximale que l'on peut dissiper par unité de surface; indiquer à côté de chaque point la configuration à laquelle il correspond ($\mathcal{L}_1$, $\mathcal{L}_2$, ou $\mathcal{L}_3$); en justifiant le choix, indiquer par une croix quelle configuration doit être retenue.



D'après les relations de la question 28, on a $p_0^1 < p_0^2 < p_0^3$ et les relations de la question 29, on a $V_g^1 > V_g^2 > V_g^3$. Ce qui permet de trouver les configurations associées aux 3 points ci-dessus.

On choisit la configuration 2 car $p_0^2 < p_0^{max}$ et $V_g^2 < V_g^{max}$

Question 32 Calculer la valeur de F_r en N à installer.

En considérant la configuration 2, on a $F_r = A C_l^2 = A \frac{p F_v^{max}}{2 \pi r_3} \approx 3416 \text{ N}$

Question 33 Exprimer la raideur K_r d'un empilement composé de n_p paquets de $n_{r/p}$ rondelles par paquet en fonction de k_r , n_p et $n_{r/p}$; exprimer l'écrasement maximal Δ^{max} que peut subir l'assemblage en fonction de n_p et h_0 ; donner l'expression de l'effort presseur installé F_r en fonction de $n_{r/p}$, k_r , ε , et h_0 .

$$K_r = \frac{n_{r/p} k_r}{n_p}$$

$$\Delta^{max} = n_p h_0$$

$$F_r = K_r \Delta = n_{r/p} k_r \varepsilon h_0$$

Question 34 Donner la valeur de ΔC , puis exprimer ΔF en fonction de ΔC et $A(R_e, R_i, \mu)$; donner enfin la valeur de ΔF .

$$\text{On a } F_r = A C_l^2 \text{ et } C_l^2 = \frac{p F_v^{max}}{2 \pi r_3}$$

$$\text{d'où } \Delta C_l = \frac{p \Delta F_v^{max}}{2 \pi r_3} \text{ avec } \Delta F_v^{max} = 2000 \text{ N.}$$

$$\text{On obtient } \Delta C_l \approx 0,68 \text{ N}$$

Et $\Delta F = A \Delta C_l \approx 342 \text{ N}$. Nous aurions pu aussi prendre 10% de la valeur de F_r trouvé à la question 32.

Question 35 Exprimer ΔF en fonction de k_r , n_p , $n_{r/p}$, p_e , N_e et N_l ; exprimer le rapport $\Delta F/F_r$ en fonction de ε , h_0 , n_p , $n_{r/p}$, N_e et N_l ; quel type d'empilement de rondelles permet de minimiser l'erreur relative $\Delta F/F_r$?

$$\text{On a } \Delta F = K_r \Delta x = \frac{n_{r/p} k_r}{n_p} \Delta x = \frac{n_{r/p} k_r}{n_p} \frac{p_e}{N_e N_l}$$

$$\text{D'où } \frac{\Delta F}{F_r} = \frac{\frac{n_{r/p} k_r}{n_p} \frac{p_e}{N_e N_l}}{n_{r/p} k_r \varepsilon h_0} = \frac{p_e}{n_p N_e N_l \varepsilon h_0}$$

$\frac{\Delta F}{F_r}$ est minimal pour n_p maximal.

Question 36 Pour chaque solution, indiquer par une croix si la solution proposée convient; préciser les critères qui ont permis d'éliminer certaines solutions.

On veut $F_r(0.25) < F_r < F_r(0.75)$ avec $F_r \approx 3416 \text{ N}$, $\Delta F < 342 \text{ N}$.

Ref	D_e	D_i	e	h_0	n_p	$n_{r/p}$	$F_r(0.25)$	$F_r(0.75)$	ΔF	$\Delta F\%$	Convient
Sol1	23	12,2	1,85	0,6	1	1	750	2250	114	5,2	
Sol3	23	12,2	1,85	0,6	1	2	1500	4500	227	10,3	
Sol4	23	12,2	1,85	0,6	1	3	2250	6750	341	15,5	X
Sol5	23	12,2	1,85	0,6	2	1	750	2250	57	2,6	
Sol6	23	12,2	1,85	0,6	2	3	2250	6750	170	7,7	X
Sol7	23	12,2	1,85	0,6	2	4	3000	9000	227	10,3	X
Sol8	23	12,2	1,85	0,6	3	1	750	2250	38	1,7	
Sol9	23	12,2	1,85	0,6	3	2	1500	4500	76	3,4	X
Sol10	23	12,2	2	0,5	1	1	1125	3375	205	9,3	
Sol11	23	12,2	2	0,5	1	2	2250	6750	409	18,6	
Sol12	23	12,2	2	0,5	1	3	3375	10125	614	27,9	
Sol13	23	12,2	2	0,5	2	1	1125	3375	102	4,6	X
Sol14	23	12,2	2	0,5	2	3	3375	10125	307	13,9	
Sol15	23	12,2	2	0,5	3	1	1125	3375	68	3,1	
Sol16	23	12,2	2	0,5	3	2	2250	6750	136	6,2	X

3 Dimensionnement d'un arbre de transmission et de ses papiers

Objectif

Dans cette partie, on souhaite réaliser le dimensionnement de l'arbre de transmission (A_3) portant le limiteur de couple ainsi que le dimensionnement du guidage en rotation associé.

3.1 Estimation du chargement

Pour les questions 37 à 40, les torseurs sont écrits dans la base $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$.

Question 37 Donner la forme des torseurs $\{\mathcal{F}^A(0 \rightarrow A_3)\}$ et $\{\mathcal{F}^D(0 \rightarrow A_3)\}$ en respectant les notations précédentes : lorsqu'une action mécanique ne peut pas être transmise, on indiquera un 0.

$$\{\mathcal{F}^A(0 \rightarrow A_3)\} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ Y_A & 0 \\ Z_A & 0 \end{Bmatrix}_A$$

$$\{\mathcal{F}^D(0 \rightarrow A_3)\} = \begin{Bmatrix} X_D & 0 \\ Y_D & 0 \\ Z_D & 0 \end{Bmatrix}_D$$

Question 38 Donner les torseurs $\{\mathcal{F}(A_4 \rightarrow A_3)\}$ décrivant les actions d'engrènement I_{43} et $\{\mathcal{F}(L \rightarrow A_3)\}$ décrivant l'effort presseur du limiteur imposé en B en fonction de C_3 , F_r , r_{43} , et α ; donner ensuite la somme notée $\{\mathcal{F}(Ext \rightarrow A_3)\}$ de ces deux torseurs exprimée au point B.

$$\{\mathcal{F}(A_4 \rightarrow A_3)\} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ R_{43} & 0 \\ T_{43} & 0 \end{Bmatrix}_{I_{43}} = \begin{Bmatrix} 0 & -C_3 \\ \frac{C_3 \tan \alpha}{r_{43}} & 0 \\ \frac{C_3}{r_{43}} & 0 \end{Bmatrix}_B$$

$$\{\mathcal{F}(L \rightarrow A_3)\} = \begin{Bmatrix} -F_r & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_B$$

Question 39 Donner la forme des torseurs d'actions mécaniques $\{\mathcal{F}(A_2 \rightarrow A_3)\}$ au point I_{23} puis au point C en fonction de T_{23} , r_{23} , et α .

$$\{\mathcal{F}(A_2 \rightarrow A_3)\} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ -R_{23} & 0 \\ T_{23} & 0 \end{Bmatrix}_{I_{23}} = \begin{Bmatrix} 0 & r_{23}T_{23} \\ -T_{23} \tan \alpha & 0 \\ T_{23} & 0 \end{Bmatrix}_C$$

Question 40 Donner la forme de la somme notée $\{\mathcal{F}(ext \rightarrow A_3)\}$ des torseurs $\{\mathcal{F}^D(0 \rightarrow A_3)\}$ et $\{\mathcal{F}^D(L \rightarrow A_3)\}$ en D.

$$\{\mathcal{F}(ext \rightarrow A_3)\} = \begin{Bmatrix} X_D + F_r & 0 \\ Y_D & 0 \\ Z_D & 0 \end{Bmatrix}_D$$

Question 41 Préciser quelles sont les inconnues statiques de ce problème ; préciser le système isolé et les théorème(s) utilisés) permettant de les obtenir.

Si on considère que C_3 est connu, les inconnues sont Y_A , Z_A , X_D , Y_D , Z_D et T_{23} .

Le système isolé est l'arbre sans le plateau presseur et les ressorts si on veut faire apparaître les actions du limiteur de couple.

Le Principe Fondamental de la Statique va permettre de trouver ces inconnues.

Question 42 En appliquant la démarche proposée à la question précédente, écrire les équations permettant à terme d'obtenir les inconnues du problème. Les équations de moment seront écrites au point A. La résolution des équations n'est pas demandée.

En appliquant le PFS à l'ensemble isolé à la question 41 et en prenant en compte les actions mécaniques des questions 37 à 40 et en calculant les moments en A, on obtient :

$$X_D + F_r - F_r = 0$$

$$Y_A + Y_D + \frac{C_3 \tan \alpha}{r_{43}} - T_{23} \tan \alpha = 0$$

$$Z_A + Z_D + \frac{C_3}{r_{43}} + T_{23} = 0$$

$$-C_3 + r_{23} T_{23} = 0$$

$$-\frac{C_3}{r_{43}} l_1 - T_{23} (l_1 + l_2) - Z_D (l_1 + l_2 + l_3) = 0$$

$$\frac{C_3 \tan \alpha}{r_{43}} l_1 - T_{23} \tan \alpha (l_1 + l_2) + Y_D (l_1 + l_2 + l_3) = 0$$

3.2 Etude des sollicitations dans l'arbre de transmission

Pour les questions 43 à 46, le torseur de cohésion est écrit dans la base $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$.

Question 43 Pour chaque tronçon $p \in \{1, 2, 3\}$ de la poutre, indiquer dans le tableau les composantes non nulles du torseur des efforts de cohésion et indiquer par un 0 les composantes nulles : indiquer dans le même tableau les sollicitations présentes dans chaque tronçon.

Tronçon 1 : $\left\{ \begin{array}{cc} 0 & 0 \\ T_y^1 & M_{fy}^1 \\ T_z^1 & M_{fz}^1 \end{array} \right\}_G$, Cisaillement, Flexion

Tronçon 2 : $\left\{ \begin{array}{cc} N^2 & M_t^2 \\ T_y^2 & M_{fy}^2 \\ T_z^2 & M_{fz}^2 \end{array} \right\}_G$, Traction/Compression, Cisaillement, Torsion, Flexion

Tronçon 3 : $\left\{ \begin{array}{cc} N^3 & 0 \\ T_y^3 & M_{fy}^3 \\ T_z^3 & M_{fz}^3 \end{array} \right\}_G$, Traction/Compression, Cisaillement, Flexion

Question 44 Exprimer les composantes N^1 , T_y^1 , T_z^1 , M_t^1 , M_{fy}^1 et M_{fz}^1 en fonction de Y_A , Z_A et x .

Pour le tronçon 1 : $\{\mathcal{F}(p^+ \rightarrow p^-)\} = -\{\mathcal{F}(ext \rightarrow p^-)\} = -\{\mathcal{F}^A(0 \rightarrow A_3)\}$

On obtient : $\{\mathcal{F}(p^+ \rightarrow p^-)\} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ -Y_A & -x Z_A \\ -Z_A & x Y_A \end{Bmatrix}_G$

Question 45 Exprimer les composantes N^2 , T_y^2 , T_z^2 , M_t^2 , M_{fy}^2 et M_{fz}^2 en fonction de Y_A , Z_A , R_{43} , T_{43} , r_{43} et x .

Pour le tronçon 2 :

$$\{\mathcal{F}(p^+ \rightarrow p^-)\} = -\{\mathcal{F}(ext \rightarrow p^-)\} = -(\{\mathcal{F}^A(0 \rightarrow A_3)\} + \{\mathcal{F}^B(L \rightarrow A_3)\} + \{\mathcal{F}(A_4 \rightarrow A_3)\})$$

On obtient : $\{\mathcal{F}(p^+ \rightarrow p^-)\} = \begin{Bmatrix} F_r & r_{43} T_{43} \\ -Y_A - R_{43} & -x Z_A + (l_1 - x) T_{43} \\ -Z_A - T_{43} & x Y_A - (l_1 - x) R_{43} \end{Bmatrix}_G$

Question 46 Exprimer les composantes N^3 , T_y^3 , T_z^3 , M_t^3 , M_{fy}^3 et M_{fz}^3 en fonction de Y_D , Z_D , F_r , l_1 , l_2 , l_3 et x .

Pour le tronçon 3 :

$$\{\mathcal{F}(p^+ \rightarrow p^-)\} = \{\mathcal{F}(ext \rightarrow p^+)\} = \{\mathcal{F}^D(0 \rightarrow A_3)\} + \{\mathcal{F}^D(L \rightarrow A_3)\}$$

On obtient : $\{\mathcal{F}(p^+ \rightarrow p^-)\} = \begin{Bmatrix} X_D + F_r & 0 \\ Y_D & -(l_1 + l_2 + l_3 - x) Z_D \\ Z_D & (l_1 + l_2 + l_3 - x) Y_D \end{Bmatrix}_G$

Question 47 Donner les expressions de S , I_{Gy} , I_{Gz} , et I_0 en fonction de d .

$$S = \frac{\pi d^2}{4}$$

$$I_{Gy} = I_{Gz} = \frac{\pi d^4}{64}$$

$$I_0 = \frac{\pi d^4}{32}$$

Question 48 Dans le cas d'une sollicitation en flexion plane dans le plan $(\vec{x}, \vec{y})$, rappeler le lien entre la contrainte normale dans une section droite σ^p , le moment fléchissant M_{fz}^p , la distance y à la ligne moyenne et les caractéristiques de la section droite : de même, dans le cas d'une sollicitation en flexion plane dans le plan $(\vec{x}, \vec{z})$, rappeler le lien entre la contrainte normale dans la section droite σ^p , le moment fléchissant M_{fy}^p , la distance z à la ligne moyenne et les caractéristiques de la section droite ; enfin dans le cas d'une sollicitation de traction/compression pure donner le lien entre la contrainte normale dans la section droite σ^p , l'effort normal N^p et les caractéristiques de la section droite.

Pour une flexion plane dans le plan $(\vec{x}, \vec{y})$: $\sigma^p = -\frac{y M_{fz}^p}{I_{Gz}}$

Pour une flexion plane dans le plan $(\vec{x}, \vec{z})$: $\sigma^p = \frac{z M_{fy}^p}{I_{Gy}}$

Pour une traction/compression : $\sigma^p = \frac{N^p}{S}$

Question 49 Après avoir cité le principe/théorème utilisé, donner l'expression de la contrainte normale dans la section droite σ^p en fonction de N^p , M_{fy}^p , M_{fz}^p , y , z , et des caractéristiques de la section droite.

D'après le principe de superposition, on somme la contrainte normale pour chaque sollicitation :

$$\sigma^p = -\frac{y M_{Iz}^p}{I_{Gz}} + \frac{z M_{Iy}^p}{I_{Gy}} + \frac{N^p}{S}$$

Question 50 Donner l'expression de la contrainte de cisaillement τ^p en tout point de la section droite en fonction de la distance ρ de ce point à la ligne moyenne, de M_t et des caractéristiques géométriques de la section droite.

Si les efforts tranchants sont négligés, la contrainte de cisaillement n'est due qu'à la torsion donc $\tau^p = \frac{\rho |M_t|}{I_0}$.

Question 51 Pourquoi avoir choisi de tracer les contraintes sur la surface extérieure du cylindre ? Serait-il judicieux de négliger σ^p devant τ^p ou inversement (justifier la réponse) ?

La contrainte normale σ^p dépend linéairement de y et z , ainsi que la contrainte de cisaillement τ^p dépend linéairement de ρ donc c'est sur la surface extérieure que ces contraintes seront maximales.

D'après l'annexe N, il y a un facteur 5 entre $\max(\sigma^p)$ et $\max(\tau^p)$ donc on ne peut pas négliger une contrainte par rapport à l'autre.

Question 52 Indiquer le critère d'acceptation d'un diamètre d'arbre d en fonction de la valeur maximale de la contrainte de σ_{VM}^{max} , de σ_e et de s ; indiquer la valeur du diamètre d'arbre retenu permettant de supporter le chargement tout en minimisant la masse de l'arbre : donner le tronçon sur lequel la contrainte σ_{VM} est maximale et donner l'angle θ pour lequel cette contrainte maximale est atteinte.

$$\sigma_{VM}^{max} = \frac{\sigma_e}{s} = 120 \text{ MPa.}$$

Pour $d = 12 \text{ mm}$, on constate que $\sigma_{VM} < \sigma_{VM}^{max}$ en tout point et le maximum est obtenu pour $\theta = \frac{\pi}{2}$

3.3 Choix du guidage en rotation

Question 53 Donner les expressions de $F_{A,a}$, $F_{A,r}$, $F_{D,a}$, $F_{D,r}$ en fonction de Y_A , Z_A , X_D , Y_D , Z_D puis fournir les valeurs numériques associées en N.

$$F_{A,a} = 0 \text{ N}$$

$$F_{A,r} = \sqrt{Y_A^2 + Z_A^2} \approx 830 \text{ N}$$

$$F_{D,a} = 0 \text{ N}$$

$$F_{D,r} = \sqrt{Y_D^2 + Z_D^2} \approx 355 \text{ N}$$

Question 54 A partir de la durée de vie souhaitée en année L_a , du nombre d'ouverture/fermeture journalier $N_{of/j}$, de la durée T d'un cycle (ouverture ou fermeture) en secondes, et du nombre de jours de service annuel $N_{j/a}$, donner l'expression de la durée de vie souhaitée en heures L_h ; effectuer l'application numérique ; exprimer la durée de vie L en millions de tours en fonction de N_3 et L_h ; effectuer l'application numérique.

$$L_h = L_a \times N_{j/a} \times N_{of/j} \times 24 \times T = 2000 \text{ h}$$

$$\text{Or } L_h = \frac{L \times 10^6}{60 N_3} \text{ soit } L = \frac{60 N_3 L_h}{10^6} = 16,8 \text{ Mtour}$$

Question 55 Exprimer les charges dynamiques de base minimales C_A et C_D permettant d'atteindre la durée de vie souhaitée en fonction de $F_{A,r}$, $F_{D,r}$, et L ; effectuer les applications numériques.

L est la durée de vie souhaitée en millions de tours donc pour chaque roulement, on souhaite que $\left(\frac{C}{P}\right)^n > L$ avec $P = F_r$ car $F_a = 0$ et $n = 3$ car roulement à billes.

D'où $C_A > F_{A,r} L^{1/3}$ soit $C_A > 2125 \text{ N}$

et $C_D > F_{D,r} L^{1/3}$ soit $C_D > 909 \text{ N}$

Question 56 Parmi la liste des roulements à billes à contact radial présentée en annexe O, quels sont ceux qui ne conviennent pas ?

Si on considère que l'on choisit les mêmes roulements en A et D , les références 624, 625 et 61801 ne conviennent pas car les roulements doivent respecter $d \leq 6 \text{ mm}$ et $C > C_A$.