

Proposition de corrigé

Concours : X-ENS

Année : 2024

Filière : PSI

Épreuve : Modélisation

Ceci est une proposition de corrigé des concours de CPGE, réalisée bénévolement par des enseignants de Sciences Industrielles de l'Ingénieur et d'Informatique, membres de l'[UPSTI](https://www.upsti.fr) (Union des Professeurs de Sciences et Techniques Industrielles), et publiée sur le site de l'association :

<https://www.upsti.fr/espace-etudiants/annales-de-concours>

A l'attention des étudiants

Ce document vous apportera des éléments de corrections pour le sujet traité, mais n'est ni un corrigé officiel du concours, ni un corrigé détaillé ou exhaustif de l'épreuve en question.

L'UPSTI ne répondra pas directement aux questions que peuvent soulever ces corrigés : nous vous invitons à vous rapprocher de vos enseignants si vous souhaitez des compléments d'information, et à vous adresser à eux pour nous faire remonter vos éventuelles remarques.

Licence et Copyright

Toute représentation ou reproduction (même partielle) de ce document faite sans l'accord de l'UPSTI est **interdite**. Seuls le téléchargement et la copie privée à usage personnel sont autorisés (protection au titre des [droits d'auteur](#)).

En cas de doute, n'hésitez pas à nous contacter à : corrigesconcours@upsti.fr.

Informez-vous !

Retrouvez plus d'information sur les [Sciences de l'Ingénieur](#), l'[orientation](#), les [Grandes Ecoles](#) ainsi que sur les [Olympiades de Sciences de l'Ingénieur](#) et sur les [Sciences de l'Ingénieur au Féminin](#) sur notre site : www.upsti.fr

L'équipe UPSTI

Le projet Colibri

Corrigé UPSTI

Question 1 Comparer les différentes technologies de robots, par rapport aux espèces de colibris vivants. Quel paramètre doit encore être optimisé ?

Concernant la longueur des ailes et la fréquence des battements les différentes technologies suivent bien les colibris biologiques. Cependant la masse est trop élevée, il faudra optimiser ce critère.

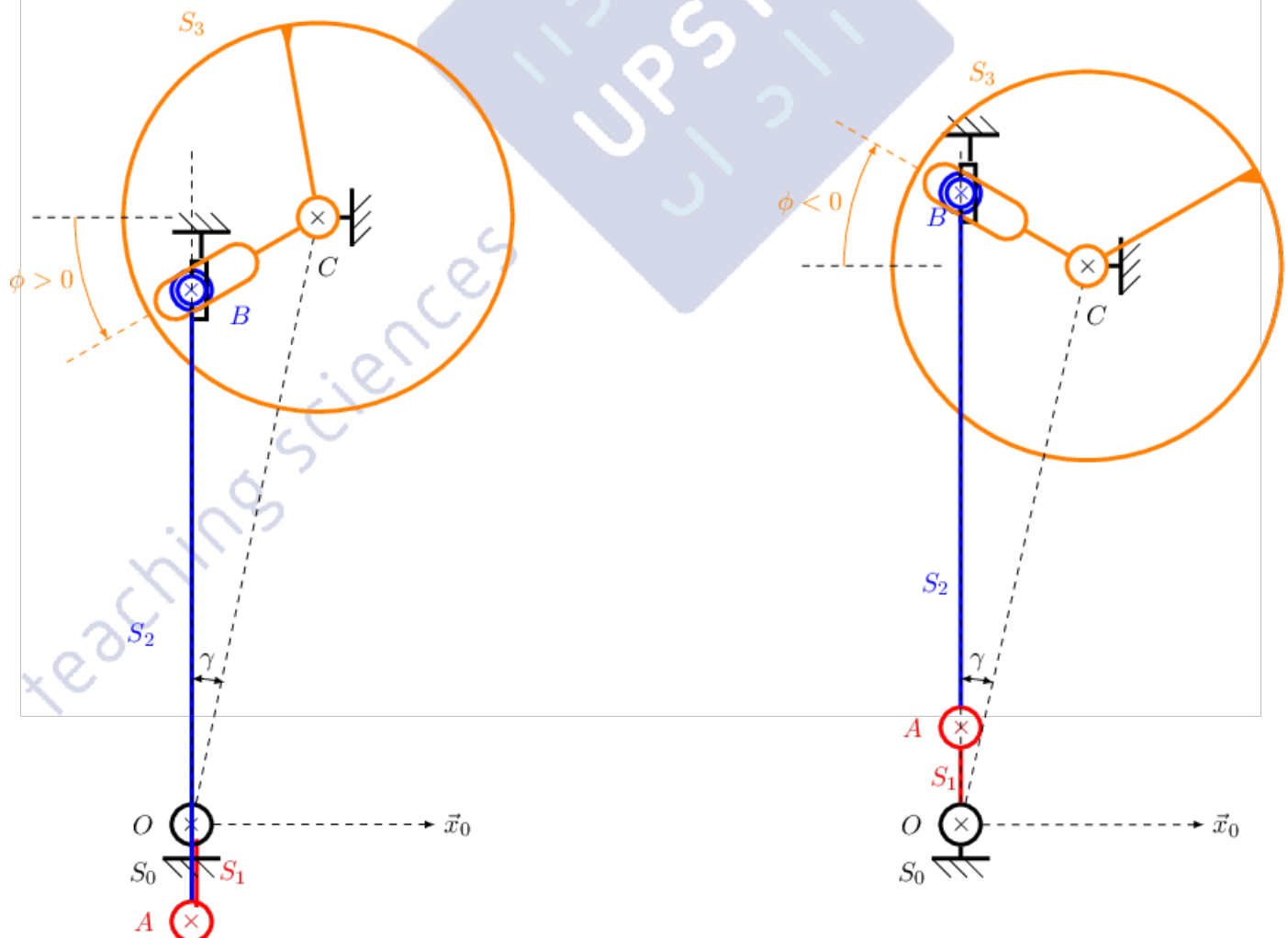
MODÉLISATION DU MÉCANISME

1 Étude de la transmission

Question 2 Réaliser sur votre copie deux schémas du premier étage d'amplification correspondant aux angles $\theta = \theta_1 = -\pi/2$ et $\theta = \theta_2 = \pi/2$.

Pour $\theta = -\pi/2, \delta = \pi$

Pour $\theta = \pi/2, \delta = 0$



Question 3 Dans le cas général, et à partir de deux fermetures géométriques, montrer que :

$$L_1^2 \cos^2 \theta + (L_1 \sin \theta - L \cos \gamma + L \sin \gamma \tan \phi)^2 = L_2^2$$

Fermeture OABCO : $\vec{OA} + \vec{AB} + \vec{BC} + \vec{CO} = \vec{0}$

En projection dans la base $(\vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$

$$L_1 \cos(\theta) + L_2 \cos(\theta + \delta) + \mu \cos(\phi) - L \sin(\gamma) = 0 \quad (1)$$

$$L_1 \sin(\theta) + L_2 \sin(\theta + \delta) + \mu \sin(\phi) - L \cos(\gamma) = 0 \quad (2)$$

d'où

$$\tan(\phi) = \frac{L_1 \sin(\theta) + L_2 \sin(\theta + \delta) - L \cos(\gamma)}{-L \sin(\gamma)} \quad (3)$$

Fermeture OABO : $\vec{OA} + \vec{AB} + \vec{BO} = \vec{0}$ En projection dans la base $(\vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$

$$L_1 \cos(\theta) + L_2 \cos(\theta + \delta) = 0 \quad (4)$$

(pas de composante sur $\vec{x}_0$ pour $\vec{OB}$)

$$L \cos(\gamma) - \mu \sin(\phi) - h(t) = 0 \quad (5)$$

d'où

$$L_1^2 \cos^2 \theta + (L_1 \sin \theta - L \cos \gamma + L \sin \gamma \tan \phi)^2 = L_2^2$$

Question 4 Donner dans chacun des cas de la question 2 :

- le signe de ϕ et l'expression de h .
- l'expression de $\tan \phi$ en fonction de L, L_1, L_2 , et γ

Pour $\theta = -\pi/2, \delta = \pi : \phi > 0, h = L_2 - L_1$ et $\tan \phi = \frac{L_1 - L_2 + L \cos(\gamma)}{L \sin(\gamma)}$

Pour $\theta = \pi/2, \delta = 0 : \phi < 0, h = L_2 + L_1$ et $\tan \phi = \frac{-L_1 - L_2 + L \cos(\gamma)}{L \sin(\gamma)}$

Question 5 En déduire l'expression de $\tan \phi$ en fonction de L, L_1, L_2, γ et θ

$$L_1^2 \cos^2 \theta + (L_1 \sin \theta - L \cos \gamma + L \sin \gamma \tan \phi)^2 = L_2^2$$

(question 3) d'où

$$(L_1 \sin \theta - L \cos \gamma + L \sin \gamma \tan \phi)^2 = L_2^2 - L_1^2 \cos^2 \theta$$

donc

$$|(L_1 \sin \theta - L \cos \gamma + L \sin \gamma \tan \phi)| = \sqrt{L_2^2 - L_1^2 \cos^2 \theta}$$

Pour pouvoir supprimer la valeur absolue il est nécessaire de déterminer le signe de $(L_1 \sin \theta - L \cos \gamma + L \sin \gamma \tan \phi)$ or en remplaçant $\tan \phi$ déterminé précédemment on trouve $(L_1 \sin \theta - L \cos \gamma + L \sin \gamma \tan \phi) =$

$$L_1 \sin(\theta) - h < 0 \text{ donc } \tan(\phi) = \frac{L \cos \gamma - L_1 \sin \theta - \sqrt{L_2^2 - L_1^2 \cos^2(\theta)}}{L \sin \gamma}$$

Question 6 Déterminer la relation liant ψ, θ et les paramètres constants du problème.

La poulie courroie a un rapport de transmission $\frac{D_{menante}}{D_{menée}} = \frac{\dot{\psi}}{\dot{\phi}}$ donc :

$$\psi = \frac{D_3}{D_4} \times \arctan\left(\frac{L\cos\gamma - L_1\sin\theta - \sqrt{L_2^2 - l_1^2\cos^2(\theta)}}{L\sin\gamma}\right)$$

Question 7 Justifier la forme de la fonction coût.

Cette forme fait penser à la méthode des moindres carrés.

Question 8 Écrire les instructions en Python permettant de générer un tableau numpy nommé `TabJ` donnant les valeurs de la fonction J pour tout couple (L_2, γ) pris dans les listes `paramL2` et `paramGamma`.

```

1 import numpy as np
2
3 # L1 et L sont définies avant la question 2
4 L = 14.75 # En mm
5 L1 = 2.25 # En mm
6
7 # Création des tableaux de paramètres.
8 nbrevaleurs=50
9 paramL2 = np.linspace(13, 17, nbrevaleurs)
10 paramGamma = np.linspace(22, 26, nbrevaleurs)
11 thetac=np.linspace(0,360,200)
12
13 # Définition de la fonction J(L2, gamma).
14 #def J(L2, gamma):
15
16     #return
17
18 # Création du tableau TabJ pour stocker les résultats.
19 TabJ = np.zeros((nbrevaleurs, nbrevaleurs))
20
21 #Méthode des trapèzes pour l'intégration numérique.
22 def trapezoidal_integration(f, L2, gamma, phim):
23     A=0
24     for i in range(len(thetac)-1):
25         y = f(thetac[i+1]*np.pi/180, L2, gamma,phim)+f(thetac[i]*np.pi/180, L2, gamma
26         ,phim)
27         h = (thetac[i+1] - thetac[i])*np.pi/180
28         A += 0.5*y*h
29     return A
30
31 #Fonction à intégrer
32 def f(thetai,L2i,phim,gammai):
33     phi=np.arctan((L*np.cos(gammai)-L1*np.sin(thetai)-np.sqrt(L2i**2-L1**2*np.cos(
34     thetai)**2))/(L*np.sin(gammai)))
35     return (phi-phim+(20*np.pi/180)*np.sin(thetai))**2
36
37 #Main
38 for k in range(len(paramL2)):
39     for j in range(len(paramGamma)):
40         phi1=np.arctan((L1-paramL2[k]+L*np.cos(paramGamma[j]*np.pi/180))/(L*np.sin(
41         paramGamma[j]*np.pi/180)))

```

```

37     phi2=np.arctan((-L1-paramL2[k]+L*np.cos(paramGamma[j]*np.pi/180))/(L*np.sin(
    paramGamma[j]*np.pi/180)))
38     phim=(phi1+phi2)/2
39     TabJ[k,j]=trapezoidal_integration(f, paramL2[k], paramGamma[k]*np.pi/180,
    phim)

```

Question 9 Écrire l'(es) instruction(s) Python nécessaire(s) pour construire la liste `psic` des valeurs de $\psi - \psi_m$ représentant l'angle des ailes recentré

```
1 | psic=D3/D4*phic
```

Question 10 Montrer que :

$$a = 4\pi^2 f^2 \frac{d^2(\psi - \psi_m)}{d\theta^2}$$

On a ψ_m constant

$$a = \ddot{\psi} = \frac{d^2\psi}{dt^2} = \frac{d}{dt} \left(\frac{d(\psi - \psi_m)}{d\theta} \times \frac{d\theta}{dt} \right) = \frac{d}{dt} \left(\omega \frac{d(\psi - \psi_m)}{d\theta} \right)$$

or $\omega = 2\pi f$ est une constante, on peut simplifier la dérivation composée donc

$$a = 4\pi^2 f^2 \frac{d^2(\psi - \psi_m)}{d\theta^2}$$

Question 11 En utilisant le schéma d'Euler explicite, déterminer la relation de récurrence à deux termes liant les éléments de `TabA` avec les éléments de `psic`.

Pour une dérivée seconde le schéma d'Euler explicite : (on suppose que θ est en degré)

$$TabA = (4\pi^2 f^2) \frac{\psi[k+2] + \psi[k] - 2\psi[k+1]}{((\theta[k+1] - \theta[k]) \times \pi/180)^2}$$

Question 12 En déduire les instructions Python permettant de calculer l'accélération angulaire durant un cycle de battement à une fréquence de 20 Hz.

```

1 | TabA = np.zeros(len(theta)-2) #Initialisation
2 | f=20 #Hz
3 | for k in range(len(TabA))
4 |     numerator = psi[k+2] + psi[k] - 2 * psi[k+1]
5 |     denominator = ((theta[k+1] - theta[k]) * np.pi / 180) ** 2
6 |     TabA[k] = (4 * np.pi ** 2 * f ** 2) * (numerator / denominator)

```

Question 13 Comparer les graphes d'accélération angulaire du solide lié aux ailes du drone Colibri, et conclure sur l'intérêt de cette nouvelle cinématique.

La courbe de l'accélération angulaire s'approche d'une sinusoïde malgré des écarts. L'intérêt de cette nouvelle cinématique réside dans la symétrie du cycle.

2 Étude de l'association moteur/réducteur

Question 14 Donner l'expression de la puissance électrique consommée P_e et de la puissance mécanique fournie P_m en fonction de u_m , ω_m et des constantes du moteur.

$$P_e = u_m i = \frac{u_m^2}{R} \left(1 - \frac{k\omega_m}{u_m}\right)$$

$$P_m = C_m \omega_m = k \left(\frac{u_m - k\omega_m}{R} - i_0 \right) \omega_m$$

Question 15 — En déduire l'expression de la puissance perdue par effet Joule en fonction de u_m , ω_m et des constantes du moteur.

La puissance perdue par effet Joule obtenue par bilan de puissance :

$$P_j = P_e - (P_m + C_p \omega_m) = \frac{u_m^2}{R} \left(1 - \frac{k\omega_m}{u_m}\right)^2$$

Question 16 Déterminer l'expression de u_m en fonction de ω_m pour un fonctionnement à vide du moteur.

A vide la puissance mécanique est nulle car $i = i_0$ d'où $u_m = Ri_0 + k\omega_m$

Question 17 Déterminer l'expression de u_m en fonction de ω_m pour un fonctionnement à puissance maximale du moteur.

A puissance maximale, la fonction $P_m(\omega_m)$ possède un extremum (maximum) donc $\frac{\partial P_m}{\partial \omega_m} = 0$ donc

$$\frac{k}{R}(u_m - k\omega_m - Ri_0) - ki_0 = 0$$

d'où

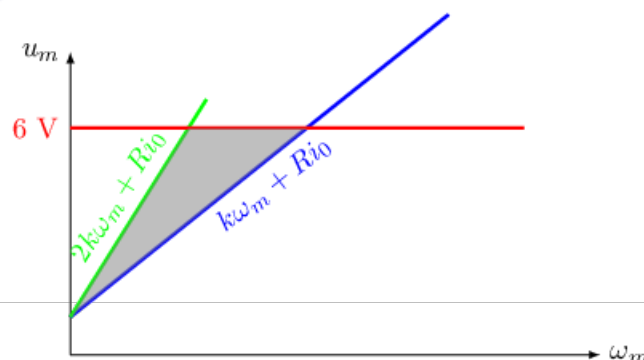
$$u_m = 2k\omega_m + Ri_0$$

Question 18 Représenter sur votre copie la surface, dans le plan (ω_m, u_m) , qui représente l'ensemble des points de fonctionnement possibles du moteur.

En plus des 2 critères des questions précédentes (fonctionnement à vide et à puissance max), le sujet impose un troisième critère à u_m maximale. on a donc trois limites au domaine représentant les points de fonctionnement possibles :

$$u_m = 6 \text{ V} \quad u_m = k\omega_m + R \cdot i_0 \quad u_m = 2k\omega_m + R \cdot i_0$$

On obtient donc la surface grisée suivante :



Question 19 Donner l'équation de $u_m = f(\omega_m)$ correspondant à la condition $P = P^*$

Pour $P_m = P^* = k\omega_m(\frac{u_m - k\omega_m}{R} - i_0)$, (Q14) on en déduit :

$$u_m = k\omega_m + \frac{P^*R}{k\omega_m} + Ri_0$$

Question 20 Écrire la fonction `dichotomie` qui prend en argument une fonction monotone `f` et qui renvoie la solution de l'équation $f(x) = 0$ à 10^{-3} près entre les valeurs 0 et 7000rad/s.

```

1 def dichotomie(f, a, b, tol=1e-3):
2     """
3
4     Arguments :
5     f -- fonction monotone dont on cherche la racine
6     a -- borne inférieure de l'intervalle de recherche
7     b -- borne supérieure de l'intervalle de recherche
8     tol -- tolérance, précision de la solution
9
10    """
11    if f(a) * f(b) > 0:
12        raise ValueError("La fonction doit changer de signe sur l'intervalle [a, b]")
13
14    while (b - a) / 2 > tol:
15        c = (a + b) / 2
16        if f(a) * f(c) < 0:
17            b = c
18        else:
19            a = c
20
21    return (a + b) / 2
22
23
24 dichotomie(f, 0, 7000)

```

Question 21 Écrire les fonctions `fmini` et `fmaxi` arguments de la fonction `dichotomie` qui vont permettre de déterminer respectivement ω_{mini} et ω_{maxi} . Toutes les constantes du problème `k`, `R`, `i_0`, `Petoile`, `Umax` représentant respectivement k , R , i_0 , P^* , U_{max} sont supposées être déjà initialisées en mémoire comme variables globales.

```

1 def fmini(w):
2     return (R/k/w*(Petoile+k*i0*w)+k*w-(2*k*w+r*i0))
3
4 def fmaxi(w):
5     return R/k/wm*(Pet+k*i0*w)+k*w-Umax

```

Question 22 Écrire les lignes de code permettant de déterminer ω_{mini} et ω_{maxi}

```

1 wmini=dichotomie(fmini, 0, 7000, , tol=1e-3)
2 wmax=dichotomie(fmaxi, 0, 7000, , tol=1e-3)

```

Question 23 Montrer que la puissance perdue peut alors se réécrire avec cete contrainte sous la forme :

$$P_j = R \left(\frac{P^*}{k\omega_m} + i_0 \right)^2$$

D'après la question 15 : $P_j = \frac{u_m^2}{R} (1 - \frac{k\omega_m}{u_m})^2 = \frac{1}{R} (u_m - k\omega_m)^2$ D'après la question 19 :

$$u_m - k\omega_m = \frac{P^* R}{k\omega_m} + Ri_0$$

On obtient alors

$$P_j = R \left(\frac{P^*}{k\omega_m} + i_0 \right)^2$$

Question 24 En déduire la vitesse optimale et le rapport de transmission r_{transm} associé. On prendra $\pi \approx 3,1$ pour les calculs.

La fonction de la puissance perdue en fonction de la vitesse de rotation est décroissante et est minimale pour $\omega_m = \omega_{maxi} = 6014 \text{ rad/s}$. Or la campagne d'essais a permis de déterminer la fréquence de battement des ailes à 20Hz soit $\omega \approx 124 \text{ rad/s}$. Le rapport de transmission est donc de $r = 48,5$.

Question 25 Suite à cette étude, le laboratoire de recherche qui conçoit le drone Colibri a réalisé un prototype avec un réducteur à roues dentées de rapport de transmission $r_{transm} = 39$. Quelle(s) justification(s) pouvez-vous avancer pour le choix de ce rapport ?

Le rapport trouvé à la question précédente est supérieur à celui utilisé pour le prototype. On peut supposer que l'équipe a utilisé un réducteur existant du commerce, ou a voulu limiter l'encombrement.

3 Étude de la batterie

Question 26 En quoi cette technologie est-elle intéressante pour cette application

A partir de la figure 6, on peut noter que cette technologie est l'une des technologie possédant une gamme de point de fonctionnement de la puissance spécifique/Energie spécifique les plus étendues.

3.1 Modèle dynamique de la batterie

Question 27 Montrer, à partir des lois de l'électrocinétique, que X vérifie l'équation :

$$\dot{X} = A \cdot X + B \cdot i$$

où $A \in \mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ et $B \in \mathcal{M}_{2 \times 1}(\mathbb{R})$. Vous donnerez les expressions de A et B

En utilisant le modèle de $V_0 = a_0 \cdot SOC$, ainsi que le courant parcourant la batterie égal à $i_0 = -C \frac{dV_0}{dt}$. Et la loi des noeuds pour la capacité C_s et R_t : $C_s \frac{dV_s}{dt} + \frac{V_s}{R_t} = i$

On peut déterminer

$$\begin{bmatrix} SOC \\ V_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{-1}{R_t C_s} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} SOC \\ V_s \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{-1}{a_0 C_0} \\ \frac{1}{C_s} \end{bmatrix} i$$

d'où

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{-1}{R_i C_s} \end{bmatrix}$$

et

$$B = \begin{bmatrix} \frac{-1}{a_0 C_0} \\ \frac{1}{C_s} \end{bmatrix}$$

Question 28 À partir de la loi des mailles, donner une relation liant V_b , V_s , SOC et le courant i .

La loi des mailles : $V_b = V_0 - V_s - R_i \cdot i$ donc

$$V_s + V_b + R_i \cdot i = a_0 \cdot SOC$$

Question 29 Montrer que $V = C \cdot X$, où $C \in \mathcal{M}_{1 \times 2}(\mathbb{R})$. Vous donnerez l'expression de C .

D'après la question précédente :

$$V_s + V_b + R_i \cdot i = a_0 \cdot SOC = V_s + V$$

D'où

$$V = -V_s + a_0 \cdot SOC$$

donc

$$c = \begin{bmatrix} a_0 & -1 \end{bmatrix}$$

Question 30 Discrétiser l'équation (1) du système précédent par la méthode d'Euler explicite et donner les matrices A_e et B_e telles que :

$$X_{k+1} = A_e \cdot X_k + B_e \cdot i_k$$

où X_k représente l'état du système à l'instant t_k .

L'équation (1) discrétisée par la méthode d'Euler : $\frac{d}{dt}X = \frac{X_{k+1} - X_k}{T_e}$

T_e étant la période d'échantillonnage

3.2 Filtre de Kalman

Question 31 Exprimer ϵ_{k+1} en fonction de ϵ_k , $\hat{X}_k$, i_k , Φ_k et Ψ_{k+1} . En déduire, en justifiant, l'expression de $E(\epsilon_{k+1})$ en fonction de $E(\epsilon_k)$, $\hat{X}_k$ et i_k .

D'après la définition donnée dans l'énoncé : $\epsilon_{k+1} = \hat{X}_{k+1} - X_{k+1}$ et donc $\epsilon_k = \hat{X}_k - X_k$ On a alors :

$$\epsilon_{k+1} = A_f \hat{X}_k + B_f i_k + K_{k+1} V_{k+1} - X_{k+1} = A_f \hat{X}_k + B_f i_k + (CK_{k+1} - I_d)X_{k+1} + k_{k+1} \Psi_{k+1}$$

d'où

$$\epsilon_{k+1} = (I_d - K_{k+1}C)A_e \epsilon_k + (A_f + (K_{k+1}C - I_d)A_e)\hat{X}_k + (B_f + (K_{k+1}C - I_d)B_e)i_k + (K_{k+1}C - I_d)\Phi_k + K_{k+1}\Psi_{k+1}$$

Comme $E(\Phi_k) = 0$ et $E(\Psi_k) = 0$:

$$E(\epsilon_{k+1}) = (I_d - K_{k+1}C)A_e E(\epsilon_k) + (A_f + (K_{k+1}C - I_d)A_e)\hat{X}_k + (B_f + (K_{k+1}C - I_d)B_e)i_k$$

Question 32 Choisir l'expression de A_f et B_f permettant d'obtenir une équation récurrente de la moyenne de l'erreur d'estimation sous la forme : $E(\epsilon_{k+1}) = M \cdot A_e \cdot E(\epsilon_k)$. Vous donnerez l'expression de la matrice M .

On souhaite avoir une équation récurrente pour ϵ , il est donc nécessaire d'éliminer les termes i_k et $\hat{X}_k$ de l'expression précédente.

On pose $A_f = (I_d - K_{k+1}C)A_e$ et donc $M = I_d - K_{k+1}C$ et $B_f = (I_d - K_{k+1}C)B_e$

Question 33 Reprendre alors l'expression de l'estimateur et montrer que $\hat{X}_{k+1}$ vérifie :

$$\hat{X}_{k+1} = A_e \cdot \hat{X}_k + B_e \cdot i_k + K_{k+1} \cdot [V_{k+1} - C(A_e \cdot \hat{X}_k + B_e \cdot i_k)]$$

$$\hat{X}_{k+1} = A_f \cdot \hat{X}_k + B_f \cdot i_k + K_{k+1}V_{k+1} = (I_d - K_{k+1}C)A_e \hat{X}_k + (I_d - K_{k+1}C)B_e i_k + K_{k+1}V_{k+1}$$

et donc

$$\hat{X}_{k+1} = A_e \cdot \hat{X}_k + B_e \cdot i_k + K_{k+1} \cdot [V_{k+1} - C(A_e \cdot \hat{X}_k + B_e \cdot i_k)]$$

Question 34 Montrer que P_k est une matrice symétrique

Une matrice symétrique est une matrice carrée qui est égale à sa propre transposée, or $P_k = E(\epsilon_k \cdot \epsilon_k^T)$ et $X_k = \begin{pmatrix} SOC_k & V_{sk} \end{pmatrix}^T$ d'où

$$P_k = \begin{pmatrix} E(\hat{SOC}_k - SOC_k)^2 & E(\hat{SOC}_k - SOC_k) \cdot (\hat{V}_{sk} - V_{sk}) \\ E(\hat{SOC}_k - SOC_k) \cdot (\hat{V}_{sk} - V_{sk}) & E((\hat{V}_{sk} - V_{sk})^2) \end{pmatrix}$$

La matrice est symétrique.

Question 35 Calculer P_{k+1} , et montrer que son expression peut se mettre sous la forme :

$$P_{k+1} = (A_e \cdot P_k \cdot A_e^T + Q) - K_{k+1} \cdot C \cdot (A_e \cdot P_k \cdot A_e^T + Q) - (A_e \cdot P_k \cdot A_e^T + Q) \cdot C^T \cdot K_{k+1}^T + K_{k+1} \cdot [C \cdot (A_e \cdot P_k \cdot A_e^T + Q) \cdot C^T + \sigma^2] \cdot K_{k+1}^T$$

$$\begin{aligned} P_{k+1} &= E(\epsilon_{k+1} \cdot \epsilon_{k+1}^T) \\ &= E[(MA_e \epsilon_k - M\phi_k + K_{k+1}\Psi_{k+1}) \cdot (MA_e \epsilon_k - M\phi_k + K_{k+1}\Psi_{k+1})^T] \\ &= E[MA_e \epsilon_k \epsilon_k^T A_e^T M^T] + E[M\phi_k \phi_k^T M^T] + K_{k+1} \sigma^2 K_{k+1}^T \end{aligned}$$

Les termes croisés sont nuls puisque les variables sont centrées et indépendantes. Les matrices M et A_e étant déterministes :

$$\begin{aligned} P_{k+1} &= MA_e P_k A_e^T M^T + M Q M^T + \sigma^2 K_{k+1} K_{k+1}^T \\ &= (I - K_{k+1}C) A_e P_k A_e^T (I - K_{k+1}C)^T + (I - K_{k+1}C) Q (I - K_{k+1}C)^T + \sigma^2 K_{k+1} K_{k+1}^T \\ P_{k+1} &= (A_e P_k A_e^T + Q) - K_{k+1}C (A_e P_k A_e^T + Q) - (A_e P_k A_e^T + Q) C^T K_{k+1}^T \\ &\quad + K_{k+1} [C (A_e P_k A_e^T + Q) C^T + \sigma^2] K_{k+1}^T \end{aligned}$$

Question 36 Montrer que si A est symétrique : $\frac{\partial \text{tr}(AB)}{\partial A} = B^T$

A est symétrique donc elle est égale à sa transposée et en utilisant les propriétés de l'énoncé : $\frac{\partial \text{tr}(AB)}{\partial A} = \frac{\partial \text{tr}(AB)^T}{\partial A} = \frac{\partial \text{tr}(B^T A^T)}{\partial A} = \frac{\partial \text{tr}(B^T A)}{\partial A} = B^T$

Question 37 En utilisant les propriétés précédentes, montrer que K_{k+1} s'écrit sous la forme :

$$K_{k+1} = P_{k+1}^{(k)} \cdot C^T \left(C \cdot P_{k+1}^{(k)} \cdot C^T + \sigma^2 \right)^{-1}$$

En utilisant les notations de l'énoncé, on peut écrire :

$$P_{k+1} = P_{k+1}^{(k)} - K_{k+1} C P_{k+1}^{(k)} - P_{k+1}^{(k)} C^T K_{k+1}^T + K_{k+1} \left(C P_{k+1}^{(k)} C^T + \sigma^2 \right) K_{k+1}^T$$

$P_{k+1}^{(k)}$ est symétrique, $\left[K_{k+1} C P_{k+1}^{(k)} \right]^T = P_{k+1}^{(k)} C^T K_{k+1}^T$ et $\text{tr}(A^T) = \text{tr}(A)$, on peut déduire :

$$\text{tr}(P_{k+1}) = \text{tr}(P_{k+1}^{(k)}) - 2\text{tr} \left(K_{k+1} C P_{k+1}^{(k)} \right) + \text{tr} \left(K_{k+1} \left(C P_{k+1}^{(k)} C^T + \sigma^2 \right) K_{k+1}^T \right)$$

À l'aide de la question précédente et de la propriété de l'énoncé :

$$\frac{\partial \text{tr}(P_{k+1})}{\partial K_{k+1}} = -2 \left[C P_{k+1}^{(k)} \right]^T + 2 K_{k+1} \left[C P_{k+1}^{(k)} C^T + \sigma^2 \right]$$

On cherche l'expression du gain de Kalman optimal c'est à dire qui minimise la somme des variances de l'erreur d'estimation, donc on veut résoudre :

$$\frac{\partial \text{tr}(P_{k+1})}{\partial K_{k+1}} = 0$$

d'où :

$$\begin{aligned} K_{k+1} \left[C P_{k+1}^{(k)} C^T + \sigma^2 \right] &= P_{k+1}^{(k)} C^T \\ K_{k+1} &= P_{k+1}^{(k)} C^T \left[C P_{k+1}^{(k)} C^T + \sigma^2 \right]^{-1} \end{aligned}$$

Question 38 Montrer alors que :

$$P_{k+1} = (I_d - K_{k+1} \cdot C) \cdot P_{k+1}^{(k)}$$

En remarquant qu'à partir de l'équation précédente, on peut tirer :

$$K_{k+1} \left[C P_{k+1}^{(k)} C^T + \sigma^2 \right] = P_{k+1}^{(k)} C^T$$

On remplace dans l'expression de P_{k+1} :

$$\begin{aligned} P_{k+1} &= P_{k+1}^{(k)} - K_{k+1} C P_{k+1}^{(k)} - P_{k+1}^{(k)} C^T K_{k+1}^T + K_{k+1} \left(C P_{k+1}^{(k)} C^T + \sigma^2 \right) K_{k+1}^T \\ &= P_{k+1}^{(k)} - K_{k+1} C P_{k+1}^{(k)} - P_{k+1}^{(k)} C^T K_{k+1}^T + P_{k+1}^{(k)} C^T K_{k+1}^T \\ P_{k+1} &= (I_d - K_{k+1} \cdot C) \cdot P_{k+1}^{(k)} \end{aligned}$$

3.3 Implémentation

Question 39 On cherche à implanter l'algorithme de Kalman sur un microcontrôleur embarqué. Le problème de ce genre de carte est le peu de mémoire et de puissance de calcul. Faire une étude succincte de complexité à chaque pas de temps de l'algorithme de Kalman appliqué à l'estimation de l'état de charge de la batterie, et conclure sur la faisabilité d'implantation dans un microcontrôleur embarqué.

Pour l'algorithme de Kalman les calculs sont des produits de (petites 2×2 au maximum) matrices. Ce qui potentiellement augmente la complexité est l'inversion de matrice pour la mise à jour et la correction à

partir des mesures. Mais dans cette application, le terme $CP_{k+1}^{(k)}C^T + \sigma^2$ à inverser est un scalaire. L'algorithme de Kalman est donc facilement implantable dans un microcontrôleur.

Question 40 Écrire la fonction `Initialisation()` qui initialise toutes les variables du problème sous la forme de variables globales. On initialisera les variables : $X_0^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $P_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, et on s'impose :

$$\sigma = 0,01 \text{ et } Q = \begin{pmatrix} 0,03^2 & 0 \\ 0 & 0,03^3 \end{pmatrix}.$$

```
1 def Initialisation():
2     global X0, P0, sigma, Q
3
4     # Initialisation des variables
5     X0 = [1, 0] # X0 sous forme de liste
6     P0 = [[0, 0], [0, 0]] # P0 sous forme de liste de listes
7     sigma = 0.01 # sigma
8     Q = [[0.03**2, 0], [0, 0.03**3]] # Q sous forme de liste de listes
```

Question 41 Écrire la fonction `Prediction(X,P)` qui renvoie une estimation de $\hat{X}_{k+1}$ et P_{k+1} à partir de la phase de prédiction de l'algorithme.

```
1 def Prediction(X,P):
2     X[0]=X[0]+b0(dt)*ik
3     X[1]=a11(dt)*X[1]+b1(dt)*ik
4     P[0][0]=P[0][0]+Q[0][0]
5     P[0][1]=a11(dt)*P[0][1]
6     P[1][0]=a11(dt)*P[1][0]
7     P[1][1]=(a11(dt)**2)*P[1][1]+Q[1][1]
8     return(X,P)
```

Question 42 Écrire la fonction `MiseAJour(X,P)` qui renvoie une estimation de $\hat{X}_{k+1}$ et met à jour la valeur de la matrice de covariance de l'erreur P_{k+1} .

```
1 def MiseAJour(X,P):
2     K=[0 0]
3     K[0]=(a*P[0][0]-P[0][1])/(a**2*(P[0][0]-P[0][1]-a*P[1][0])+sigma**2)
4     K[1]=(a*P[1][0]-P[1][1])/(a**2*(P[0][0]-P[0][1]-a*P[1][0])+sigma**2)
5     #definition de l'erreur à partir des questions precedente
6     e=vk+R*ik-a*X[0]+X[1]-b #on ne précise pas si les paramètres comme R sont définis
7     #mise à jour de X
8     X[0]=X[0]+K[0]*e
9     X[1]=X[1]+K[1]*e
10    #mise à jour de la valeur de la matrice de covariance de l'erreur
11    P00=P[0][0]
12    P10=P[1][0]
13    P01=P[0][1]
14    P[0][0]=P[0][0]*(1+a*P[0][1]+a*P[1][0]-a**2*P[0][0])-P[0][1]*P[1][1]
15    P[0][1]=P[0][1]*(1-P[1][1]+a*P[0][1]-a**2*P00)+a*P00*P[1][1]
16    P[1][0]=P[1][0]*(1-P[1][1]+a*P[1][0]-a**2*P00)+a*P00*P[1][1]
17    P[1][1]=P[1][1]*(1+a*P01+a*P10-P[1][1])-P01*P10*a**2
```

18 `return(X,P)`

AMÉLIORATION DES PERFORMANCES DE VOL

4 Stabilisation du vol en lacet

Question 43 Déterminer la valeur numérique de la constante de temps du modèle caractéristique reliant C_{za} à C_z si on considère un modèle du premier ordre : $C_{za} = \frac{1}{1+T_z \cdot p} \cdot C_z$. Par lecture graphique on détermine le temps de réponse à 5%, qui correspond à $3 * T_z$. D'où $T_z \approx 35ms$

Question 44 Déterminer les expressions analytiques de la matrice $[A]$ et du vecteur colonne $[B]$ telles que la dynamique du système puisse s'écrire :

$$\begin{bmatrix} \dot{\omega}_z \\ \dot{C}_{za} \end{bmatrix} = [A] \cdot \begin{bmatrix} \omega_z \\ C_{za} \end{bmatrix} + [B] \cdot C_z$$

Vous donnerez ces expressions en fonction de D_z, I_z et T_z . L'équation des moments du principe fondamental de la dynamique nous donne : $I_z \frac{d\omega_z}{dt} = C_{za} - C_{frot}$ d'où

$$I_z \dot{\omega}_z = C_{za} - D_z \omega_z$$

En transposant le modèle reliant C_{za} à C_z dans le domaine temporel :

$$T_z \dot{C}_{za} + C_{za} = C_z$$

d'où

$$\begin{bmatrix} \dot{\omega}_z \\ \dot{C}_{za} \end{bmatrix} = [A] \cdot \begin{bmatrix} \omega_z \\ C_{za} \end{bmatrix} + [B] \cdot C_z$$

Avec $A = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{T_z} \\ 0 & -\frac{1}{T_z} \end{bmatrix}$ et $B = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{T_z} \end{bmatrix}$

Question 45 Déterminer l'expression analytique de la fonction de transfert $\frac{\Omega_z(p)}{C_z(p)}$. En utilisant les équations précédentes dans le domaine de Laplace :

$$\frac{\Omega_z(p)}{C_z(p)} = \frac{1}{(1 + T_z \cdot p)(1 + \frac{I_z}{D_z} p)} \frac{1}{D_z}$$

Question 46 Déterminer l'expression analytique de la valeur $\frac{\ln(\varphi_{z,i}^M)}{\ln(\varphi_{z,i+1}^M)}$ où $\varphi_{z,i}^M$ est la valeur d'un maximum de la courbe $\varphi_z(t)$, en fonction de D_z, I_z et K_z . Cette expression permet de calculer la valeur de D_z .

Une petite erreur dans l'énoncé sur la définition du décrétement logarithmique. Il est égal à $\frac{2\pi\epsilon}{\sqrt{1-\epsilon^2}}$ Avec

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{K_z}{I_z}}$$

et

$$\epsilon = \frac{D_z}{2\sqrt{K_z I_z}}$$

Question 47 Indiquer si la fonction de transfert caractéristique du vol de l'oiseau $\Omega_z(p)/C_z(p)$, autour de l'axe de lacet, est stable ou non. Justifier votre réponse.

La fonction est du second ordre avec des pôles à partie réelle négative donc la fonction est stable.

Question 48 Indiquer si le critère de précision en vitesse de lacet est satisfait ou non.

Le correcteur possède un intégrateur qui augmente la classe du système, l'erreur sera donc supprimée. Le critère de précision est satisfait.

Question 49 Déterminer la valeur de K_i pour satisfaire le critère de stabilité en vitesse de lacet.

La valeur de K_i a une influence uniquement sur le gain, la courbe de gain sera translatée de $20\log(K_i)$. On souhaite une marge de phase de 60° , or la phase vaut -120° pour une pulsation d'environ 10 rad/s. A cette pulsation le gain est égal à 78dB environ. Il faut diminuer le gain de 78dB donc $K_i = 10^{-3.9}\text{N.m.s}$.

5 Stabilisation du vol en tangage

Question 50 On suppose que la force de traînée induite par le mouvement d'une aile est proportionnelle au carré de sa vitesse absolue, quand elle bat dans l'air. Quand elle descend, elle est orientée selon $-\vec{x}_B$. Quand elle monte, elle est orientée selon $\vec{x}_B$. Montrer alors que la force de traînée F_D qui s'applique à l'oiseau, sur un cycle de battement d'aile rapide, peut-être approchée par l'expression $F_D = -K \cdot U$ (K est un coefficient de proportionnalité) quand une perturbation d'angle θ apparaît.

On suppose que la force traînée est proportionnelle au carré de sa vitesse absolue donc proportionnelle à $(w+u)^2$ pour une aile qui descend et à $(w-u)^2$ pour une aile qui monte. Sur un cycle de battement d'aile en sommant les forces, la force totale de traînée sera $-4 * A * w * u$ avec A coefficient de proportionnalité de la force de traînée. La force est bien proportionnelle à u .

Question 51 Expliquer l'origine physique de ce nouveau terme qui apparaît dans F_D

Comme représenté à la figure 14, la force F_d s'applique au centre de poussée et non au centre de gravité; d'où l'apparition d'une vitesse due à la rotation $\dot{\theta}$ égale à $z_d\dot{\theta}$

Question 52 Déterminer l'équation de résultante dynamique appliqué à l'oiseau, en projection sur $\vec{x}_B$, linéarisée à l'ordre 1.

L'équation de la résultante dynamique est :

$$m\dot{u} \cdot \vec{x}_B = F_d \cdot \vec{x}_b + mg \sin(\theta) \cdot \vec{x}_b + F_L \cdot \vec{z}_B + mg \cos(\theta) \cdot \vec{z}_b$$

En linéarisant à l'ordre 1 et en projection sur $\vec{x}_B$:

$$m \cdot \dot{u} = -Ku - Kz_d\dot{\theta} + mg\theta$$

Question 53 Démontrer que la fonction de transfert peut s'écrire sous la forme :

$$\frac{\theta(p)}{C_y(p)} = \frac{mp + K}{a_3p^3 + a_2p^2 + a_1p + a_0}$$

Exprimer les constantes a_0, a_1, a_2 et a_3 en fonction de m, I_z, K, M_u, M_g, z_d et g .

On a déterminé :

$$m.\dot{u} = -Ku - Kz_d\dot{\theta} + mg\theta$$

dans le domaine de Laplace

$$m.pU(p) = -KU(p) - Kz_d.\Theta(p) + mg\Theta(p)$$

L'équation du moment dynamique dans le domaine de Laplace :

$$I_z p^2 \Theta(p) = -M_u U(p) - M_{\theta} p \Theta(p) + C_y$$

d'où

$$\Theta(I_z p^2 + M_u \frac{-Kz_d p + mg}{mp + K} + M_{\theta} p) = C_y$$

on pose $a_3 = I_z m$, $a_2 = I_z K + M_{\theta} m$, $a_0 = M_u mg$ et $a_1 = M_{\theta} K - M_u K z_d$

Question 54 Indiquer si le vol peut-être stable, dans une certaine configuration de fabricatin de l'oiseau. Pour les deux cas, il existe au moins un pôle a partie réelle positive. Le vol est donc instable.

Question 55 Conclure sur la capacité de la commande de l'oiseau à vérifier le critère de précision en angle de tangage du cahier des charges.

Le vol est maintenant stable car les pôles sont à partie réelle négative. Le critère de précision de l'angle de tangage est d'avoir moins de 10° d'erreur de position angulaire, ce qui est le cas, cf. figure 16 droite.

CONCLUSION

Question 56 Rappeler les enjeux de cette recherche. Quelles études ont été menées afin de répondre partiellement aux différents défis soulevés par ce type de conception ? Les enjeux de cette recherche sont de fabriquer un drone miniature et léger en s'inspirant sur le vol du colibri et en se basant sur le biomimétisme. Les études qui ont été menées sont :

- Une étude de la transmission pour répondre au soucis d'échauffement prématuré du moteur.
- Une modélisation de la transmission et du moteur pour avoir un mouvement régulier.
- Une étude de la batterie, notamment de son autonomie qui est un critère primordial. L'idée était de connaître en temps réel l'état de charge de la batterie.
- Une étude de l'amélioration des performance de vol avec le choix d'un correcteur dans l'asservissement pour stabiliser le vol en assurant la précision en vitesse et position angulaire.