

Proposition de corrigé

Concours : e3a - Polytech

Année : 2014

Filière : MP

Épreuve : Sciences Industrielles pour l'Ingénieur

Ceci est une proposition de corrigé des concours de CPGE, réalisée bénévolement par des enseignants de Sciences Industrielles de l'Ingénieur et d'Informatique, membres de l'[UPSTI](http://www.upsti.fr) (Union des Professeurs de Sciences et Techniques Industrielles), et publiée sur le site de l'association :

<https://www.upsti.fr/espace-etudiants/annales-de-concours>

A l'attention des étudiants

Ce document vous apportera des éléments de corrections pour le sujet traité, mais n'est ni un corrigé officiel du concours, ni un corrigé détaillé ou exhaustif de l'épreuve en question.

L'UPSTI ne répondra pas directement aux questions que peuvent soulever ces corrigés : nous vous invitons à vous rapprocher de vos enseignants si vous souhaitez des compléments d'information, et à vous adresser à eux pour nous faire remonter vos éventuelles remarques.

Licence et Copyright

Toute représentation ou reproduction (même partielle) de ce document faite sans l'accord de l'UPSTI est **interdite**. Seuls le téléchargement et la copie privée à usage personnel sont autorisés (protection au titre des [droits d'auteur](#)).

En cas de doute, n'hésitez pas à nous contacter à : corrigesconcours@upsti.fr.

Informez-vous !

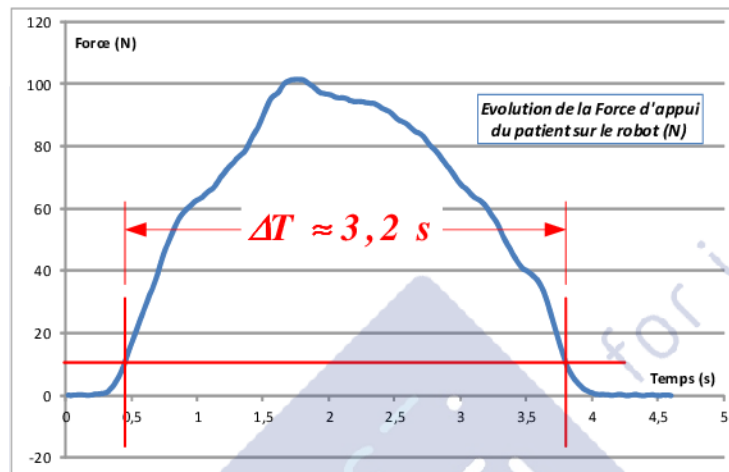
Retrouvez plus d'information sur les [Sciences de l'Ingénieur](#), l'[orientation](#), les [Grandes Ecoles](#) ainsi que sur les [Olympiades de Sciences de l'Ingénieur](#) et sur les [Sciences de l'Ingénieur au Féminin](#) sur notre site : www.upsti.fr

L'équipe UPSTI

Q1. Afin de choisir le capteur de force nécessaire à cette campagne de mesures, donner un ordre de grandeur de l'étendue de mesures nécessaires, ainsi qu'un ordre d'idée de la précision requise.

Pour réaliser ces essais, il n'est pas nécessaire d'avoir une grande précision. Ces mesures ont pour seul but d'avoir une idée de l'effort que peut exercer une personne âgée. L'effort maximum toléré sur le cahier des charges est de 100N. Un capteur avec une étendue de 150N et une précision de ± 5 N suffit par exemple.

Q2. A partir d'un enregistrement de l'effort de relèvement en fonction du temps (simulé lors d'une expérience), donné en annexe 2, déterminer graphiquement le temps de maintien d'un effort supérieur à 10N associé à cette courbe.



Le temps de maintien est d'environ 3,3 secondes

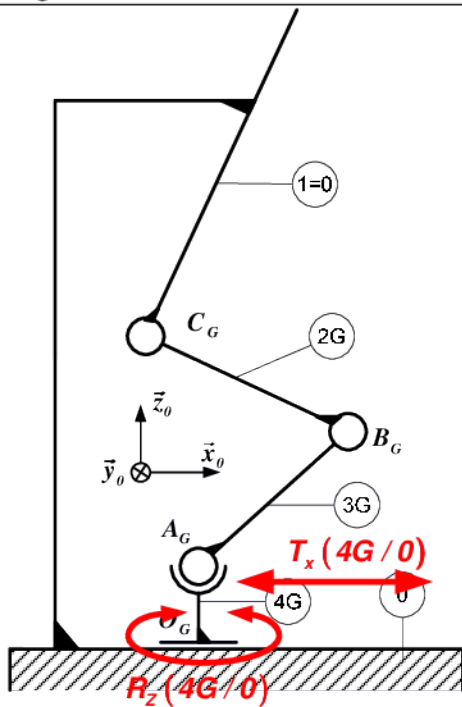
Remarque (pour donner du sens à la question) : Le cahier des charges précise qu'on peut attendre un temps de maintien jusqu'à 10 s. Le cahier des charges est donc cohérent au regard de cet enregistrement, avec une prise de sécurité importante.

Q3. Mettre en évidence sur la figure 11 reprise sur la copie, à l'aide de flèches, les deux mobilités de la chaîne fermée de solides (01-2G-3G-4G-01). (Dans cette question, on ne prendra en compte qu'une seule des deux chaînes fermées : voir figure 12)

Les deux mobilités sont la rotation propre de la liaison appui plan et la translation suivant $\vec{x}_0$

Les deux mobilités associées sont :

- Rotation $R(4_G/0)$ d'axe $(O_G, \vec{z}_0)$
- Translation $T(4_G/0)$ de direction $\vec{x}_0$, qui induit la rotation $R(3_G/4_G)$ d'axe $(A_G, \vec{y}_0)$ et la rotation $R(2_G/3_G)$ d'axe $(B_G, \vec{y}_0)$: Ces trois mouvements sont liés et ne compte donc que pour une seule mobilité.



Mise en évidence des deux mobilités

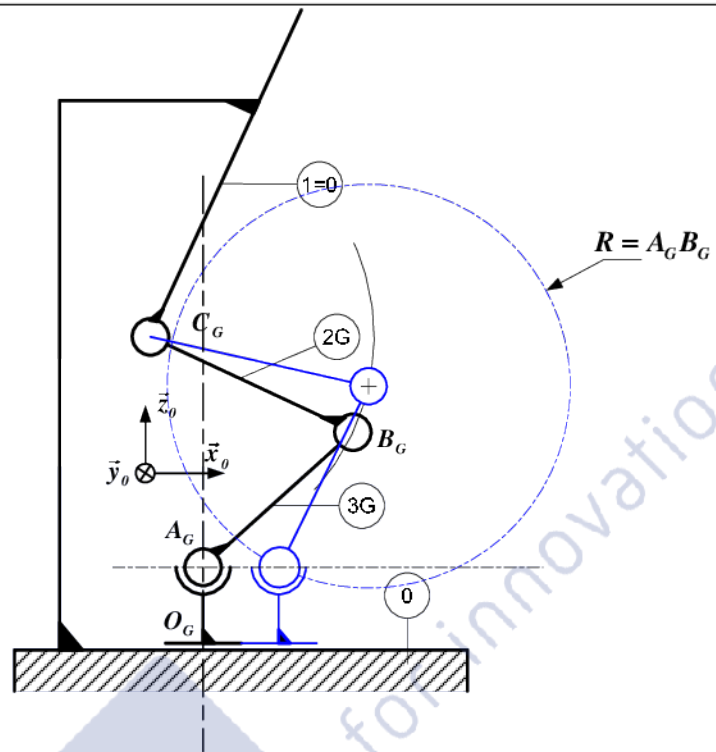


Illustration de la mobilité en translation $T(4G/0)$

Q4. En considérant les mobilités des deux chaînes fermées, vérifier que le modèle complet (chaînes de solides $(01-2G-3G-4G-01) + (01-2D-3D-4D-01)$) est isostatique

Soit N_s : le nombre d'inconnues statique

$$N_s = (3 + 3 + 5 + 5) \times 2 = 32$$

Soit E_s : le nombre d'équations issues de la statique :

$$E_s = 6 \times (7 - 1) = 36$$

Soit m le degré de mobilités :

$$m = 2 \times 2 = 4$$

Soit h le degré d'hyperstatisme :

$$h = N_s - E_s + m = 0$$

La modélisation du système complet est donc isostatique.

Q5. Ecrire les expressions de tous les torseurs des actions mécaniques extérieures appliquées au robot (E) ainsi modélisé et isolé.

$$\mathcal{T}\{\text{pes} \rightarrow E\} = \left\{ \begin{array}{c} -M \cdot g \cdot \vec{z}_0 \\ \vec{0} \end{array} \right\}_G$$

$$\mathcal{T}\{\text{hum} \rightarrow E\} = \left\{ \begin{array}{c} -F \cdot \vec{z}_0 \\ \vec{0} \end{array} \right\}_D$$

En supposant qu'il n'y a pas de frottement au niveau des contacts pieds/sol :

$$\mathcal{T}\{\text{solD} \rightarrow E\} = \left\{ \begin{array}{c} Z_{01} \cdot \vec{z}_0 \\ \vec{0} \end{array} \right\}_{O_D}$$

$$\mathcal{T}\{\text{solG} \rightarrow E\} = \left\{ \begin{array}{c} Z'_{01} \cdot \vec{z}_0 \\ \vec{0} \end{array} \right\}_{O_G}$$

Q6. Déterminer les expressions des composantes des deux torseurs des actions mécaniques du sol(0) sur chacun des pieds en fonction de F , M , g , d et e , lorsqu'ils sont exprimés respectivement aux points O_G et O_D .

En isolant E et en appliquant le principe fondamental de la statique au point O_D

L'équation de résultante suivant $\vec{z}_0$ nous donne :

$$-F - M \cdot g + Z_{01} + Z'_{01} = 0$$

L'équation du moment suivant $\vec{x}_0$:

$$-M \cdot g \cdot d - F \cdot (e + d) + Z'_{01} \cdot 2d = 0$$

Ainsi :

$$Z'_{01} = \frac{M \cdot g \cdot d + F \cdot (e + d)}{2d}$$

$$Z_{01} = F + M \cdot g - Z'_{01} = \frac{M \cdot g \cdot d + F \cdot (d - e)}{2d}$$

$$T\{solD \rightarrow E\} = \left\{ \begin{array}{c} F \left(\frac{d+e}{2 \cdot d} \right) + \frac{M \cdot g}{2} \cdot \vec{z}_0 \\ \vec{0} \end{array} \right\}_{O_G}$$

$$T\{solG \rightarrow E\} = \left\{ \begin{array}{c} F \left(\frac{d-e}{2 \cdot d} \right) + \frac{M \cdot g}{2} \cdot \vec{z}_0 \\ \vec{0} \end{array} \right\}_{O_D}$$

Q7. Ecrire les 2 inégalités qui découlent du respect de ce critère.

$$Z_{01} \geq 0 \quad Z'_{01} \geq 0$$

soit :

$$F \left(\frac{d+e}{2 \cdot d} \right) + \frac{M \cdot g}{2} \geq 0 \quad F \left(\frac{d-e}{2 \cdot d} \right) + \frac{M \cdot g}{2} \geq 0$$

Q8. Quel est l'effort maximum qui peut être exercé sur le robot au point D, tout en assurant la condition de non-basculement ? Conclure quant au respect du cahier des charges.

En exerçant l'effort au point D, le basculement ferait perdre le contact au point O_D , d'où $Z_{01} = 0$

$$0 = \frac{M \cdot g \cdot d + F \cdot (d - e)}{2d} \Rightarrow F = -\frac{M \cdot g \cdot d}{d - e}$$

L'application numérique nous donne :

$$F = 900\text{N} > 100\text{N}$$

Le cahier des charges stipule un effort maximum de 100N, la condition de non-basculement n'est donc pas limitante au vue de ce critère.

Q9. A l'aide d'une étude statique sagittal, donner l'expression littéral du couple C_{32} nécessaire au niveau du genou pour maintenir cette posture sous charge en fonction de l_3, θ_{43}, F , et $M_{12} \cdot g$.

On isole donc $E_{12} = \{1, 2\}$, cet ensemble est soumis à 4 action mécaniques extérieures :

- le poids représentable par un glisseur en G_{12} , $\vec{P}_{12} = -M_{12} \cdot g \cdot \vec{z}_0$,
- l'effort du patient représentable par un glisseur en D, $\vec{F} = -F \cdot \vec{z}_0$,
- le couple moteur C_{32} au niveau du genou,
- l'action de la liaison pivot d'axe $(B, \vec{y}_0)$ de 3 sur 2 modélisable par un glisseur au vue de l'hypothèse de problème plan $(O, \vec{x}_0, \vec{z}_0)$.

Afin de s'abstenir de calculer les inconnues de liaison de 3 sur 2, il suffit d'appliquer le théorème du moment suivant l'axe $(B, \vec{y}_0)$

$$-l_3 \cdot \sin \theta_{43} \cdot M_{12} \cdot g - l_3 \cdot \sin \theta_{43} \cdot F + C_{32} + 0 = 0$$

D'où :

$$C_{32} = l_3 \cdot \sin \theta_{43} \cdot (F + M_{12} \cdot g)$$

Résolution avec Torseur (c'est la même chose mais présentée différemment)

Bilan des efforts extérieurs qui s'appliquent sur l'ensemble isolé $E_{12} = \{1, 2\}$:

$$T\{\text{patient} \rightarrow 1\} = \left\{ \begin{array}{c} -F \cdot \vec{z}_0 \\ \vec{0} \end{array} \right\}_D$$

$$T\{\text{poids} \rightarrow E_{12}\} = \left\{ \begin{array}{c} -M_{12} \cdot g \cdot \vec{z}_0 \\ \vec{0} \end{array} \right\}_{G_{12}}$$

$$T\{\text{moteur} \rightarrow 2\} = \left\{ \begin{array}{c} \vec{0} \\ C_{32} \cdot \vec{y}_0 \end{array} \right\}_B$$

$$T\{1 \rightarrow 2\} = \left\{ \begin{array}{c} X_{12} \cdot \vec{x}_0 + Z_{12} \cdot \vec{z}_0 \\ 0 \cdot \vec{y}_0 \end{array} \right\}_B \quad (\text{Torseur des efforts transmissibles de la liaison pivot, exprimé dans le plan sagittal.})$$

Puisqu'on cherche à déterminer le couple C_{32} , on va utiliser le théorème du moment statique au point B :

$$\vec{M}(B, \text{patient} \rightarrow 1) = \vec{M}(D, \text{patient} \rightarrow 1) + \overrightarrow{BD} \wedge -F \cdot \vec{z}_0$$

$$\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OD} = -l_3 \cdot \vec{z}_3 + (Z_D - l_4) \cdot \vec{z}_0$$

$$\overrightarrow{BD} \wedge -F \cdot \vec{z}_0 = (-l_3 \cdot \vec{z}_3 + (Z_D - l_4) \cdot \vec{z}_0) \wedge -F \cdot \vec{z}_0 = -F(l_3 \cdot \sin \theta_{43}) \vec{y}_0$$

$$\vec{M}(B, \text{patient} \rightarrow 1) = F(l_3 \cdot \sin \theta_{43}) \vec{y}_0$$

$$\vec{M}(B, \text{poids} \rightarrow 1) = \vec{M}(G_{12}, \text{poids} \rightarrow 1) + \overrightarrow{BG_{12}} \wedge -M_{12} \cdot g \cdot \vec{z}_0$$

$$\overrightarrow{BG_{12}} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AG_{12}} = -l_3 \cdot \vec{z}_3 + z_G \cdot \vec{z}_0$$

$$\overrightarrow{BG_{12}} \wedge -F \cdot \vec{z}_0 = (-l_3 \cdot \vec{z}_3 + z_G \cdot \vec{z}_0) \wedge -M_{12} \cdot g \cdot \vec{z}_0 = -M_{12} \cdot g \cdot l_3 \cdot \sin \theta_{43} \cdot \vec{y}_0$$

$$\vec{M}(B, \text{poids} \rightarrow 1) = -M_{12} \cdot g \cdot l_3 \cdot \sin \theta_{43} \cdot \vec{y}_0$$

D'où l'équation de moment :

$$C_{32} - M_{12} \cdot g \cdot l_3 \cdot \sin \theta_{43} - F(l_3 \cdot \sin \theta_{43}) = 0$$

$$C_{32} = (M_{12} \cdot g + F) \cdot (l_3 \cdot \sin \theta_{43})$$

Q10. Application numérique : En prenant compte le rapport de réduction du motoréducteur, calculer le couple délivré par le moteur et comparer le au couple de calage (stall torque en anglais dans la documentation), indiqué dans la documentation. Conclure quant à la capacité du robot à rester en position de genuflexion, face au patient qui est en appui sur son épaule.

Ne connaissant pas le rendement du réducteur, il est convenable de faire l'hypothèse qu'il est égal à 1
Ainsi :

$$C_{32} \cdot \omega_{32} = C_m \cdot \omega_m \Rightarrow C_m = \frac{C_{32}}{r_{32}} = 0,88 \text{ Nm} < 2,5 \text{ Nm}$$

Le moteur est donc en mesure de rester en position de genuflexion pendant que le patient est en appui sur l'épaule du robot.

Il faudra cependant prendre garde que cette position ne perdure pas trop dans le temps au risque d'un échauffement exagéré des bobinages du moteur.

Q11. Que représentent les variables $d(t)$ ($D(p)$ dans le domaine de Laplace), $e(t)$ ($E(p)$ dans le domaine de Laplace), $f(t)$ ($F(p)$ dans le domaine de Laplace), $g(t)$ ($G(p)$ dans le domaine de Laplace) qui apparaissent dans le schéma-bloc de la figure 16 ? Quelles en sont leurs unités (système international) ?

$d(t)$: tension moteur en V

$e(t)$: courant moteur en A

$f(t)$: couple moteur en N.m

$g(t)$: vitesse moteur en $\text{rad} \cdot \text{s}^{-1}$

Q12. A partir du schéma-bloc, exprimer :

- $\theta_{32}(p)$ la variation angulaire de sortie, en fonction du couple résistant $C_r(p)$ et de la variable intermédiaire $F(p) \Rightarrow$ équation notée (1)
- $F(p)$ en fonction de $D(p)$ et de $\theta_{32}(p) \Rightarrow$ équation notée (2)
- $D(p)$ en fonction de $B(p)$ et de $F(p) \Rightarrow$ équation notée (3)

$$\theta_{32}(p) = \frac{1}{r_{32} \cdot J \cdot p} \cdot (F(p) - C_r(p)) \quad (1)$$

$$F(p) = \frac{K_m}{R} \cdot (D(p) - K_m \cdot G(p)) = \frac{K_m}{R} \cdot (D(p) - K_m \cdot r_{32} \cdot p \cdot \theta_{32}(p)) \quad (2)$$

$$D(p) = K_3 \cdot (B(p) - E(p)) = K_3 \cdot \left(B(p) - \frac{F(p)}{K_m} \right) \quad (3)$$

Q13. De même, exprimer :

- $B(p)$ en fonction de $A(p)$ et de $\theta_{32}(p) \Rightarrow$ équation notée (4)
- $A(p)$ en fonction de $\theta_{32c}(p)$ et de $\theta_{32}(p) \Rightarrow$ équation notée (5)

$$B(p) = K_2 \cdot (A(p) - G(p)) = K_2 \cdot (A(p) - r_{32} \cdot p \cdot \theta_{32}(p)) \quad (4)$$

$$A(p) = K_1 \cdot (\theta_{32c}(p) - \theta_{32}(p)) \quad (5)$$

Q14. Que représente la grandeur $\theta_{32p}(t)$ ($\theta_{32p}(p)$ dans le domaine de Laplace) ? Réécrire l'équation (5) dans le cas de l'étude proposée : seule l'influence de l'action du patient sur le robot est recherchée.

$\theta_{32p}(t)$ représente la variation de position angulaire réelle du genou sous l'action uniquement de la perturbation, relativement à une position initiale de référence θ_{32-0}

$$A(p) = -K_1 \cdot \theta_{32p}(p) \quad (5)$$

Q15. A partir des équations (4) et (5), déterminer l'expression de $B(p)$ en fonction de $\theta_{32p}(p) \Rightarrow$ équation notée (6)

$$B(p) = K_2 \cdot (-K_1 \cdot \theta_{32p}(p) - r_{32} \cdot p \cdot \theta_{32p}(p)) = (-K_1 \cdot K_2 - r_{32} \cdot K_2 \cdot p) \cdot \theta_{32p}(p) \quad (6)$$

Q16. A partir des équations (6) et (3), déterminer l'expression de $D(p)$ en fonction de $F(p)$ et $\theta_{32p}(p) \Rightarrow$ équation notée (7)

$$D(p) = K_3 \cdot \left((-K_1 \cdot K_2 - r_{32} \cdot K_2 \cdot p) \cdot \theta_{32p}(p) - \frac{F(p)}{K_m} \right)$$

$$D(p) = (-K_1 \cdot K_2 \cdot K_3 - r_{32} \cdot K_2 \cdot K_3 \cdot p) \cdot \theta_{32p}(p) - \frac{K_3}{K_m} \cdot F(p) \quad (7)$$

Q17. A partir des équations (7) et (2), déterminer l'expression de $F(p)$ en fonction de $F(p)$ et $\theta_{32p}(p) \Rightarrow$ équation notée (8)

$$F(p) = \frac{K_m}{R} \cdot [(-K_1 \cdot K_2 \cdot K_3 - r_{32} \cdot K_2 \cdot K_3 \cdot p) \cdot \theta_{32p}(p) - \frac{K_3}{K_m} \cdot F(p) - K_m \cdot r_{32} \cdot p \cdot \theta_{32}(p)]$$

$$F(p) \cdot \left(1 + \frac{K_3}{R} \right) = \frac{1}{R} \cdot [-K_1 \cdot K_2 \cdot K_3 \cdot K_m - r_{32} \cdot K_m \cdot (K_2 \cdot K_3 + K_m) \cdot p] \cdot \theta_{32p}(p)$$

$$F(p) = \frac{1}{K_3 + R} \cdot [-K_1 \cdot K_2 \cdot K_3 \cdot K_m - r_{32} \cdot K_m \cdot (K_2 \cdot K_3 + K_m) \cdot p] \cdot \theta_{32p}(p) \quad (8)$$

Q18. Finalement, montrer que l'expression de $\theta_{32p}(p)$ en fonction de $C_r(p)$ peut s'écrire sous la forme :

$$\theta_{32p}(p) = \frac{\alpha}{1 + \beta \cdot p + \gamma \cdot p^2} \cdot C_r(p)$$

Préciser les expressions de α , β et γ , en fonction des diverses constantes.

$$\theta_{32p}(p) = \frac{1}{r_{32} \cdot J \cdot p^2} \cdot (F(p) - C_r(p))$$

En remplaçant l'expression de $F(p)$ trouvée en Q17 :

$$\theta_{32p}(p) = \frac{\left(-\frac{K_3 + R}{K_1 \cdot K_2 \cdot K_3 \cdot K_m}\right)}{1 + \frac{r_{32} \cdot (K_2 \cdot K_3 + K_m)}{K_1 \cdot K_2 \cdot K_3} \cdot p + \frac{r_{32} \cdot J \cdot (K_3 + R)}{K_1 \cdot K_2 \cdot K_3 \cdot K_m} \cdot p^2}$$

$$\alpha = \left(-\frac{K_3 + R}{K_1 \cdot K_2 \cdot K_3 \cdot K_m}\right)$$

$$\beta = \frac{r_{32} \cdot (K_2 \cdot K_3 + K_m)}{K_1 \cdot K_2 \cdot K_3}$$

$$\gamma = \frac{r_{32} \cdot J \cdot (K_3 + R)}{K_1 \cdot K_2 \cdot K_3 \cdot K_m}$$

Q19. Calculer la valeur numérique du gain α de la fonction de transfert $\frac{\theta_{32p}(p)}{C_r(p)}$ en précisant les unités.

$$\alpha = -1,69 \cdot 10^{-3} \text{ rad/Nm}$$

Q20. Calculer la valeur numérique du coefficient d'amortissement de cette fonction de transfert. Commenter ce résultat en s'appuyant sur les exigences du cahier des charges.

$$\frac{1}{\omega_0^2} = 2,25 \cdot 10^{-6}$$

$$\frac{2 \cdot z}{\omega_0} = 0,960$$

Ainsi :

$$z = \frac{1}{2} \cdot 0,960 \cdot \sqrt{\frac{1}{2,25 \cdot 10^{-6}}} = 320$$

Le système est donc très amorti vis-à-vis d'une sollicitation en effort d'un patient. Il n'y aura pas de dépassement, c'est donc conforme au cahier des charges qui demandait un dépassement inférieur de 5%.

Q21. Calculer la variation angulaire au niveau du genou $\delta\theta_{32}$ induite par cette perturbation. On donnera le résultat en degré.

$$\delta\theta_{32} = \alpha \cdot C_{r0} \text{ avec } C_{r0} = -1 \text{ Nm}$$

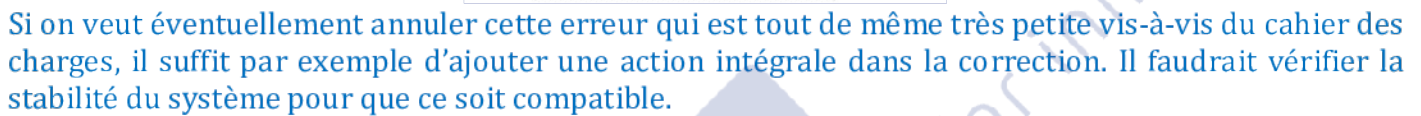
$$\delta\theta_{32} = 1,7 \cdot 10^{-3} \text{ rad} = 0,1^\circ$$

Q22. Est-ce que l'influence de cette perturbation est compatible avec les exigences du cahier des charges ? Quelles sont les éventuelles solutions pour limiter l'influence de cette perturbation ?

Si on considère toutes les autres articulations bloquées, le point B reste immobile et l'inclinaison de la cuisse par rapport à la verticale augmente très légèrement de $0,1^\circ$.

Ainsi :

$$\delta Z_C = l_2 \cdot (\cos 63 - \cos 63,1) = -0,48 \text{ mm} < 5 \text{ mm}$$


$$\ddot{\theta}_m(t) = -\frac{8 \cdot \omega_0}{t_1^2} \cdot \left(t - \frac{t_1}{2}\right)$$

$$\ddot{\theta}_{MAX} = \frac{8 \cdot |\omega_0|}{t_1^2} \cdot \frac{t_1}{2} = \frac{4 \cdot |\omega_0|}{t_1}$$
$$\begin{aligned}\theta_m &= -\frac{4 \cdot \omega_0}{3 \cdot t_1^2} \cdot \left(t - \frac{t_1}{2}\right)^3 + \omega_0 \cdot t + c \\ \theta_m(t=0) &= 0 = \frac{4 \cdot \omega_0}{3 \cdot t_1^2} \cdot \frac{t_1^3}{8} + c \\ c &= -\frac{\omega_0 \cdot t_1}{6} \\ \Delta\theta_m &= -\frac{4 \cdot \omega_0}{3 \cdot t_1^2} \cdot \left(t_1 - \frac{t_1}{2}\right)^3 + \omega_0 \cdot t_1 - \frac{\omega_0 \cdot t_1}{6} = \frac{2 \cdot \omega_0 \cdot t_1}{3}\end{aligned}$$
$$r_{32} = \frac{\theta_m}{\theta_{32}} = \frac{\Delta\theta_m}{\Delta\theta_{32}}$$
$$\omega_0 = \frac{3}{2} \cdot \frac{r_{32}}{t_1} \cdot \Delta\theta_{32}$$


$$\Omega_0 = 10 \text{ rad.s}^{-1} = 95 \text{ tr/min} < 7000 \text{ tr/min}$$

Q27. Calculer l'accélération angulaire maximale $|\ddot{\theta}_{32\text{Maxi}}|$ de l'articulation du genou.

L'accélération angulaire maximale du moteur est

$$\ddot{\theta}_{\text{Max}} = \frac{4 \cdot |\omega_0|}{t_1} = \frac{4 \times 10}{10} = 4 \text{ rad.s}^{-2}$$

Et au niveau de l'articulation

$$\ddot{\theta}_{32\text{Maxi}} = 4/95,91 = 0,042 \text{ rad.s}^{-2}$$

Q28. Ecrire l'expression de l'énergie cinétique galiléenne du sous-ensemble E en fonction de M_1 et de $\dot{Z}_D(t)$ (On rappelle que la masse de (1) est le seul paramètre d'inertie influant dans cette étude.

Au vue des hypothèses, on a directement :

$$T(E/0) = \frac{1}{2} \cdot M_1 \cdot \dot{Z}_G(t)^2 = \frac{1}{2} \cdot M_1 \cdot \dot{Z}_D(t)^2$$

Q29. Ecrire l'expression des puissances extérieures au système isolé.

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(\text{patient} \rightarrow 1/0) &= -F \cdot \dot{Z}_D \\ \mathcal{P}(\text{pes} \rightarrow 1/0) &= -M_1 \cdot g \cdot \dot{Z}_G = -M_1 \cdot g \cdot \dot{Z}_D \\ \mathcal{P}(0 \rightarrow 4/0) &= M_{04} \cdot \dot{\theta}_{40} = 0 \text{ car } \theta_{40} = \text{cte} \end{aligned}$$

Q30. Ecrire l'expression des puissances intérieures au système isolé.

Les efforts intérieurs à prendre en compte sont les couples moteurs.

Les autres efforts sont des efforts de liaisons réputées parfaites, et ne travaillent donc pas. Il n'y a pas d'accumulateur d'énergie (ressort).... : En conséquence, aucun autre effort intérieur n'est susceptible de produire ou consommer de la puissance.

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(1 \leftrightarrow 2) &= C_{12} \cdot \dot{\theta}_{21} \\ \mathcal{P}(2 \leftrightarrow 3) &= C_{23} \cdot \dot{\theta}_{32} = -C_{32} \cdot \dot{\theta}_{32} \\ \mathcal{P}(3 \leftrightarrow 4) &= C_{34} \cdot \dot{\theta}_{43} \end{aligned}$$

Q31. Ecrire l'expression issue du théorème de l'énergie cinétique, appliqué à l'ensemble E.

$$M_1 \cdot \dot{Z}_D \cdot \ddot{Z}_D = -F \cdot \dot{Z}_D - M_1 \cdot \dot{Z}_D + C_{12} \cdot \dot{\theta}_{21} - C_{32} \cdot \dot{\theta}_{32} + C_{34} \cdot \dot{\theta}_{43}$$

Q32. Par application du théorème du moment dynamique appliqué au point C, donner l'expression de C_{21} en fonction de M_1 , l_1 , $\ddot{Z}_D$ et θ_{10} . (voir remarque ci-après).

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\sigma(C, 1/0)} &= \overrightarrow{\sigma(G, 1/0)} + M_1 \cdot \overrightarrow{CG} \wedge \overrightarrow{V(G, 1/0)} = M_1 \cdot \overrightarrow{CG} \wedge \overrightarrow{V(G, 1/0)} \text{ car } \overrightarrow{\Omega(1/0)} = \vec{0} \\ \overrightarrow{\sigma(C, 1/0)} &= M_1 \cdot (l_1 \cdot \vec{z}_1 + \overrightarrow{DG_1}) \wedge \dot{Z}_D \cdot \vec{z}_0 = -M_1 \cdot l_1 \cdot \dot{Z}_D \cdot \sin \theta_{10} \cdot \vec{y}_0 \\ \overrightarrow{\delta(C, 1/0)} &= \frac{d(\overrightarrow{\sigma(C, 1/0)})}{dt} + M_1 \cdot \overrightarrow{V(C/0)} \wedge \overrightarrow{V(G, 1/0)} \\ M_1 \cdot \overrightarrow{V(C/0)} \wedge \overrightarrow{V(G, 1/0)} &= \vec{0} \end{aligned}$$

D'où :

$$\overrightarrow{\delta(C, 1/0)} = \frac{d(\overrightarrow{\sigma(C, 1/0)})}{dt} = -M_1 \cdot l_1 \cdot \ddot{Z}_D \cdot \sin \theta_{10} \cdot \vec{y}_0 \text{ car } \dot{\theta}_{10} = \text{cte}$$

En appliquant le théorème du moment dynamique en C suivant $\vec{y}_0$:

$$\overrightarrow{\delta(C, 1/0)} \cdot \vec{y}_0 = \overrightarrow{\mathcal{M}(C, \text{patient} \rightarrow 1)} \cdot \vec{y}_0 + \overrightarrow{\mathcal{M}(C, \text{pes} \rightarrow 1)} \cdot \vec{y}_0 + \overrightarrow{\mathcal{M}(C, 2 \rightarrow 1)} \cdot \vec{y}_0$$

Ainsi :

$$-M_1 \cdot l_1 \cdot \ddot{Z}_D \cdot \sin \theta_{10} = (F + M_1 \cdot g) \cdot l_1 \cdot \sin \theta_{10} + C_{21}$$

D'où :

$$C_{21} = -M_1 \cdot l_1 \cdot \ddot{Z}_D \cdot \sin \theta_{10} - (F + M_1 \cdot g) \cdot l_1 \cdot \sin \theta_{10}$$

Q33. En utilisant les lois linéarisées des lois de vitesse, et leur dérivée par rapport au temps, en utilisant l'expression (*) donnée page précédente, déduire l'expression du couple C_{32} en fonction de M_1 , F , l_1 , θ_{10} et $\ddot{\theta}_{32}$. On mettra cette relation sous la forme $C_{32} = A \cdot \ddot{\theta}_{32} + B$ et on identifiera A et B .

$$M_1 \cdot \dot{Z}_D \cdot \ddot{Z}_D = -(M_1 \cdot g + F) \cdot \dot{Z}_D + l_1 \cdot \sin \theta_{10} \cdot (F + M_1 \cdot g + \ddot{Z}_D) \cdot \dot{\theta}_{21} - C_{32} \cdot \dot{\theta}_{32}$$

En simplifiant par $\dot{Z}_D$:

$$M_1 \cdot \ddot{Z}_D = -(M_1 \cdot g + F) + l_1 \cdot \sin \theta_{10} \cdot (F + M_1 \cdot g + M_1 \cdot \ddot{Z}_D) \cdot 2,5 + C_{32} \cdot 5$$

Enfin :

$$\ddot{Z}_D = -\frac{\ddot{\theta}_{32}}{5}$$

D'où :

$$M_1 \cdot \left(-\frac{\ddot{\theta}_{32}}{5}\right) = -(M_1 \cdot g + F) + l_1 \cdot \sin \theta_{10} \cdot \left(F + M_1 \cdot g - M_1 \cdot \frac{\ddot{\theta}_{32}}{5}\right) \cdot 2,5 + C_{32} \cdot 5$$

$$C_{32} = \frac{1}{5} \cdot (F + M_1 \cdot g) \cdot (1 - 2,5 \cdot l_1 \cdot \sin \theta_{10}) + \frac{1}{5} \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot l_1 \cdot \sin \theta_{10} - \frac{M_1}{5}\right) \cdot \ddot{\theta}_{32}$$

D'où :

$$A = \frac{1}{5} \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot l_1 \cdot \sin \theta_{10} \cdot M_1 - \frac{M_1}{5}\right) \text{ et } B = \frac{1}{5} \cdot (F + M_1 \cdot g) \cdot (1 - 2,5 \cdot l_1 \cdot \sin \theta_{10})$$

Q34. Vérifier que le moteur est suffisamment dimensionné du point de vue du couple de démarrage.

$$C_{32} = 55 \text{ Nm}$$

D'où, si on suppose un rendement de 1 :

$$C_m = \frac{C_{32}}{r_{32}} = 0,57 \text{ Nm} < 2500 \text{ mNm}$$

Le couple de démarrage est 2500 mN.m ce qui est largement suffisant pour le scénario envisagé. On remarque que les effets dynamiques sont négligeables par rapport aux efforts.