

Proposition de corrigé

Concours : Banque PT

Année : 2023

Filière : PT

Épreuve : Sciences Industrielles A

Ceci est une proposition de corrigé des concours de CPGE, réalisée bénévolement par des enseignants de Sciences Industrielles de l'Ingénieur et d'Informatique, membres de l'[UPSTI](https://www.upsti.fr) (Union des Professeurs de Sciences et Techniques Industrielles), et publiée sur le site de l'association :

<https://www.upsti.fr/espace-etudiants/annales-de-concours>

A l'attention des étudiants

Ce document vous apportera des éléments de corrections pour le sujet traité, mais n'est ni un corrigé officiel du concours, ni un corrigé détaillé ou exhaustif de l'épreuve en question.

L'UPSTI ne répondra pas directement aux questions que peuvent soulever ces corrigés : nous vous invitons à vous rapprocher de vos enseignants si vous souhaitez des compléments d'information, et à vous adresser à eux pour nous faire remonter vos éventuelles remarques.

Licence et Copyright

Toute représentation ou reproduction (même partielle) de ce document faite sans l'accord de l'UPSTI est **interdite**. Seuls le téléchargement et la copie privée à usage personnel sont autorisés (protection au titre des [droits d'auteur](#)).

En cas de doute, n'hésitez pas à nous contacter à : corrigesconcours@upsti.fr.

Informez-vous !

Retrouvez plus d'information sur les [Sciences de l'Ingénieur](#), l'[orientation](#), les [Grandes Ecoles](#) ainsi que sur les [Olympiades de Sciences de l'Ingénieur](#) et sur les [Sciences de l'Ingénieur au Féminin](#) sur notre site : www.upsti.fr

L'équipe UPSTI

Concept Machine 4.0 : Axelle

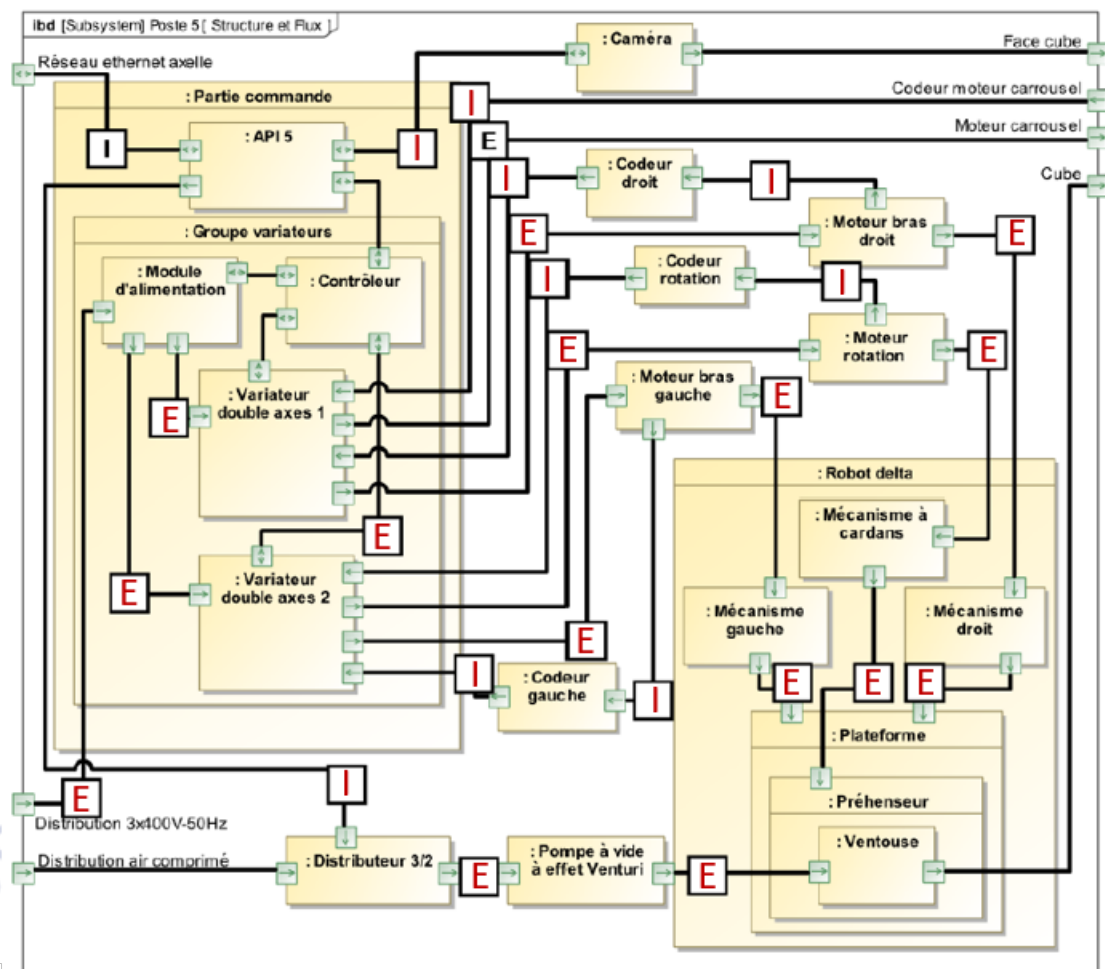
Corrigé UPSTI

ANALYSE DU FONCTIONNEMENT DU ROBOT DELTA

Objectif

Analyser le fonctionnement du Robot Delta lors d'opérations de pick & place.

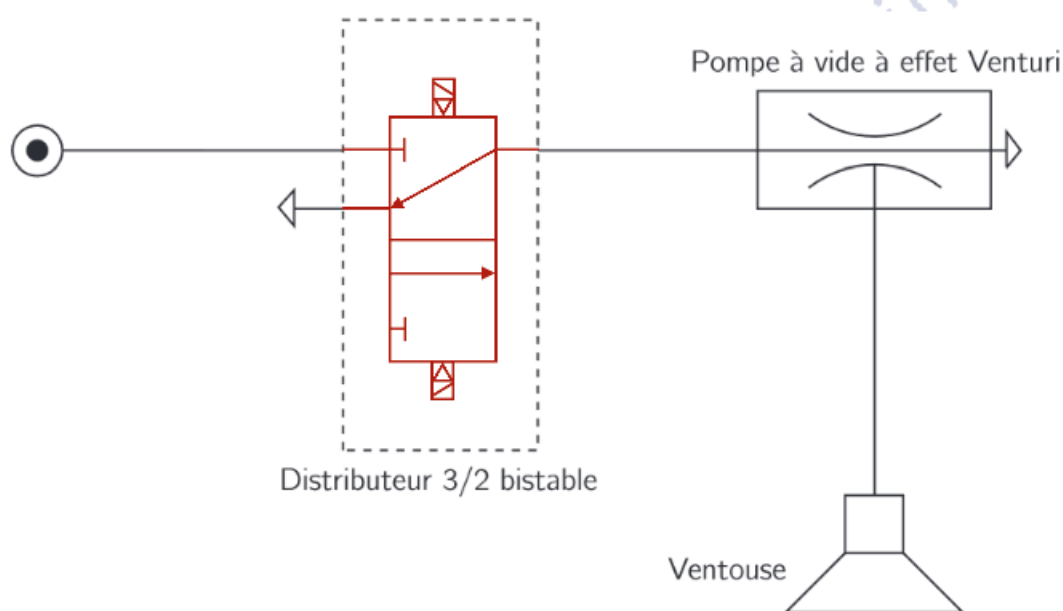
Question 1 Repérer sur le diagramme de blocs internes (**ibd**) les flux d'énergie avec la lettre **E** et les flux d'informations avec la lettre **I**.



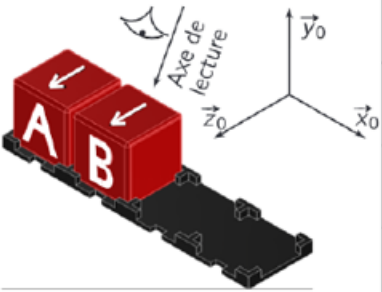
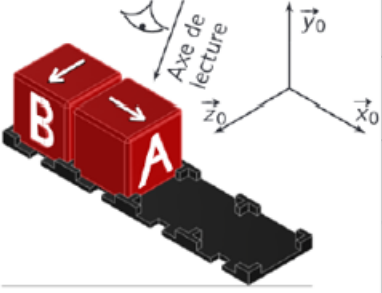
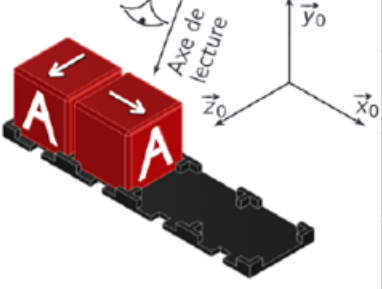
Question 2 Donner, en termes de chaînes fonctionnelles, le nom générique et la fonction des éléments listés dans le cahier réponses.

Élément	Nom générique	Fonction générique
API 5	Unité de traitement	Traiter
Variateur doubles axes 1	Pré-actionneur	Moduler
Ventouse	Effecteur	Agir
Moteur bras gauche	Actionneur	Convertir
Codeur gauche	Capteur	Acquérir
Pompe à vide à effet Venturi	Actionneur	Convertir
Distributeur 3/2	Pré-actionneur	Moduler

Question 3 Compléter le schéma pneumatique du document réponse, lié au préhenseur à ventouse.



Question 4 Après avoir consulté l'**Annexe C.1** et avec l'aide du diagramme d'états (**stm**) du cycle aller **Figure 23**, repérer dans le tableau du cahier réponse la position (emplacement 1, 2, 3 et/ou 4) et l'orientation de chaque cube en fin de cycle, **sans** apparition d'arrêt d'urgence, pour chacun des cas où la colonne de gauche donne la condition de départ.

Condition de départ	Emplacement	Cube			Orientation			
	1	∅	A	B	↙	↘	↖	↗
	2	∅	A	B	↙	↘	↖	↗
	3	∅	A	B	↙	↘	↖	↗
	4	∅	A	B	↙	↘	↖	↗
	1	∅	A	B	↙	↘	↖	↗
	2	∅	A	B	↙	↘	↖	↗
	3	∅	A	B	↙	↘	↖	↗
	4	∅	A	B	↙	↘	↖	↗
	1	∅	A	B	↙	↘	↖	↗
	2	∅	A	B	↙	↘	↖	↗
	3	∅	A	B	↙	↘	↖	↗
	4	∅	A	B	↙	↘	↖	↗

ÉTUDE DE L'ARCHITECTURE MÉCANIQUE DU ROBOT DELTA

1 Étude mécanique de la structure 3D

1.2 Analyse d'une première partie du mécanisme

- Objectif -

Appréhender le mécanisme dans une version simplifiée.

Question 5 Donner le nombre de degrés de liberté entre le plateau 5 et le bâti 0 (**Figure 5**). Sans calcul, donner le nom de la liaison équivalente entre le plateau 5 et le bâti 0. Cela correspond-il à la cinématique globale recherchée pour le plateau 5 ?

Le plateau possède 3 degrés de liberté :

- translation suivant $\vec{x}_0$
- translation suivant $\vec{y}_0$
- rotation suivant $\vec{z}_0$

La liaison équivalente est donc une liaison appui plan de normale $\vec{z}_0$. Le modèle ne correspond à la dynamique recherchée. Il est nécessaire de bloquer le degré de liberté en rotation suivant $\vec{z}_0$.

Question 6 Déterminer le degré d'hyperstatisme de la structure du mécanisme partiel (**Figure 5**).

$$N_L = 6$$

$$N_P = 6$$

Les mobilités utiles m_u correspondent aux degrés de liberté identifiés en Q5 : $m_u = 3$

Il n'y a pas de mobilité interne : $m_i = 0$

$$E_c = 6(N_L - N_P + 1) = 6$$

$$I_c = 6 \quad (6 \text{ pivots})$$

$$h = E_c + m - I_c = 3$$

Le système est hyperstatique d'ordre 3.

1.3 Analyse de la structure complète

- Objectif -

Analyser le mécanisme global. Réduire le nombre de contraintes de montage.

Question 7 Sans calcul, donner le nombre de degrés de liberté entre le plateau 5 et le bâti 0. Caractériser le mouvement du plateau 5 par rapport au bâti 0.

Le plateau ne possède plus que 2 degrés de liberté :

- translation suivant $\vec{x}_0$
- translation suivant $\vec{y}_0$

La rotation suivant $\vec{z}_0$ est bloquée grâce au système de parallélogramme déformable. Le mouvement du plateau 5 par rapport au bâti 0 est une translation circulaire dans le plan ($\vec{x}_0, \vec{y}_0$)

Question 8 Déterminer le degré d'hyperstatisme de cette nouvelle structure.

$$N_L = 15$$

$$N_P = 11$$

Les mobilités utiles m_u correspondent aux degrés de liberté identifiés en Q5 : $m_u = 2$

Les mobilités internes correspondent aux rotations propres de 6 et 8 : $m_i = 2$

$$m = m_u + m_i = 4$$

$$E_c = 6(N_L - N_P + 1) = 30$$

$$I_c = 11 + 4 \times 3 = 12 \quad (4 \text{ sphériques et } 11 \text{ pivots})$$

$$h = E_c + m - I_c = 11$$

Le système est hyperstatique d'ordre 11.

Question 9 Proposer un jeu de liaisons entre les solides 2, 4a, 4b et 5 permettant de réduire le degré d'hyperstatisme tout en conservant la même cinématique globale (mêmes degrés de mobilités utiles et internes). Indiquer la réduction du degré d'hyperstatisme.

Liaisons	$L_{2/4a}$	$L_{2/4b}$	$L_{5/4a}$	$L_{5/4b}$	Δ_h
Solution initiale	Pivot	Pivot	Pivot	Pivot	- 0
Proposition	Pivot	Sphérique	Sphérique	Pivot	- 4

Autre proposition :

Liaisons	$L_{2/4a}$	$L_{2/4b}$	$L_{5/4a}$	$L_{5/4b}$	Δ_h
Solution initiale	Pivot	Pivot	Pivot	Pivot	- 0
Proposition	Sphérique à doigt	Sphérique à doigt	Sphérique à doigt	Sphérique à doigt	- 4

2 Étude cinématique plane de la structure 2D

2.2 Coordonnées articulaires et coordonnées cartésiennes

- Objectif -

Obtenir le modèle inverse - coordonnées articulaires en fonction des coordonnées cartésiennes.

Question 10 À partir de la **Figure 16**, donner les expressions de $x(t)$ et $y(t)$ en fonction de $\theta_{10}(t)$, $\theta_{30}(t)$ et de paramètres géométriques constants.

Fermeture géométrique :

$$\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{A_1B_1} + \overrightarrow{B_1C_1} + \overrightarrow{C_1D}$$

En projetant sur $\vec{x}_0$ et $\vec{y}_0$ cette dernière relation vectorielle, il vient :

$$\begin{cases} x(t) = a - d + b \cos \theta_{10} + c \cos \theta_{30} \\ y(t) = b \sin \theta_{10} + c \sin \theta_{30} \end{cases}$$

Question 11 À partir des expressions de $x(t)$ et $y(t)$ obtenues à la **Q10**, déterminer l'expression de θ_{ref} en fonction de a , b , c et d puis l'expression de h_0 en fonction de a , b , c et d .

$$\begin{cases} x(t) = a - d + b \cos \theta_{10} + c \cos \theta_{30} \\ y(t) = b \sin \theta_{10} + c \sin \theta_{30} \end{cases}$$

$$\theta_{10} = \theta_{30} = \theta_{ref}, x = 0 \text{ et } y = -h_0$$

En prenant en compte ces dernières valeurs, le système devient :

$$\begin{cases} d - a = (b + c) \cos \theta_{ref} \\ h_0 = -(b + c) \sin \theta_{ref} \end{cases}$$

On en déduit : $\tan \theta_{ref} = \frac{h_0}{a - d} \Rightarrow \theta_{ref} = \arctan\left(\frac{h_0}{a - d}\right)$

En élevant au carré et en sommant les expressions de $d - a$ et h_0 , on obtient :

$$h_0 = \sqrt{(b + c)^2 - (a - d)^2}$$

A.N : $h_0 = 657.3 \text{ mm} \quad \theta_{ref} = 84.8^\circ$

Question 12 À partir des expressions de $x(t)$ et $y(t)$ obtenues à la **Q10**, déterminer une relation liant uniquement $x(t)$, $y(t)$, $\theta_{10}(t)$ et des paramètres géométriques constants.

$$\begin{cases} c \cos \theta_{30} = x(t) + d - a - b \cos \theta_{10} \\ c \sin \theta_{30} = y(t) - b \sin \theta_{10} \end{cases}$$

En élevant au carré et en sommant les deux expressions précédentes, on obtient :

$$c^2 = [x(t) + d - a - b \cos \theta_{10}]^2 + [y(t) - b \sin \theta_{10}]^2$$

Question 13 Déterminer les expressions de x_k et y_k en fonction de k , n , r_p , h_0 , e et Δ_y , dans le mouvement du point D de D_i à D_f avec $0 \leq k \leq 3n$.

- $0 \leq k \leq n$:

$$x_k = -r_p$$

$$y_k = -h_0 + e + k \frac{\Delta_y}{n}$$

- $n \leq k \leq 2n$:

$$x_k = -r_p \cos\left[(k - n) \frac{\pi}{n}\right]$$

$$y_k = -h_0 + e + \Delta_y + r_p \sin\left[(k - n) \frac{\pi}{n}\right]$$

- $2n \leq k \leq 3n$:

$$x_k = r_p$$

$$y_k = -h_0 + e + \Delta_y - (2n - k) \frac{\Delta_y}{n}$$

Question 14 Écrire une fonction `dichotomie(f, xg, xd, eps=10**-8)` pour laquelle `f` est une fonction dont on cherche le zéro entre `xg` et `xd` avec `eps` la tolérance pour un critère d'arrêt de l'algorithme sur les antécédents.

```
def dichotomie(f, xg, xd, eps = 10**-8):
    if f(xg) * f(xd) > 0:
        return None
    while (abs(xd - xg)) > eps:
        xm = (xg + xd) / 2
        if f(xg) * f(xm) <= 0:
            xd = xm
        else :
            xg = xm
    sol = (xg + xd) / 2
    return sol
```

3 Étude dynamique de la structure 2D

Objectif

Déterminer les caractéristiques moteur nécessaires pour satisfaire le cahier des charges.

3.2 Hypothèses sur les masses et inerties

Question 15 Donner les hypothèses qui peuvent conduire à considérer comme nuls les produits d'inertie I_{yx} et I_{yz} des opérateurs d'inertie des bras principaux 1 et 2, donnés dans le **Tableau 4**.

Les solides 1 et 2 possèdent respectivement un plan de symétrie de normale $\vec{y}_1$ et $\vec{y}_2$ et les points A_1 et A_2 appartiennent aux plans respectifs.

3.3 Étude des sollicitations dynamiques en rotation des bras principaux

Question 16 Déterminer au point D , l'expression du torseur dynamique du plateau 5 dans son mouvement par rapport au repère $\mathcal{R}_0$.

$$\vec{V}_{(D,5/0)} = \vec{V}_{(G_5,5/0)}$$

$$\vec{\gamma}_{(D,5/0)} = \ddot{x}\vec{x}_0 + \ddot{y}\vec{y}_0$$

$$\begin{aligned}\vec{\delta}_{(D,5/0)} &= m_5 \overrightarrow{DG_5} \wedge \vec{\gamma}_{(D,5/0)} \\ &= m_5 (x_G \vec{x}_0 + y_G \vec{y}_0) \wedge (\ddot{x}\vec{x}_0 + \ddot{y}\vec{y}_0) \\ &= m_5 (x_G \ddot{y} - y_G \ddot{x}) \vec{z}_0\end{aligned}$$

Le torseur dynamique du plateau 5 dans son mouvement par rapport au repère $\mathcal{R}_0$ a donc pour expression :

$$(\mathcal{F}_{5 \rightarrow 6}) = \left\{ \begin{array}{c} m_5 (\ddot{x}\vec{x}_0 + \ddot{y}\vec{y}_0) \\ m_5 (x_G \ddot{y} - y_G \ddot{x}) \vec{z}_0 \end{array} \right\}_D$$

Question 17 En isolant le système approprié, justifier que le torseur modélisant les actions mécaniques de la bielle 6 sur le plateau 5 ($\mathcal{F}_{6 \rightarrow 5}$) est un glisseur d'axe $(E, \vec{x}_3)$.

Le problème est plan de normale $\vec{z}_0$. Toutes les liaisons sphériques sont assimilables à des pivots d'axe dirigé par la normale au plan. On isole 6.

BAME :

- Action de 5 sur 6 :

$$(\mathcal{F}_{5 \rightarrow 6}) = \left\{ \begin{array}{c} X_{56}\vec{x}_0 + Y_{56}\vec{y}_0 \\ \vec{0} \end{array} \right\}_E$$

- Action de 7 sur 6 :

$$(\mathcal{F}_{7 \rightarrow 6}) = \left\{ \begin{array}{c} X_{76}\vec{x}_0 + Y_{76}\vec{y}_0 \\ \vec{0} \end{array} \right\}_F$$

Le solide 6 est soumis uniquement à 2 glisseurs en E et F. La résultante de l'action de 5 sur 6 est donc portée par la droite (EF). Les solides 6 et 3 étant constamment parallèles, (EF) admet comme vecteur directeur $\vec{x}_3$. ($\mathcal{F}_{5 \rightarrow 6}$) et par la même ($\mathcal{F}_{6 \rightarrow 5}$) sont donc des glisseurs d'axe $(E, \vec{x}_3)$

Question 18 En isolant le système approprié et en remarquant que le mécanisme est plan, justifier que le torseur modélisant les actions mécaniques du bras secondaire 4 sur le plateau 5 ($\mathcal{F}_{4 \rightarrow 5}$) est un glisseur d'axe $(C_2, \vec{x}_4)$.

On procède de la même manière qu'en Q17.

On isole 4.

BAME :

- Action de 2 sur 4 :

$$(\mathcal{F}_{2 \rightarrow 4}) = \left\{ \begin{array}{c} X_{24}\vec{x}_0 + Y_{24}\vec{y}_0 \\ \vec{0} \end{array} \right\}_{B_2}$$

- Action de 5 sur 4 :

$$(\mathcal{F}_{5 \rightarrow 4}) = \left\{ \begin{array}{c} X_{54}\vec{x}_0 + Y_{54}\vec{y}_0 \\ \vec{0} \end{array} \right\}_{C_2}$$

Le solide 4 est soumis uniquement à 2 glisseurs en B_2 et C_2 . La résultante de l'action de 2 sur 4 est donc portée par la droite (B_2C_2) . Les solides 6 et 3 étant constamment parallèles, (B_2C_2) admet comme vecteur directeur $\vec{x}_4$. ($\mathcal{F}_{5 \rightarrow 4}$) et par la même ($\mathcal{F}_{4 \rightarrow 5}$) sont donc des glisseurs d'axe $(C_2, \vec{x}_4)$

Question 19 En se limitant exclusivement à l'utilisation du théorème de la résultante dynamique ou du théorème du moment dynamique, déterminer la stratégie permettant d'obtenir :

- une équation scalaire permettant de déterminer F_{45} en fonction de l'action de la pesanteur sur le plateau 5 et de paramètres cinématiques (sans F_{35} et F_{65});
- deux équations scalaires liant F_{35} et F_{65} en fonction de l'action de la pesanteur sur le plateau 5 et de paramètres cinématiques (sans F_{45}).

(eq-i)	Isolement	Théorème dynamique	Point d'application	Projection
1	5	Résultante	/	$\vec{y}_3$
2	5	Résultante	/	$\vec{y}_4$
3	5	Moment	C_2	$\vec{z}_0$

Question 20 Déterminer la projection sur $\vec{z}_0$ du moment dynamique du bras principal 2 ($\overrightarrow{\delta_{A_2,2/0}} \cdot \vec{z}_0$), dans son mouvement par rapport au repère galiléen $\mathcal{R}_0$, exprimé au point A_2 .

Le point A_2 est un point fixe.

$$\begin{aligned}
 \overrightarrow{\delta_{A_2,2/0}} \cdot \vec{z}_0 &= \frac{d\overrightarrow{\sigma_{A_2,2/0}}}{dt} \cdot \vec{z}_0 \\
 &= \frac{d(\overrightarrow{\sigma_{A_2,2/0}} \cdot \vec{z}_0)}{dt} \\
 &= \frac{d[(\mathbb{I}_{(A_2,2/0)} \cdot \vec{\Omega}_{A_2,2/0}) \cdot \vec{z}_0]}{dt} \\
 &= C_p \ddot{\theta}_{20}
 \end{aligned}$$

Question 21 Déterminer l'expression de C_{r2} en fonction de F_{45} , $\ddot{\theta}_{20}$, θ_{40} , θ_{20} , de l'action de la pesanteur et de paramètres géométriques constants.

On isole $\{2+4\}$.

BAME :

Le théorème du moment dynamique écrit au point A_2 en projection suivant $\vec{z}_0$ donne :

$$\begin{aligned}
 \overrightarrow{\delta_{A_2,2/0}} \cdot \vec{z}_0 &= [-\overrightarrow{A_2 G_2} \wedge m_p g \vec{y}_0 - \overrightarrow{A_2 C_2} \wedge F_{45} \vec{x}_4] \cdot \vec{z}_0 + C_{r2} \\
 \Leftrightarrow C_p \ddot{\theta}_{20} &= [-a_g \vec{x}_2 \wedge m_p g \vec{y}_0 - (b \vec{x}_2 + c \vec{x}_4) \wedge F_{45} \vec{x}_4] \cdot \vec{z}_0 + C_{r2} \\
 \Leftrightarrow C_p \ddot{\theta}_{20} &= C_{r2} - a_g m_p g \cos \ddot{\theta}_{20} - b F_{45} \sin(\theta_{20} - \theta_{40}) \\
 \Leftrightarrow C_{r2} &= C_p \ddot{\theta}_{20} + a_g m_p g \cos \ddot{\theta}_{20} + b F_{45} \sin(\theta_{20} - \theta_{40})
 \end{aligned} \tag{1}$$

ÉTUDE DE L'ASSERVISSEMENT EN POSITION DU ROBOT DELTA

1 Modélisation de la chaîne d'énergie

1.1 Recherche de l'inertie équivalente

- Objectif

Déterminer l'inertie équivalente sur l'arbre moteur.

Question 22 Déterminer l'expression littérale de J_{eq} , l'inertie équivalente sur l'arbre moteur 1, de l'ensemble décrit ci-dessus (qu'on notera, si besoin, Σ), en mouvement dans le repère galiléen lié au bâti.

$$2 T_{\Sigma} = J_{bmot} \omega_m^2 + J_r \omega_{10}^2 + C_1 \omega_m^2 + (m_c + m_5) b^2 \omega_m^2$$

En prenant en compte le rapport de réduction r avec $r = \frac{\omega_m}{\omega_{10}}$, on en déduit l'expression de l'inertie équivalente J_{eq} :

$$J_{eq} = J_{bmot} + J_r + [C_1 + (m_c + m_5) b^2] r^2$$

Question 23 Déterminer la masse maximale de la charge m_c qu'il est possible de maintenir avec une dépression de 0,7 bar.

Dans le Tableau 1 fourni, pour un diamètre de 30 mm, on trouve une force de maintien (holding force) de 26,2 N, soit : $m_c = 26,2/g \simeq 2,7$ kg.

Question 24 Le plateau 5 ayant une masse $m_5 = 500$ g, déterminer l'ordre de grandeur de J_{eq} avec un chiffre significatif.

$$\begin{aligned} J_{eq} &= 1.49 * 10^{-4} + 0.5 * 10^{-4} + [0.2 + (0.5 + 5) * 0.22^2] / 5^2 \\ &= 0.02 \text{ kgm}^2 \end{aligned}$$

1.2 Modèle à deux phases du moteur synchrone à aimants permanents

Question 25 À partir des équations (C.1) à (C.4), donner les expressions de $v_d(t)$ et $v_q(t)$ en fonction de $i_d(t)$, $i_q(t)$ et $\omega_m(t)$ ainsi que des paramètres R , L et φ_f .

On a : $v_d(t) = R.i_d(t) + \frac{d\varphi_d(t)}{dt} - n_p.\omega_m(t).\varphi_q(t)$ (C.1) ; $\varphi_d(t) = L.i_d(t) + \varphi_f$ (C.3) ; et $\varphi_q(t) = L.i_q(t)$ (C.4).

On remplace $\varphi_d(t)$ et $\varphi_q(t)$ dans (C.1) :

$$v_d(t) = R.i_d(t) + L.\frac{di_d(t)}{dt} - n_p.L.\omega_m(t).i_q(t)$$

De la même manière dans (C.2) :

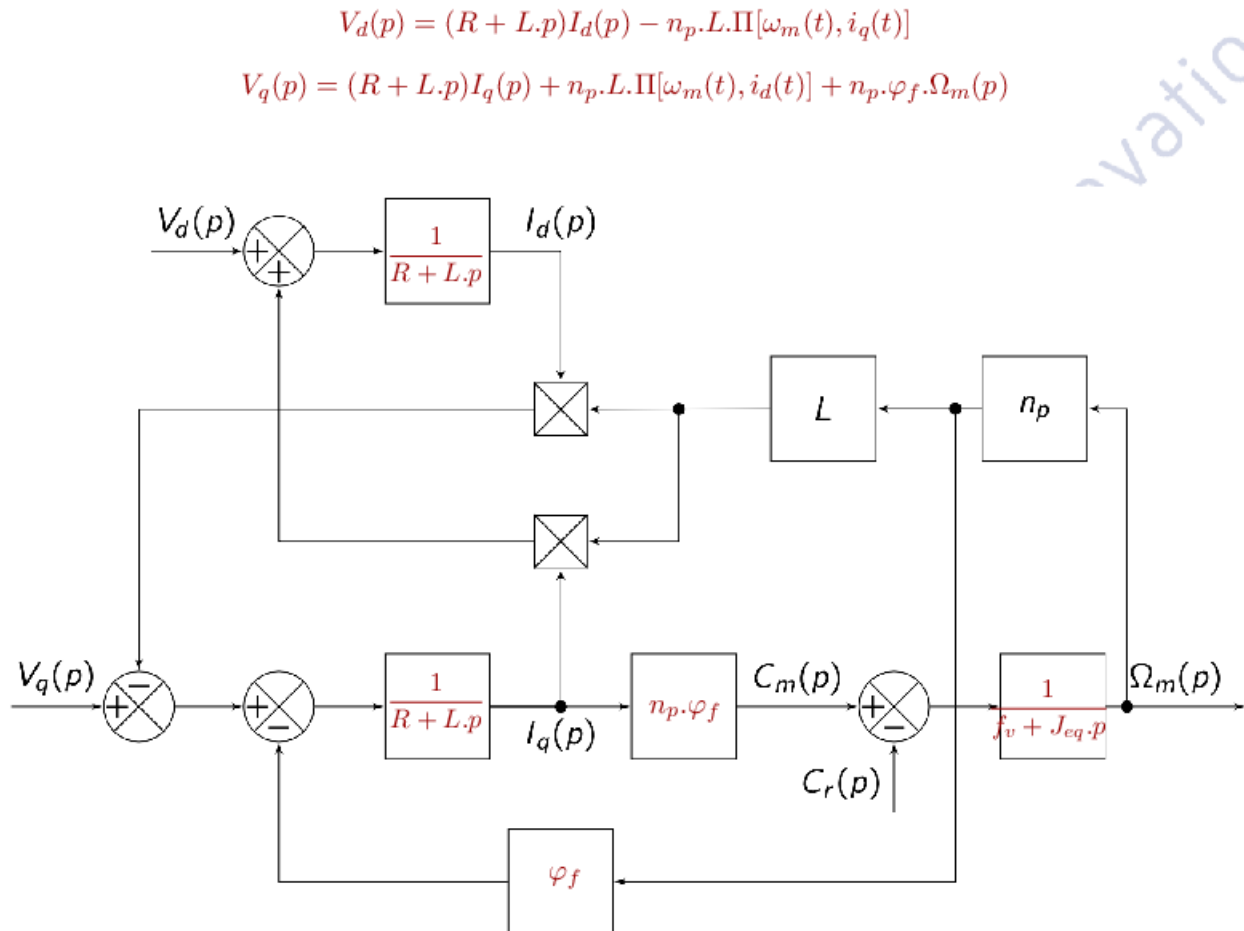
$$v_q(t) = R.i_q(t) + L.\frac{di_q(t)}{dt} + n_p.L.\omega_m(t).i_d(t) + n_p.\varphi_f.\omega_m(t)$$

Question 26 Avec les notations précédentes et en se plaçant dans les conditions d'Heaviside, déterminer les transformées de Laplace des équations (C.5) à (C.6) et les expressions de $v_d(t)$ et $v_q(t)$ déterminées en **Q25**. Compléter le schéma bloc du cahier réponses.

L'équation (C.5) devient : $C_m(p) = n_p \cdot \varphi_f \cdot I_q(p)$.

L'équation (C.6) devient : $(f_v + J_{eq} \cdot p) \Omega_m(p) = C_m(p) - C_r(p)$.

Les expressions de $v_d(t)$ et $v_q(t)$ deviennent dans le domaine de Laplace :



1.3 Validation du modèle

Question 27 À partir des équations (C.5) et (C.6), déterminer numériquement la valeur du courant $i_{q\infty}$ en régime permanent.

D'après le schéma bloc, on sait que :

$$\Omega_m(p) = \frac{1}{f_v + J_{eq} \cdot p} (n_p \cdot \varphi_f \cdot I_q(p) - C_r(p)) \Rightarrow I_q(p) = \frac{1}{n_p \cdot \varphi_f} ((f_v + J_{eq} \cdot p) \Omega_m(p) + C_r(p))$$

En utilisant le théorème de la valeur finale, avec $C_r(p)$ et $\Omega_m(p)$ étant des échelons :

$$i_{q\infty} = \lim_{t \rightarrow +\infty} i_q(t) = \lim_{p \rightarrow 0} p \cdot I_q(p) = \lim_{p \rightarrow 0} p \cdot \frac{1}{n_p \cdot \varphi_f} ((f_v + J_{eq} \cdot p) \frac{\omega_{mmax}}{p} + \frac{C_{rmax}}{p}) = \frac{1}{n_p \cdot \varphi_f} (f_v \cdot \omega_{mmax} + C_{rmax})$$

$$\text{A.N. : } i_{q\infty} = \frac{1}{3 \times 260 \cdot 10^{-3}} \times 2,2 = 2,8 \text{ A } (f_v = 0).$$

Question 28 À partir des équations obtenues à la Q25, en appliquant la stratégie de commande du moteur, déterminer, en fonction de R , L , n_p , ω_{max} , φ_f et $i_{q\infty}$, les expressions de $v_{d\infty}$ et $v_{q\infty}$ correspondant aux tensions v_d et v_q en régime permanent.

On utilise les équations de la Q25 en régime permanent, donc les dérivées s'annulent :

$$v_{d\infty} = R.i_{d\infty} - n_p.L.\omega_{max}.i_{q\infty}$$

$$v_{q\infty} = R.i_{q\infty} + n_p.L.\omega_{max}.i_{d\infty} + n_p.\varphi_f.\omega_{max}$$

Or, la stratégie de commande impose $i_d = 0$; on obtient donc :

$$v_{d\infty} = -n_p.L.\omega_{max}.i_{q\infty} \quad \text{et} \quad v_{q\infty} = R.i_{q\infty} + n_p.\varphi_f.\omega_{max}$$

Question 29 Déterminer les valeurs numériques de $v_{d\infty}$ et $v_{q\infty}$. En déduire V_∞ , la valeur de $|\underline{V}(t)|$ en régime permanent.

A.N. : $v_{d\infty} = -3 \times 36,5 \cdot 10^{-3} \times 22,5 \times 2,8 = 7 \text{ V}$, et $v_{q\infty} = 6,8 \times 2,8 + 3 \times 22,5 \times 260 \cdot 10^{-3} = 36,7 \text{ V}$.

Finalement, V_∞ est la norme de $v_{d\infty}$ et de $v_{q\infty}$: $V_\infty = \sqrt{v_{d\infty}^2 + v_{q\infty}^2} = 37,4 \text{ V}$.

Question 30 À partir des résultats précédents et de la simulation numérique donnée dans le cahier réponse, indiquer, en détaillant la réponse, si le modèle peut être validé.

Grâce aux courbes proposées, on remarque que :

- $\lim_{t \rightarrow +\infty} \omega_m(t) \simeq 22 \text{ rad.s}^{-1}$;
- $\lim_{t \rightarrow +\infty} i_d(t) \simeq 0 \text{ A}$;
- $\lim_{t \rightarrow +\infty} i_q(t) \simeq 2,8 \text{ A}$;
- $\lim_{t \rightarrow +\infty} C_m(t) \simeq 2,2 \text{ N.m}$;

Ces valeurs correspondent bien à ce qui est attendu en régime permanent.

2 Modélisation du comportement de la commande

2.1 Découplage de la commande

Question 31 À partir des équations (C.1) à (C.4) et des équations (C.7) et (C.8), donner les expressions des variables $v'_d(t)$ et $v'_q(t)$ en fonction de $i_d(t)$, $i_q(t)$ et des paramètres R , L .

Avec les équations déterminées à la Q25, on trouve :

$$v'_d(t) = R.i_d(t) + L.\frac{di_d(t)}{dt} \quad \text{et} \quad v'_q(t) = R.i_q(t) + L.\frac{di_q(t)}{dt}$$

Question 32 Montrer que l'on peut mettre les fonctions de transfert H_d et H_q , définies par $H_d(p) = \frac{I_d(p)}{V'_d(p)}$

et $H_q(p) = \frac{I_q(p)}{V'_q(p)}$ sous la forme : $H_d(p) = H_q(p) = \frac{K}{1 + T.p}$.

Donner les expressions de K et T en fonction de R et L .

En appliquant la transformée de Laplace aux équations trouvées à la question précédente, on obtient :

$$V'_d(p) = (R + L.p)I_d(p) \quad \text{et} \quad V'_q(p) = (R + L.p)I_q(p)$$

Ainsi, les deux fonctions de transfert $H_d(p)$ et $H_q(p)$ peuvent s'écrire : $H_d(p) = H_q(p) = \frac{1/R}{1 + \frac{L}{R} \cdot p}$.

On a ainsi : $K = 1/R$ et $T = L/R$.

2.2 Régulation de courant

Question 33 Justifier en quoi un correcteur proportionnel ne peut convenir.

La FTBO étant un premier ordre, donc de classe 0, il faudrait au moins un intégrateur dans la boucle, pour avoir une classe d'au moins 1 et assurer ainsi une erreur statique nulle en réponse à un échelon. Un correcteur proportionnel ne peut donc convenir.

Question 34 Quelle doit être la valeur de T_i si on souhaite compenser le pôle dominant ? Déterminer la valeur de K_p pour répondre à l'exigence de rapidité.

Pour que $1 + T_i \cdot p$ compense le dénominateur $1 + T \cdot p$, il faut que $T_i = T$.

Avec ce réglage, la FTBF est : $FTBF = \frac{\frac{K \cdot K_p}{T \cdot p}}{1 + \frac{K \cdot K_p}{T \cdot p}} = \frac{1}{1 + \frac{T}{K \cdot K_p} \cdot p}$. C'est la fonction de transfert d'un premier ordre : le temps de réponse à 5% est donc égal à $3 \cdot \frac{T}{K \cdot K_p}$. Or d'après l'exigence de rapidité, il faut que ce temps soit inférieur à 5 ms. Ainsi, il faut que :

$$\frac{3 \cdot T}{K \cdot K_p} \leq 5 \cdot 10^{-3} \Rightarrow K_p \geq \frac{3 \cdot T}{5 \cdot 10^{-3} \cdot K}$$

$$\text{A.N. : } K_{plim} = \frac{3 \times 5 \cdot 10^{-3}}{5 \cdot 10^{-3} \times 0,15} = 20 \text{ V} \cdot \text{A}^{-1}.$$

Question 35 À partir de la réponse temporelle donnée dans le cahier réponse, déterminer si le réglage du correcteur permet de valider le cahier des charges.

D'après la courbe du cahier réponse, on peut dire que :

- l'exigence de précision est respectée : la sortie tend vers 1 A donc l'erreur statique est nulle ;
- l'exigence de rapidité est respectée : le temps de réponse à 5% est d'environ 4,8 ms ;
- l'exigence de stabilité est respectée : la réponse ne présente aucun dépassement.

Le cahier des charges est donc validé.

2.3 Régulation de vitesse

Question 36 En justifiant la réponse, déterminer ce qui peut amener à approximer $B_c(p)$ à un bloc unitaire ($B_c(p) = 1$).

La fonction $B_c(p)$ correspond à la boucle de régulation en courant, étudiée aux questions précédentes. Cette boucle peut être considérée comme très rapide devant la régulation de vitesse : on remarque un rapport d'environ 100 sur les temps de réponse (0,005 s contre 0,6 s). La boucle de régulation de courant peut donc être approximée à un bloc unitaire.

Question 37 Pour garantir les critères de précision, en justifiant la réponse, déterminer la classe minimale à imposer au correcteur C_v .

On souhaite des erreurs statiques nulles en réponse à une consigne et à une perturbation de type échelons. Il faut donc une FTBO de classe au moins 1, avec un intégrateur placé en amont de la perturbation. Le correcteur

$C_v(p)$ doit être de classe 1 au minimum.

2.3.1 Correction intégrale

Question 38 Justifier que si le frottement visqueux f_v est nul ($f_v = 0$) alors la régulation de vitesse est instable et que s'il ne l'est pas ($f_v > 0$), la régulation de vitesse est stable.

Si on considère la perturbation de couple nulle, la FTBO est alors : $FTBO_1 = \frac{K_v \cdot n_p \cdot \varphi_f}{p \cdot (J_{eq} \cdot p + f_v)}$. La FTBF est donc :

$$FTBF_1 = \frac{FTBO_1}{1 + FTBO_1} = \frac{K_v \cdot n_p \cdot \varphi_f}{K_v \cdot n_p \cdot \varphi_f + p \cdot (J_{eq} \cdot p + f_v)} = \frac{K_v \cdot n_p \cdot \varphi_f}{K_v \cdot n_p \cdot \varphi_f + f_v \cdot p + J_{eq} \cdot p^2}$$

Or, un système ayant une fonction de transfert d'ordre 2 sera stable si tous les coefficients du polynôme du dénominateur sont non nuls et de mêmes signes. Les termes $K_v \cdot n_p \cdot \varphi_f$ et J_{eq} étant positifs, il faut donc que f_v soit non nul et positif pour que le système soit stable.

Question 39 Déterminer l'expression de K_v pour obtenir une marge de phase conforme à celle préconisée par le cahier des charges.

On souhaite une marge de phase de 45° au minimum. Or, la FTBO étant constituée d'un intégrateur et d'un premier ordre $\frac{1}{J_{eq} \cdot p + f_v}$, sa courbe de phase évoluera entre -90° et -180° . De plus, on peut déterminer la valeur de ω pour laquelle la phase vaudra -135° : ce sera à la pulsation de coupure du premier ordre. Ici, on a $\tau = J_{eq}/f_v$, donc $\omega_c = f_v/J_{eq}$.

À cette pulsation, il faut que le gain de la FTBO soit nul, soit :

$$20 \log |FTBO_1(\omega = f_v/J_{eq})| = 0 \quad \text{ou :} \quad |FTBO_1(\omega = f_v/J_{eq})| = 1$$

$$\Rightarrow \frac{K_v \cdot n_p \cdot \varphi_f}{\frac{f_v}{J_{eq}} \cdot \sqrt{f_v^2 + f_v^2}} = 1 \Rightarrow K_v = \frac{\sqrt{2} f_v^2}{n_p \cdot \varphi_f \cdot J_{eq}}$$

Cette valeur est une valeur maximale pour K_v , car la marge de phase peut être plus grande que 45° , donc la pulsation à laquelle le gain est nul peut être inférieure à $\omega_c = f_v/J_{eq}$.

Question 40 Déterminer l'expression de K_v pour rendre le système le plus rapide sans dépassement et en déduire le temps de réponse à 5% approximatif avec ce réglage de K_v . Conclure quant au cahier des charges.

D'après le calcul de la FTBF à la Q38, on peut déterminer la pulsation propre ω_0 et le coefficient d'amortissement ξ de ce second ordre : $\omega_0 = \sqrt{\frac{K_v \cdot n_p \cdot \varphi_f}{J_{eq}}}$, et donc $\xi = \frac{1}{2} \cdot \frac{f_v}{\sqrt{K_v \cdot n_p \cdot \varphi_f \cdot J_{eq}}}$.

Le système sera le plus rapide sans dépassement si $\xi = 1$; on a alors :

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{f_v}{\sqrt{K_v \cdot n_p \cdot \varphi_f \cdot J_{eq}}} = 1 \Rightarrow K_v \cdot n_p \cdot \varphi_f \cdot J_{eq} = f_v^2/4 \Rightarrow K_v = \frac{f_v^2}{4 \cdot n_p \cdot \varphi_f \cdot J_{eq}}$$

Remarque : cette valeur est en accord avec la question précédente ($1/4 < \sqrt{2}$), puisque pour celle-ci il s'agissait d'une valeur maximale.

Pour un second ordre avec $\xi = 1$, le temps de réponse est $t_{5\%} \simeq 5/\omega_0$. Ici, avec l'expression trouvée pour K_v , on a $\omega_0 = \frac{f_v}{2J_{eq}}$, donc $t_{5\%} = \frac{10J_{eq}}{f_v}$. A.N. : $t_{5\%} \simeq 2000 \text{ s}$ (erreur ?) : cette valeur ne peut pas convenir, il faut choisir un autre correcteur.

2.3.2 Correction proportionnelle intégrale

Question 41 Déterminer les conditions sur K_v et T_v pour que le système soit stable en boucle fermée.

Avec le correcteur proportionnel intégral, la FTBO devient : $FTBO_2 = \frac{K_v(1 + T_v \cdot p)n_p \cdot \varphi_f}{T_v \cdot J_{eq} \cdot p^2}$. On a donc :

$$FTBF_2 = \frac{K_v(1 + T_v \cdot p)n_p \cdot \varphi_f}{K_v(1 + T_v \cdot p)n_p \cdot \varphi_f + T_v \cdot J_{eq} \cdot p^2}$$

Le dénominateur vaut alors : $D(p) = K_v \cdot n_p \cdot \varphi_f + K_v \cdot T_v \cdot n_p \cdot \varphi_f \cdot p + T_v \cdot J_{eq} \cdot p^2$. Pour que le système soit stable, tous les coefficients du polynôme du dénominateur doivent être non nuls et de mêmes signes. Ainsi, la seule condition est que K_v et T_v doivent être strictement positifs.

Question 42 À partir des diagrammes de Bode donnés dans le document réponse pour $K_v = 1 \text{ A} \cdot \text{rad}^{-1} \cdot \text{s}$ et $T_v = 0,1 \text{ s}$, déterminer approximativement la valeur minimale (en dB) à imposer à K_v , sans modifier T_v , pour que la marge de gain et la marge de phase vérifient le cahier des charges de cet asservissement de vitesse.

Pour la marge de gain, il n'y a aucun problème puisque la phase n'atteint jamais -180° : quelque soit la valeur de K_v , on aura donc toujours $M_G \geq 10 \text{ dB}$.

Concernant la marge de phase, pour avoir 45° , la courbe de gain pourrait être abaissée de maximum 15 dB. Donc : $20 \log K_{v,min} = -15 \Rightarrow K_{v,min} = 10^{-15/20}$. A.N. : $K_{v,min} \simeq 0,18$.

Question 43 Grâce aux simulations données dans le cahier réponse, déterminer la valeur de K_v permettant de respecter le cahier des charges (pour $T_v = 0,1 \text{ s}$). Donner la valeur correspondante du pic de courant.

Il faut respecter le temps de réponse à 5% maximal de 0,6 s. Parmi les courbes proposées, seules celles pour $K_v = 0,2$ et $K_v = 0,3$ conviennent. Elles correspondent à un pic de courant de respectivement 6 A et 7,2 A.

2.3.3 Correction proportionnelle intégrale avec saturation de courant et système anti emballement

Question 44 Déterminer l'expression du temps t_{95} pour atteindre 95% de la vitesse maximale du moteur $\omega_{mmax} = 22,5 \text{ rad/s}$ lorsqu'il y a saturation de courant avec $i_q(t) = I_{max} \cdot u(t)$ et un couple résistant $C_r(t) = C_{rmax} \cdot u(t)$ où $C_{rmax} = 2,2 \text{ N} \cdot \text{m}$. Déterminer alors la valeur de I_{max} permettant de respecter le cahier des charges.

$$\Omega_m(p) = \frac{1}{J_{eq} \cdot p} (n_p \cdot \varphi_f \cdot I_q(p) - C_r(p)) = \frac{1}{J_{eq} \cdot p} (n_p \cdot \varphi_f \cdot \frac{I_{max}}{p} - \frac{C_{rmax}}{p}) = \frac{n_p \cdot \varphi_f \cdot I_{max} - C_{rmax}}{J_{eq}} \cdot \frac{1}{p^2}$$

Cette expression correspond à une rampe : $\omega_m(t) = \frac{n_p \cdot \varphi_f \cdot I_{max} - C_{rmax}}{J_{eq}} \cdot t \cdot u(t)$.

$$\text{Alors, à } t = t_{95} : \omega_m(t_{95}) = 0,95 \cdot \omega_{mmax} = \frac{n_p \cdot \varphi_f \cdot I_{max} - C_{rmax}}{J_{eq}} \cdot t_{95} \Rightarrow t_{95} = \frac{0,95 \cdot \omega_{mmax} \cdot J_{eq}}{n_p \cdot \varphi_f \cdot I_{max} - C_{rmax}}$$

D'après le cahier des charges, on veut $t_{95} = 0,6 \text{ s}$ au maximum (on suppose qu'il n'y aura pas de dépassement de plus de 5% après la phase de rampe). Or : $I_{max} = \frac{1}{n_p \cdot \varphi_f} \left(\frac{0,95 \cdot \omega_{mmax} \cdot J_{eq}}{t_{95}} + C_{rmax} \right)$. A.N. : $I_{max} \simeq 4 \text{ A}$.

Question 45 Conclure quant au cahier des charges.

- Les erreurs statiques sont nulles grâce à l'intégrateur placé en amont de la perturbation ;
- La rapidité est vérifiée : $t_{5\%} \simeq 0,25 \text{ s} \leq 0,6 \text{ s}$;
- Les marges de gain et de phase sont vérifiées car on a pris $K_v = 1,3 \text{ A} \cdot \text{rad}^{-1} \cdot \text{s} \geq 0,18 \text{ A} \cdot \text{rad}^{-1} \cdot \text{s}$.