

Proposition de corrigé

Concours : Concours Centrale-Supélec

Année : 2023

Filière : MP

Épreuve : Sciences Industrielles pour l'Ingénieur

Ceci est une proposition de corrigé des concours de CPGE, réalisée bénévolement par des enseignants de Sciences Industrielles de l'Ingénieur et d'Informatique, membres de l'[UPSTI](https://www.upsti.fr) (Union des Professeurs de Sciences et Techniques Industrielles), et publiée sur le site de l'association :

<https://www.upsti.fr/espace-etudiants/annales-de-concours>

A l'attention des étudiants

Ce document vous apportera des éléments de corrections pour le sujet traité, mais n'est ni un corrigé officiel du concours, ni un corrigé détaillé ou exhaustif de l'épreuve en question.

L'UPSTI ne répondra pas directement aux questions que peuvent soulever ces corrigés : nous vous invitons à vous rapprocher de vos enseignants si vous souhaitez des compléments d'information, et à vous adresser à eux pour nous faire remonter vos éventuelles remarques.

Licence et Copyright

Toute représentation ou reproduction (même partielle) de ce document faite sans l'accord de l'UPSTI est **interdite**. Seuls le téléchargement et la copie privée à usage personnel sont autorisés (protection au titre des [droits d'auteur](#)).

En cas de doute, n'hésitez pas à nous contacter à : corrigesconcours@upsti.fr.

Informez-vous !

Retrouvez plus d'information sur les [Sciences de l'Ingénieur](#), l'[orientation](#), les [Grandes Ecoles](#) ainsi que sur les [Olympiades de Sciences de l'Ingénieur](#) et sur les [Sciences de l'Ingénieur au Féminin](#) sur notre site : www.upsti.fr

L'équipe UPSTI

Exosquelette lombaire Japet

Corrigé UPSTI

I Introduction

I.A – Présentation générale

I.B – Pré-dimensionnement des quatre actionneurs

- Objectif

Quantifier la force de traction à exercer par chaque actionneur linéaire pour atteindre un seuil de diminution de la pression intra-discale.

Q 1. Après analyse des courbes de la figure 3, justifier que la force de traction choisie par le constructeur, afin de limiter la pression intra-discale, est de 40 N par actionneur.

Les 2 courbes de la figure 3 permettent de faire les observations suivantes :

Disque L3-L4

- diminution de la pression intra-discale de 0,53 MPa à 0,22 MPa pour un effort exercé par l'actionneur allant de 0 N à 65 N ;
- augmentation de la pression intra-discale de 0,22 MPa à 0,25 MPa pour un effort exercé par l'actionneur allant de 65 N à 100 N.

Disque L4-L5

- diminution de la pression intra-discale de 0,48 MPa à 0,2 MPa pour un effort exercé par l'actionneur allant de 0 N à 65 N ;
- augmentation de la pression intra-discale de 0,2 MPa à 0,24 MPa pour un effort exercé par l'actionneur allant de 65 N à 100 N.

On peut se demander pourquoi le constructeur n'a pas plutôt choisi un effort de 65 N environ par actionneur. Le choix des 40 N est sans doute motivé par la littérature scientifique et par le fait que trop diminuer la pression intra-discale risque de réduire le volume musculaire de l'utilisateur (trop d'assistance implique une démusculature souvent).

Aussi on remarque qu'à partir de 40N, les contraintes lombaires restent plus faibles globalement et il est peut-être plus facile de fournir 40N que 65N.

I.C – Validation expérimentale du pré-dimensionnement des quatre actionneurs linéaires

- Objectif

Montrer qu'il est possible de diminuer la pression intra-discale de 25 à 50% dans le cas d'une utilisation au quotidien de l'exosquelette.

Q 2. Déterminer, pour les trois positions du capteur de pression dans le disque intervertébral L3-L4, la diminution moyenne de la pression intra-discale (en %) pendant les deux minutes d'application de l'effort de traction, sans prendre en compte la phase transitoire de 0 à 0,5 min.

Remarque : un script Python aurait pu être demandé pour traiter cette question. On aurait fourni en entrée les listes contenant les coordonnées des points situés dans l'intervalle qui nous intéresse ici pour chaque position du capteur, puis on aurait demandé une fonction qui renvoie la valeur moyenne de pression pour les 3 essais.

On va calculer "à la main" la valeur moyenne de pression entre 0,5 min et 2 min. Alors :

- **capteur avant :** entre $t = 0,5$ min et $t = 1,2$ min la courbe est linéaire et la valeur moyenne est son point milieu, soit à $t = 0,85$ min à la pression normalisée 0,79. Entre $t = 1,2$ min et $t = 2$ min la valeur de pression est constante à 0,78. La pression moyenne normalisée vaut alors $\frac{(1,2 - 0,5) \cdot 0,79 + (2 - 1,2) \cdot 0,78}{2 - 0,5} \approx 0,785$ soit une diminution de pression de 21,5%.
- **capteur milieu :** avec le même raisonnement sur les mêmes intervalles de temps la pression moyenne normalisée vaut $\frac{(1,2 - 0,5) \cdot 0,71 + (2 - 1,2) \cdot 0,74}{2 - 0,5} \approx 0,726$ soit une diminution de pression de 27,4%.
- **capteur arrière :** avec le même raisonnement sur les mêmes intervalles de temps la pression moyenne normalisée vaut $\frac{(1,2 - 0,5) \cdot 0,54 + (2 - 1,2) \cdot 0,52}{2 - 0,5} \approx 0,53$ soit une diminution de pression de 47%.

I.D – Problématique et organisation de l'étude

II Étude de l'amplitude du déplacement de l'actionneur pour conserver un mouvement naturel

- Objectif -

Déterminer la course des actionneurs permettant de suivre les mouvements du corps conformément à l'exigence Id2 du cahier des charges partiel.

Q 3. Déterminer l'expression de la longueur $l_2(t)$ en fonction de $\varphi(t)$, $h(t)$, b et a .

Par fermeture géométrique :

$$\overrightarrow{OE} + \overrightarrow{ED} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CO} = \vec{0} \Leftrightarrow a\vec{x} + l_2(t)\vec{y}_2 - b\vec{x}_3 - h(t)\vec{y} = \vec{0}$$

Par méthode du carré scalaire :

$$l_2(t) = \sqrt{a^2 + b^2 + h(t)^2 - 2a \cdot b \cos[\varphi(t)] + 2b \cdot h(t) \sin[\varphi(t)]}$$

Q 4. Le point C restant sur l'axe $(O, \vec{y})$, déterminer la course du vérin 2 à partir du protocole défini précédemment pour les valeurs $a = 100$ mm, $b = 150$ mm, $h_0 = 100$ mm et $\Delta h = 50$ mm.

Le vérin réalise une course complète entre $t = 0$ et $t = T$, donc :

- $l_2(t = 0) = \sqrt{a^2 + b^2 + h_0^2 - 2a \cdot b \cos[\varphi(0)] + 2b \cdot h_0 \sin[\varphi(0)]}$. Or cette valeur est minimisée pour $\varphi(0) = 0$, donc $l_2(t = 0) = 111,8\text{mm}$;

- $l_2(t = T) = \sqrt{a^2 + b^2 + (h_0 + \Delta h)^2 - 2a \cdot b \cos[\varphi(T)] + 2b \cdot (h_0 + \Delta h) \sin[\varphi(T)]}$. Or cette valeur est maximisée pour $\varphi(T) = 20^\circ$, donc $\boxed{l_2(t = T) = 205,4\text{mm}}$.

La course du vérin vaut donc $\boxed{\Delta l_2 = l_2(t = T) - l_2(t = 0) = 93,6\text{mm}}$.

III Élaboration du modèle de connaissance d'un actionneur linéaire placé sur un banc d'essai

III.A – Étude de la dynamique de l'actionneur linéaire dans le cas particulier représentatif de la mise en précontrainte étudiée à la question 3 modélisant le système dans cette configuration particulière

Objectif

Définir un modèle de connaissance de la dynamique du système permettant d'obtenir les équations d'un modèle de simulation comparable aux mesures du banc d'essai.

Q 5. En prenant soin de préciser le solide isolé et le théorème utilisé, déterminer l'expression littérale de la résultante $\vec{F}_{\text{cap} \rightarrow 4}$ en projection sur $\vec{y}_0$, en fonction de K_{res} et $y(t)$.

On isole le solide (4), il est soumis à :

- l'action mécanique transmise par la liaison glissière entre 3 et 4 d'axe $\vec{y}_0$;
- l'action du capteur $\vec{F}_{\text{cap} \rightarrow 4}$;
- l'effort de rappel du ressort $-K_{\text{res}}y(t)\vec{y}_0$.

Le Théorème de la Résultante Statique (solide (4) immobile) projetée selon $\vec{y}_0$ donne :

$$\boxed{0 = \vec{F}_{\text{cap} \rightarrow 4} \cdot \vec{y}_0 - K_{\text{res}}y(t)}$$

Q 6. Déterminer le rapport $\frac{\omega_{1/3}}{\omega_{2/3}}$ en fonction de Z_1 et Z_2 et faire l'application numérique. En déduire l'expression de $\vec{V}_{J,3/R_0}$ en fonction de $\omega_m(t)$, pas et λ .

On a un système pignon + roue dentée à axes fixes, donc : $\boxed{\frac{\omega_{1/3}}{\omega_{2/3}} = -\frac{Z_2}{Z_1} = -1}$.

Par composition des vitesses : $\vec{V}_{J,3/R_0} = \vec{V}_{J,3/2} + \vec{V}_{J,2/R_0}$, or $\vec{V}_{J,3/2} = \vec{0}$ car J est situé sur l'axe de rotation de la liaison pivot entre (3) et (2). De plus $\vec{V}_{J,2/R_0} = \frac{pas}{2\pi} \omega_{2/R_0} \vec{y}_0$.

Encore par composition des vitesses $\omega_{2/R_0} = \omega_{2/3} + \omega_{3/R_0}$ et $\omega_{3/R_0} = 0$ par la liaison glissière entre (3) et (0). De plus $\omega_{2/3} = -\omega_{1/3} = -\lambda \omega_m(t)$.

Pour conclure $\boxed{\vec{V}_{J,3/R_0} = -\frac{pas}{2\pi} \lambda \omega_m(t) \vec{y}_0}$.

Q 7. Déterminer l'expression des énergies cinétiques $E_c(\text{arbre moteur}/R_0)$, $E_c(1/R_0)$, $E_c(2/R_0)$ et $E_c(3/R_0)$ en fonction de $\omega_m(t)$, pas , λ , de la masse m_3 et des inerties.

- $E_c(\text{arbre moteur}/R_0) = \frac{1}{2} \left\{ \vec{0} \right\}_J \otimes \left\{ \vec{V}_{J, \text{arbre moteur}/R_0} \right\}_J = \frac{1}{2} I_m \omega_m(t)^2$ car la masse de l'arbre est négligée ;
- $E_c(1/R_0) = \frac{1}{2} I_r \omega_r(t)^2 = \frac{1}{2} (I_r \lambda^2) \omega_m(t)^2$ car la masse de (1) est négligée ;
- $E_c(2/R_0) = \frac{1}{2} I_V \omega_{2/R_0}^2 = \frac{1}{2} (I_V \lambda^2) \omega_m(t)^2$ car la masse de (2) est négligée ;
- $E_c(3/R_0) = \frac{1}{2} m_3 \vec{V}_{J,3/R_0}^2 = \frac{1}{2} \left(m_3 \left[\frac{pas}{2\pi} \lambda \right]^2 \right) \omega_m(t)^2$ car le solide est en translation.

Q 8. Écrire l'expression de l'énergie cinétique $E_c(\Sigma/R_0)$ et en déduire l'expression du moment d'inertie équivalent I_{eq} de l'ensemble mobile Σ reporté sur l'arbre moteur en fonction de pas , λ , de la masse m_3 et des inerties.

Par additivité de l'énergie cinétique :

$$E_c(\Sigma/R_0) = E_c(0/R_0) + E_c(\text{arbre moteur}/R_0) + E_c(1/R_0) + E_c(2/R_0) + E_c(3/R_0) + E_c(\text{ressort}/R_0) + E_c(4/R_0)$$

Or $E_c(\text{ressort}/R_0) = 0$ car la masse du ressort est négligée et $E_c(4/R_0) = E_c(0/R_0) = 0$ car les solides (0) et (4) sont statiques. Par conséquent :

$$E_c(\Sigma/R_0) = \frac{1}{2} \left(I_m + I_r \lambda^2 + I_V \lambda^2 + m_3 \left[\frac{pas}{2\pi} \lambda \right]^2 \right) \omega_m(t)^2$$

On identifie $I_{eq} = I_m + I_r \lambda^2 + I_V \lambda^2 + m_3 \left[\frac{pas}{2\pi} \lambda \right]^2$.

Q 9. Établir le bilan des puissances galiléennes des actions extérieures s'exerçant sur Σ et montrer qu'elles sont toutes nulles.

On isole Σ , les puissances extérieures qui s'exercent sur ce système sont :

- $P_{\text{châssis} \rightarrow 4/R_0} = \left\{ \mathcal{T}_{\text{châssis} \rightarrow 4} \right\} \otimes \left\{ \mathcal{V}_{4/R_0} \right\} = \left\{ \vec{F}_{\vec{0}}^{\text{cap} \rightarrow 4} \right\}_K \otimes \left\{ \frac{\vec{0}}{\vec{0}} \right\}_K = 0$ car le solide (4) est statique ;
- $P_{\text{châssis} \rightarrow 0/R_0} = 0$ car (0) est statique ;
- puissance développée par la pesanteur : $P_{\text{pes} \rightarrow 3/R_0} = P_{\text{pes} \rightarrow 4/R_0} = 0$ car (4) est statique et (3) est en translation selon $\vec{y}_0$ alors que la pesanteur est dirigée orthogonalement. Les autres solides ont une masse négligée et ne développent pas de puissance due à la pesanteur.

Finalement le total de la puissance extérieure à Σ est nul.

Q 10. Établir le bilan des puissances des actions intérieures à Σ et déterminer leurs expressions littérales en justifiant les résultats.

les puissances intérieures qui agissent sur le système Σ sont :

- puissance développée par la motorisation : $P_{\text{arbre moteur} \leftrightarrow 3} = c_m(t) \omega_m(t)$;
- puissance dissipée par l'actionneur linéaire (imperfection des différentes liaisons du système) : $P_{\text{diss}} = -(1 - \eta) c_m(t) \omega_m(t)$;

- une fois le rendement global pris en compte, on peut supposer les différentes liaisons parfaites ainsi elles ne dissipent pas de puissance ;
- puissance inter-effort due au ressort : $P_{3 \leftrightarrow 4} = \{V_{4/3}\} \otimes \{T_{3 \rightarrow 4}\} = \left\{ \begin{pmatrix} \vec{0} \\ \dot{y}(t) \vec{y}_0 \end{pmatrix} \right\}_K \otimes \left\{ \begin{pmatrix} -K_{\text{res}} y(t) \vec{y}_0 \\ \vec{0} \end{pmatrix} \right\}_K = -K_{\text{res}} \dot{y}(t) y(t)$ (ATTENTION à la définition de $y(t)$ pour bien gérer les signes...).

Q 11. Par composition des vecteurs vitesse en K entre les solides (4), (3) et (0), déterminer la relation entre $\dot{y}(t)$, $\omega_m(t)$, pas et λ .

On a par composition des vitesses $\vec{V}_{K,4/0} = \vec{V}_{K,4/3} + \vec{V}_{K,3/0}$.

Or $\vec{V}_{K,4/0} = \vec{0}$ car les solides (0) et (4) sont immobiles. De plus $\vec{V}_{K,4/3} = \dot{y}(t) \vec{y}_0$ par définition de $y(t)$. Enfin $\vec{V}_{K,3/0} = \vec{V}_{K,3/R_0}$ car (0) est immobile, de plus $\vec{V}_{K,3/R_0} = \vec{V}_{J,3/R_0}$ par mouvement de translation de 3/ R_0 et $\vec{V}_{J,3/R_0} = -\frac{pas}{2\pi} \lambda \omega_m(t) \vec{y}_0$ d'après la question 6.

Finalement $\boxed{\dot{y}(t) = \frac{pas}{2\pi} \lambda \omega_m(t)}$.

Q 12. En appliquant le théorème de l'énergie cinétique à l'ensemble Σ en mouvement par rapport à R_0 , montrer que l'équation de mouvement s'écrit sous la forme

$$I_{\text{eq}} \frac{d\omega_m(t)}{dt} = Q c_m(t) - c_r(t) \quad \text{avec} \quad c_r(t) = T y(t)$$

où l'on précisera les expressions de Q et T en fonction de η , K_{res} et K_{trans} .

Le Théorème de l'Énergie Cinétique appliqué à l'ensemble Σ s'écrit :

$$\frac{dE_c(\Sigma/R_0)}{dt} = P_{\text{ext}} + P_{\text{int}}$$

avec P_{ext} la somme des puissances extérieures (nulle ici) et $P_{\text{int}} = c_m(t) \omega_m(t) - (1 - \eta) c_m(t) \omega_m(t) - K_{\text{res}} \dot{y}(t) y(t)$ la somme des puissances intérieures.

Or $\dot{y}(t) y(t) = K_{\text{trans}} \omega_m(t) y(t)$. Finalement d'après les questions précédentes :

$$I_{\text{eq}} \omega_m(t) \omega_m(t) = \eta c_m(t) \omega_m(t) - K_{\text{res}} K_{\text{trans}} \omega_m(t) y(t)$$

En simplifiant par $\omega_m(t)$ de part et d'autre de l'équation, on obtient le résultat voulu avec $\boxed{Q = \eta}$ et

$$\boxed{T = K_{\text{res}} K_{\text{trans}}}$$

Q 13. Exprimer l'équation différentielle du mouvement liant le déplacement $y(t)$ à l'action mécanique $c_m(t)$ en fonction des paramètres de Q , T et K_{trans} . En déduire la valeur numérique du facteur d'amortissement et conclure quant à l'amortissement de la réponse indicielle.

On a la relation $\dot{y}(t) = K_{\text{trans}} \omega_m(t)$, on réécrit alors l'équation du mouvement :

$$\frac{I_{\text{eq}}}{K_{\text{trans}}} \ddot{y}(t) + K_{\text{res}} y(t) = \eta c_m(t)$$

C'est l'équation d'un oscillateur harmonique forcé non amorti de pulsation propre $\omega_0 = K_{\text{trans}} \sqrt{\frac{K_{\text{res}}}{I_{\text{eq}}}}$.

Remarque : c'est un système à la limite de l'instabilité (pôles à parties réelles nulles), d'où la remarque sur la nécessité d'un asservissement dans le sujet.

III.B – Étude de l'effort d'assistance nécessaire au soutien lombaire

Objectif

Proposer un modèle de connaissance de l'asservissement en force, le valider par comparaison avec une mesure sur un banc d'essai et vérifier les performances de l'actionneur linéaire sur un banc d'essai. Ce modèle permettra de valider une commande pour le cas spécifique étudié.

III.B.1) Mise en place d'un modèle de connaissance

Q 14. Après avoir transformé les équations précédentes dans le domaine de Laplace, exprimer les gains K_3 et K_5 en fonction de Q , k_c et T .

Dans le domaine de Laplace et à conditions de Heaviside :

- $U_I(p) = RI_m(p)$;
- $I_{eq}p\Omega_m(p) = Q \cdot C_m(p) - C_r(p)$;
- $C_r(p) = T \cdot Y(p)$;
- $C_m(p) = k_c I_m(p)$.

Ainsi on identifie dans le schéma-blocs : $K_3 = Q \cdot k_c$ et $K_5 = T$.

Q 15. Exprimer la fonction de transfert $H_6(p)$ en fonction de K_{trans} .

On a $\dot{y}(t) = K_{trans}\omega_m(t)$ soit dans le domaine de Laplace $\frac{K_{trans}}{p}\Omega_m(p) = Y(p)$. On identifie $H_6(p) = \frac{K_{trans}}{p}$.

Q 16. En supposant le système stable, déterminer l'expression de K_{adapt} en fonction de K_{trans} et K_{res} qui assure que l'écart en régime permanent ($\varepsilon(t \rightarrow \infty)$) soit nul si l'erreur en régime permanent est nulle.

On ramène la grande boucle de retour (celle avec le gain K_{capt}) sur la sortie $F(p)$, le gain sur la boucle de retour devient alors $\frac{K_{capt}}{K_{res}}$.

Ainsi pour valider la condition demandée il faut $K_{adapt} = \frac{K_{capt}}{K_{res}}$.

Remarque : erreur dans la question, il fallait demander K_{capt} , pas K_{trans} .

III.B.2) Réglage de la boucle d'asservissement de la vitesse angulaire du moteur

Q 17. Déterminer l'expression littérale de la phase de $H_{BOv}(i\omega)$. En déduire la valeur numérique de τ_i respectant les critères concepteur de la boucle de vitesse.

Dans le domaine de Laplace : $H_{BOv}(p) = \frac{K_i K_1 K_3}{I_{eq} R} \cdot \frac{1 + \tau_i p}{\tau_i p^2}$.

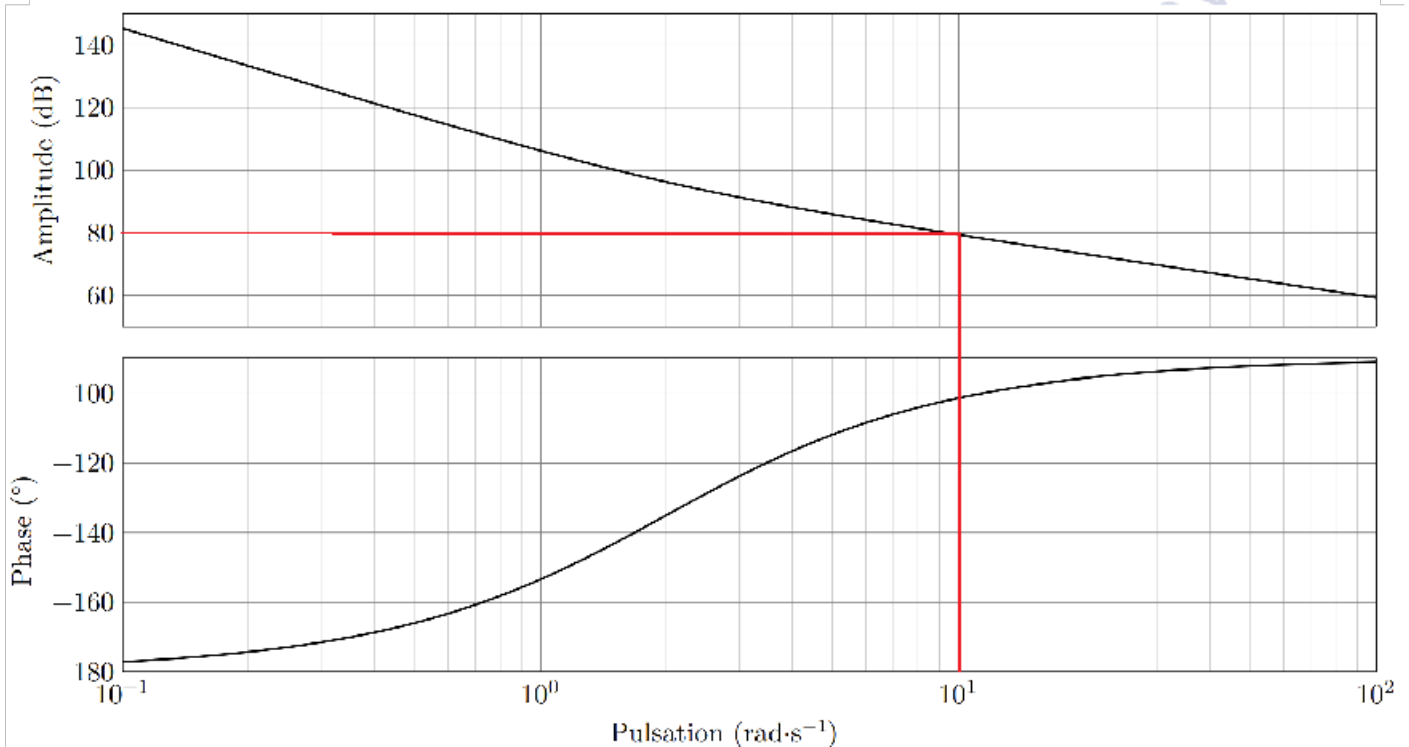
On calcule la phase en degrés dans le domaine fréquentiel : $\varphi(\omega) = \text{Arg}(H_{BOv}(i\omega)) = \arctan(\tau_i \omega) - 180$.

On veut une marge de phase $M_\varphi = 180 + \varphi(\omega_{0dB}) \geq 80^\circ$, autrement dit $\arctan(\tau_i \omega_{0dB}) \geq 80^\circ$. Par croissance de la fonction arctan on trouve $\tau_i \geq \frac{\tan(80)}{\omega_{0dB}} = 0,57 \text{ s}$.

Q 18. Déterminer la valeur numérique de K_i afin que la boucle d'asservissement de vitesse respecte les critères concepteur du tableau 4.

On veut une pulsation de coupure $\omega_{0dB} = 10 \text{ rad/s}$, autrement dit d'après le diagramme de gain il faut diminuer le gain de 80dB environ (voir ci-dessous). Alors :

$$20 \log(K_i) = -80 \quad \Leftrightarrow \quad K_i = 10^{-4} \text{ V.s/rad}$$



Tous les critères du tableau 4 sont respectés (marge de phase très légèrement inférieure à celle cherchée toutefois), le critère de précision et d'insensibilité à la perturbation l'étant forcément par la nature du correcteur PI.

Remarque : le choix de l'unité de K_i est motivé par la dimension (unitaire je pense) du gain K_1 .

III.B.3) Simplification du modèle de connaissance

Q 19. Déterminer les fonctions de transfert $H_8(p)$ et $H_9(p)$ en fonction de K_5 , I_{eq} et $H_6(p)$. Ne pas remplacer K_5 et $H_6(p)$ par les expressions trouvées précédemment.

On décale la boucle du capteur angulaire de vitesse d'un cran vers la droite, on trouve alors immédiatement

$$H_9(p) = \frac{1}{H_6(p)}.$$

On peut ensuite appliquer la formule de Black à la boucle qui possède la chaîne de retour K_5 , on trouve

$$\frac{Y(p)}{QC_m(p)} = \frac{\frac{H_6(p)}{I_{eq}p}}{1 + \frac{H_6(p)}{I_{eq}p}K_5}, \text{ par conséquent } \boxed{H_8(p) = \frac{H_6(p)}{1 + \frac{H_6(p)}{I_{eq}p}K_5}}.$$

Q 20. Déterminer l'expression du gain K_{10} en fonction de K_{capt} et de K_{res} .

On a déjà montré en question 16 que $K_{adapt} = \frac{K_{capt}}{K_{res}}$, en factorisant dans la figure 14 on trouve le $\boxed{K_{10} = \frac{K_{capt}}{K_{res}}}$ de la figure 15.

Remarque : l'écart $\varepsilon_f(p)$ de la figure 15 ne peut pas être le même que celui de la figure 14. En effet dans la figure 14 on a $\varepsilon_f(p) = \frac{K_{capt}}{K_{res}}(F_c(p) - F(p))$ et dans la figure 15 $\varepsilon_f(p) = F_c(p) - F(p)$. Le $\varepsilon_f(p)$ de la figure 15 aurait dû se trouver derrière le gain K_{10} .

Q 21. Déterminer la fonction de transfert $G(p)$ en fonction de $H_2(p)$, I_{eq} , $H_8(p)$, $H_9(p)$ et K_{res} . Ne pas remplacer $H_2(p)$, $H_8(p)$ et $H_9(p)$ par les expressions trouvées précédemment.

Par formule de Black sur la boucle interne on trouve $\boxed{G(p) = \frac{H_2(p)H_8(p)}{I_{eq}p + H_2(p)H_8(p)H_9(p)}}.$

III.B.4) Analyse des performances de l'asservissement en force développée par un actionneur linéaire

Q 22. Déterminer la valeur numérique limite de K_{cor} afin que la boucle d'asservissement de force respecte les critères de marge de phase et de gain du tableau 5.

La marge de gain est infinie ici car la phase n'atteint jamais -180° , regardons la marge de phase. Elle doit être de 60° minimum, autrement dit il faut que la pulsation de coupure se situe à la phase -120° au maximum. Il faut alors augmenter le gain de 75dB minimum pour satisfaire le critère de marge de phase. Donc :

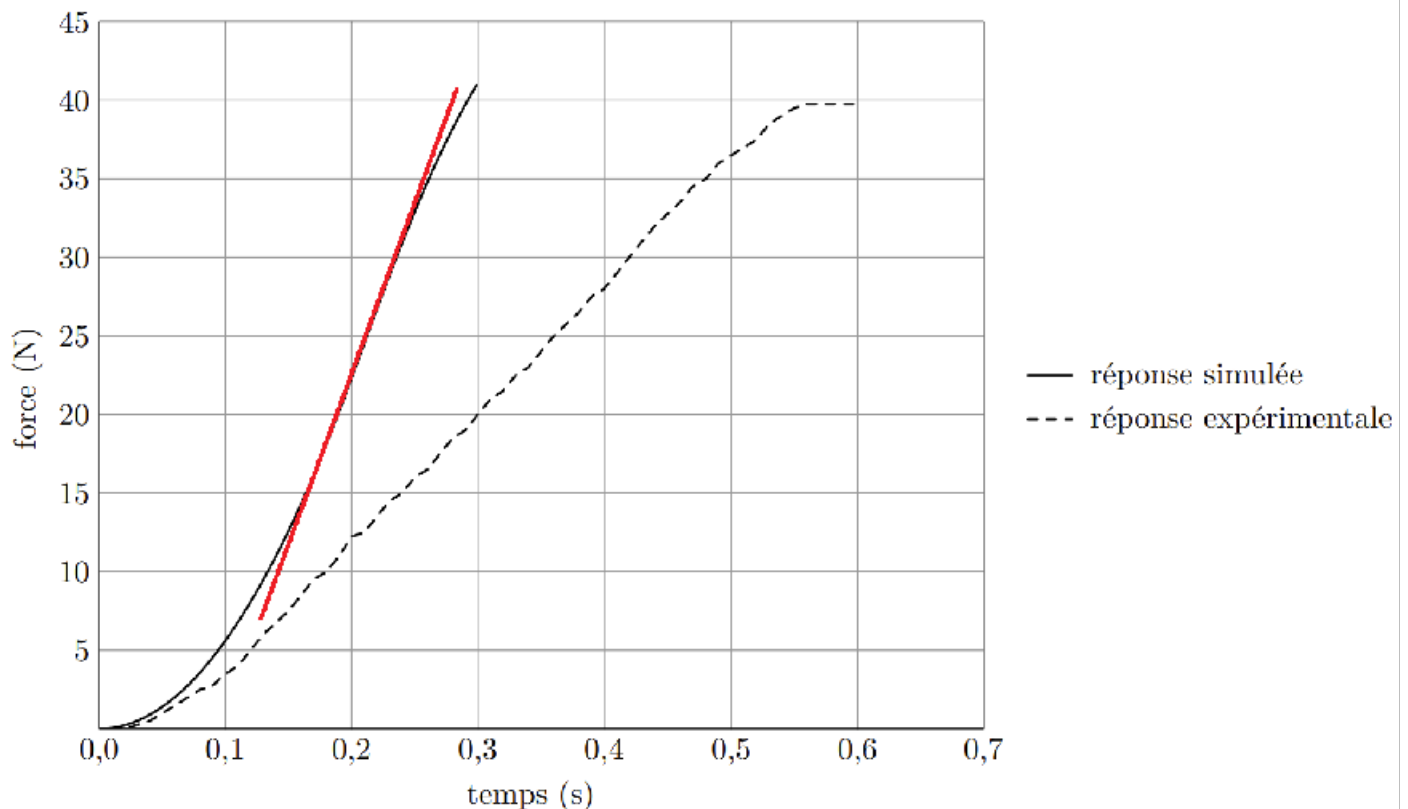
$$20 \log(K_{corr}) \geq +75 \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{K_{corr} \geq 10^{\frac{75}{20}} \approx 5624 \text{rad}/(\text{s.V})}$$

Q 23. Quel critère du tableau des exigences (tableau 5) n'est pas pris en compte dans le modèle de connaissance ? D'après la courbe expérimentale, ce critère est-il respecté par le système réel ?

Sur la figure 17 la simulation s'arrête quand le dépassement vaut 2,5%, soit 41N. On ne peut pas évaluer le temps de réponse du système puisque le régime stationnaire pour une consigne en échelon n'est pas atteint.

Sur le relevé expérimental ce temps de réponse est clairement inférieur à la valeur 1s demandée par le cahier des charges et il n'y a pas de dépassement (saturation à 40N). Le cahier des charges concernant le temps de réponse à 5% est validé expérimentalement.

La vitesse de montée expérimentale vaut environ $\frac{36 - 4}{0,5 - 0,1} = 80 \text{N/s} < 100 \text{N/s}$ donc le critère de vitesse de montée est aussi respecté. Toutefois la vitesse de montée maximale relevée sur la courbe de simulation vaut environ $\frac{41 - 7}{0,28 - 0,12} = 212 \text{N/s} > 100 \text{N/s}$, le critère de vitesse en montée n'est pas respecté lors de la simulation.



III.B.5) Amélioration du modèle. Mise en place d'une limitation en vitesse angulaire

- Cadre général de la résolution numérique d'un problème de Cauchy
- Problème de Cauchy lié à l'équation différentielle associée à $G(p)$

Q 24. Déterminer la fonction $G(E(t), \omega_c(t), t)$ associée à $G(p)$.

On a $\dot{E}(t) = \begin{pmatrix} \dot{f}(t) \\ \dot{f}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{f}(t) \\ -18\dot{f}(t) + 1,18\omega_c(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E[1](t) \\ -18E[1](t) + 1,18\omega_c(t) \end{pmatrix}$ avec $E[1](t) = \dot{f}(t)$ la deuxième coordonnée du vecteur $E(t)$. Alors $G(E(t), \omega_c(t), t) = \begin{pmatrix} E[1](t) \\ -18E[1](t) + 1,18\omega_c(t) \end{pmatrix}$.

Q 25. Écrire en langage Python la fonction $G(E, \omega_c, t)$ qui implémente la fonction $G(E(t), \omega_c(t), t)$. Cette fonction renvoie une liste de deux nombres à virgule flottante et prend en paramètres

- E , une liste de deux nombres représentant le vecteur d'états;
- ω_c , un nombre représentant la consigne de vitesse angulaire du moteur;
- t , un nombre représentant le temps.

```
def G(E, wc, t):
    G0 = E[1] # Première coordonnée
    G1 = -18*E[1] + 1.18*wc # Deuxième coordonnée
    return [G0, G1]
```

c) Problème de Cauchy lié au schéma-blocs de la figure 18 sans la limitation en vitesse angulaire

Q 26. Recopier et compléter le programme Python de la figure 19 implémentant la fonction `FBFsl` qui renvoie une liste de deux nombres et prend en paramètres

- `E`, une liste de deux nombres représentant le vecteur d'états;
- `t`, un nombre représentant le temps.

```
def FBFsl(E, t):
    Fcons = 40 # échelon de consigne de 40 N
    K10 = 0.0277 # adaptation
    Kcor = 5400 # gain du correcteur proportionnel
    wc = Kcor*K10*(Fcons - E[0]) # Vitesse angulaire de consigne
    return G(E, wc, t)
```

d) Problème de Cauchy lié au schéma-blocs de la figure 18 avec la limitation en vitesse angulaire

Q 27. Recopier et compléter le programme Python de la figure 20 implémentant la fonction `FBFa1` qui renvoie une liste de deux nombres et prend en compte la limitation de la consigne de vitesse angulaire du moteur.

```
def FBFsl(E, t):
    Fcons = 40 # échelon de consigne de 40 N
    K10 = 0.0277 # adaptation
    Kcor = 5400 # gain du correcteur proportionnel
    wcmax = 1250 # limitation en vitesse angulaire dans l'intervalle [-wcmax, wcmax]
    wc = Kcor*K10*(Fcons - E[0]) # Vitesse angulaire de consigne
    # Prise en compte de la saturation
    if wc > wcmax:
        wc = wcmax
    if wc < -wcmax:
        wc = -wcmax
    return G(E, wc, t)
```

e) Résolution du problème de Cauchy associé au modèle avec limitation en vitesse angulaire

Q 28. Conclure sur la capacité du correcteur proportionnel avec limitation de la vitesse angulaire à respecter le cahier des charges, en analysant l'écart entre les performances simulées (figure 21) et les performances attendues. Se limiter aux critères pertinents du tableau 5.

Le système est stable, ensuite :

- on a une valeur maximale de 41N environ, soit un dépassement de $\frac{41 - 40}{40} = 2,5\%$ (dépassement au maximum autorisé) ;
- le système est précis pour une entrée en échelon (critère Id1.2 validé) ;
- le temps de réponse à 5% est inférieur à 0,6s (< 1s), le critère de rapidité sur le temps de réponse est validé ;
- la pente maximale relevée sur la courbe vaut $\frac{36 - 4}{0,5 - 0,1} = 80\text{N/s} < 100\text{N/s}$, le critère de vitesse de montée est respecté.

Ainsi tous les items du cahier des charges sont validés.

IV Synthèse et ouverture de l'étude

- Objectif

Valider le modèle de connaissance, valider la commande optimisée et envisager un prolongement à l'étude.

IV.A – Validation du modèle de connaissance et de la commande optimisée

Q 29. Choisir un des écarts L-C, S-L ou S-C permettant de valider la commande optimisée. Effectuer l'analyse de cet écart. Il est attendu une argumentation rigoureuse s'appuyant sur les données et les références du texte. Les numéros de figure, de tableau, ou d'exigence sont, par exemple, des références utilisables.

Dans ce sujet, un banc d'essais a été monté pour réaliser des expériences et une modélisation (figure 11) basée sur ce banc d'essais a été proposée afin de prévoir les performances du système réel. Ainsi c'est l'écart S-L qui doit être analysé.

Sur la figure 22 on observe :

- Consigne de 10N : il n'y a pas de dépassement ni en simulation ni en expérimentation. L'erreur statique est nulle dans les 2 cas. La vitesse de montée est plus lente lors de l'expérimentation et le temps de réponse à 5% est plus grand (0,25s contre moins de 0,2s pour la simulation). Les frottements secs ne sont donc pas négligeables pour cette consigne, or ils n'ont pas été pris en compte dans la modélisation de la figure 11. Les exigences de dépassement, rapidité et précision du tableau 5 sont respectées.
- Consigne de 20N : un très léger dépassement est visible en simulation mais inférieur à 2,5% (maximum autorisé par l'exigence de stabilité du tableau 5), il n'y a pas de dépassement lors de l'expérience. Les observations sont similaires à celles faites pour le cas de la consigne de 10N mais le système réel met toujours un peu plus de temps à atteindre sa vitesse de montée maximale (les courbes ne se superposent bien qu'au delà de 1,15s sur la figure 22). Le frottement sec joue encore pour cette valeur de consigne.
- Consignes de 30N et 40N : cette fois les courbes expérimentales et de simulations se superposent bien au bruit de mesure près. Le frottement sec a un effet négligeable et toutes les exigences du tableau 5 sont respectées.

Globalement la modélisation est fidèle au système réel. Afin d'améliorer le modèle on pourrait envisager de prendre en compte les effets des frottements présents dans le banc d'essais.

IV.B – Étude du système perturbé

Q 30. Quelle est l'unité de $y_{\text{pert}}(t)$? Que peut représenter cette perturbation dans le contexte de l'exosquelette lombaire ? En se référant à la problématique du sujet, quel est l'intérêt d'introduire cette perturbation dans le modèle ?

$y_{\text{pert}}(t)$ est homogène à une longueur en mètres. Dans le cadre de l'exosquelette lombaire, qui s'assimile à 2 ceintures liées par des actionneurs verticaux, on peut très bien imaginer des glissements entre la ceinture et l'utilisateur ce qui peut générer des perturbations de déplacement. Il est donc nécessaire de corriger les éventuels défauts de positionnement des ceintures afin de maintenir une pression lombaire au niveau prévu par le commanditaire.

Q 31. Analyser la courbe de simulation de la figure 26 et conclure au regard de la problématique du sujet.

La perturbation est une fonction rampe qui démarre à partir de $t = 0,8s$ et devient constante à partir de $t = 2s$. Si on note $u(t)$ la fonction de Heaviside on a : $y_{\text{pert}}(t) = Y_0(t - 0,8)u(t - 0,8) - Y_0(t - 2)u(t - 2)$.

Dans le domaine de Laplace la perturbation est en $\frac{1}{p^2}$ sur la partie rampe et en $\frac{1}{p}$ à partir de $t = 0,2s$. Or dans le schéma-blocs de la figure 24 on a une double intégration en amont de la perturbation grâce aux blocs $\frac{1}{I_{\text{eq}}p}$ et au bloc $H_6(p)$ identifié en question 15. Le système est alors insensible à une perturbation en rampe et à une perturbation constante.

Cela explique les 2 "bosses" qui s'écrasent sur la figure 26.

Q 32. Le banc d'essai équipé d'un actionneur linéaire, dans la configuration étudiée dans ce sujet, permet-il d'analyser l'écart S-L ?

On a déjà étudié l'écart S-L en question 29 puisque le modèle se basait sur le système du laboratoire. Toutefois le système du laboratoire est à l'horizontale et on a supposé en question 30 que la perturbation venait de défauts de positionnement de l'exosquelette sur l'utilisateur (donc avec les actionneurs à la verticale).

Enfin la proposition de perturbation de la figure 25 n'est peut-être pas réaliste. Il n'est pas possible d'évaluer un écart S-L quant à un défaut de positionnement.