

Proposition de corrigé

Concours : Concours Commun INP

Année : 2022

Filière : PSI

Épreuve : Modélisation

Ceci est une proposition de corrigé des concours de CPGE, réalisée bénévolement par des enseignants de Sciences Industrielles de l'Ingénieur et d'Informatique, membres de l'[UPSTI](https://www.upsti.fr) (Union des Professeurs de Sciences et Techniques Industrielles), et publiée sur le site de l'association :

<https://www.upsti.fr/espace-etudiants/annales-de-concours>

A l'attention des étudiants

Ce document vous apportera des éléments de corrections pour le sujet traité, mais n'est ni un corrigé officiel du concours, ni un corrigé détaillé ou exhaustif de l'épreuve en question.

L'UPSTI ne répondra pas directement aux questions que peuvent soulever ces corrigés : nous vous invitons à vous rapprocher de vos enseignants si vous souhaitez des compléments d'information, et à vous adresser à eux pour nous faire remonter vos éventuelles remarques.

Licence et Copyright

Toute représentation ou reproduction (même partielle) de ce document faite sans l'accord de l'UPSTI est **interdite**. Seuls le téléchargement et la copie privée à usage personnel sont autorisés (protection au titre des [droits d'auteur](#)).

En cas de doute, n'hésitez pas à nous contacter à : corrigesconcours@upsti.fr.

Informez-vous !

Retrouvez plus d'information sur les [Sciences de l'Ingénieur](#), l'[orientation](#), les [Grandes Ecoles](#) ainsi que sur les [Olympiades de Sciences de l'Ingénieur](#) et sur les [Sciences de l'Ingénieur au Féminin](#) sur notre site : www.upsti.fr

L'équipe UPSTI

Modélisation de la prévention des tsunamis

Corrigé UPSTI

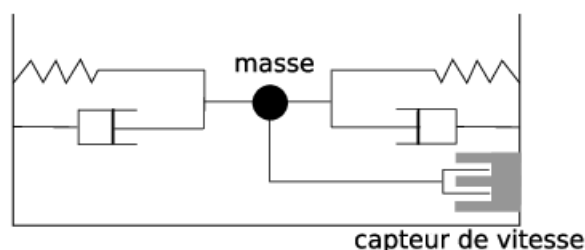
LES SISMOMÈTRES

1 Principe de fonctionnement des sismomètre

Objectif

L'objectif de cette sous-partie est d'appréhender le fonctionnement des sismomètres verticaux et horizontaux.

Question 1 La modélisation proposée sur la **figure 3** permet de mesurer des vibrations verticales du sol. Sur le même principe, schématiser, un modèle permettant de mesurer des vibrations horizontales.



2 Capteur de vitesse

Objectif

L'objectif de cette sous-partie est d'évaluer la bande-passante du capteur de vitesse pour que ce dernier respecte le critère d'exigence (**tableau 1**).

Question 2 Rappeler l'expression de la force élémentaire $\delta \vec{F}_{Lap}$ dite de Laplace s'exerçant sur un tronçon conducteur de longueur dl parcourue par un courant électrique d'intensité i plongé dans un champ magnétique $\vec{B}$.

$$\delta \vec{F}_{Lap} = i d\vec{l} \wedge \vec{B}$$

Question 3 En déduire la résultante $\vec{F}_{Lap}$ de l'action mécanique due aux forces de Laplace s'exerçant sur la bobine en fonction de B , de i et de la longueur du bobinage l .

$$\vec{F}_{Lap} = n \int_0^{2\pi} i R d\theta \vec{u}_\theta \wedge B \vec{u}_r = -2\pi n R i B \vec{u}_z$$

avec n nombre de spires

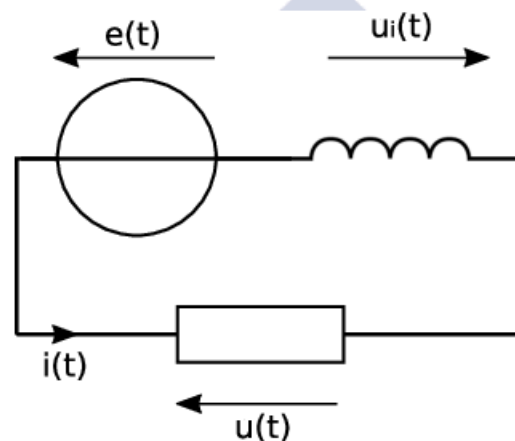
or $l = 2\pi n R$ donc $\vec{F}_{Lap} = -i l B \vec{u}_z$

Question 4 Le mouvement de la bobine dans le champ magnétique induit une force-électromotrice $e(t)$ fournissant une puissance opposée à la puissance mécanique développée par $\vec{F}_{Lap}$. Interpréter physiquement ce résultat, puis donner l'expression de $e(t)$ en fonction de B , l et de $v_b(t)$.

Ce résultat peut être interprété grâce à la loi de Lenz-Faraday qui exprime l'apparition d'une force électromotrice lorsqu'un circuit électrique est en mouvement dans un champ magnétique.

$$e(t) = l B v_B(t)$$

Question 5 Représenter le schéma électrique équivalent du capteur de déplacement.



Question 6 Déterminer la relation différentielle liant $u(t)$ à $v_b(t)$.

$$u(t) = e(t) - L \frac{di(t)}{dt}$$

or $i(t) = \frac{u(t)}{R_S}$

$$u(t) + \frac{L}{R_S} \frac{du(t)}{dt} = l B v_B(t)$$

Question 7 Pour $L = 100$ mH et en tenant compte du critère d'exigence en fréquence, indiquer la valeur minimale de R_S pour laquelle la tension u peut être considérée comme proportionnelle à la vitesse v_b permettant à ce dispositif de constituer un capteur de vitesse instantanée lors d'un séisme. On admettra ce point par la suite.

Il faut que $L.f \ll R_S$ et que donc $R_S \gg 0,1 \Omega$

Question 8 Dédurre de la question précédente que $\vec{F}_{Lap} = -\lambda_e \vec{v}_b$. Exprimer λ_e en fonction de B , l et de R_S . L'expression de $\vec{F}_{Lap}$ est-elle en accord avec la loi de modération de Lenz ?

$$\overrightarrow{F_{Lap}} = -ilB\vec{u}_z = -\frac{u}{R_S}lB\vec{u}_z = -\frac{v_B}{R_S}(lB)^2\vec{u}_z$$

Nous avons donc $\lambda_e = \frac{(lB)^2}{R_S}$.

Cette expression est en accord avec la loi de modération de Lenz car cette loi, nous indique que la force générée par induction s'oppose à la cause qui lui donne naissance, ici la vitesse de la bobine.

3 Modèle de connaissance d'un sismomètre vertical

Objectif

L'objectif de cette sous-partie est d'établir le modèle de connaissance d'un sismomètre vertical et d'établir le lien entre ses grandeurs caractéristiques et celles des séismes.

Question 9 Isoler la masse ponctuelle M et effectuer un bilan des actions mécaniques extérieures dans le cas où le sismomètre est au repos. Écrire le théorème de la résultante statique suivant $\vec{u}_z$ et en déduire la relation à l'équilibre entre z_0 , z_v , k , M et de g .

On isole M

BAME :

- action mécanique du ressort, $F_r\vec{u}_z$
- action de la gravité sur la masse, $-Mg\vec{u}_z$

TRS projeté sur $\vec{u}_z$:

$$\begin{aligned} F_r - Mg &= 0 \\ k(z_v - z_0) - Mg &= 0 \end{aligned}$$

Question 10 Au cours du séisme, déterminer l'expression de l'accélération de la masse M dans le référentiel galiléen $\mathcal{R}$ en fonction des longueurs pertinentes.

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA_S} + \overrightarrow{A_S A} + \overrightarrow{AM}$$

$$\overrightarrow{OM} = A_{Sy}\vec{u}_y + Z_s(t)\vec{u}_z + h\vec{u}_z - L(t)\vec{u}_z$$

or $z(t) = h - L(t)$

$$\overrightarrow{OM} = A_{Sy}\vec{u}_y + Z_s(t)\vec{u}_z + z(t)\vec{u}_z$$

donc

$$\frac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2} = \left(\frac{d^2Z_s(t)}{dt^2} + \frac{d^2z(t)}{dt^2} \right) \vec{u}_z$$

Question 11 Isoler la masse ponctuelle M et effectuer un bilan des actions mécaniques extérieures au cours d'un séisme. Établir l'équation différentielle vérifiée par $dz(t)$ lors de la secousse sismique. Simplifier l'expression pour obtenir le résultat uniquement en fonction de $dz(t)$, de ses dérivées, de $\frac{d^2Z_s(t)}{dt^2}$ et des constantes du problème k , λ_e , λ_m et M .

On isole M

BAME :

- action mécanique du ressort, $F_r\vec{u}_z$
- action de la gravité sur la masse, $-Mg\vec{u}_z$

- action mécanique de l'amortisseur, $-F_a \vec{u}_z$
- action mécanique du capteur, $-F_{Lap} \vec{u}_z$

TRD projeté sur $\vec{u}_z$:

$$M \left(\frac{d^2 Z_s(t)}{dt^2} + \frac{d^2 z(t)}{dt^2} \right) = F_r - Mg - F_a - F_{Lap}$$

$$M \left(\frac{d^2 Z_s(t)}{dt^2} + \frac{d^2 z(t)}{dt^2} \right) = k(z_v - z(t)) - Mg - \lambda_m \frac{dz(t)}{dt} - \lambda_e \frac{dz(t)}{dt}$$

$$M \left(\frac{d^2 Z_s(t)}{dt^2} + \frac{d^2 z(t)}{dt^2} \right) = k(z_v - z_0 + z_0 - z(t)) - Mg - \lambda_m \frac{dz(t)}{dt} - \lambda_e \frac{dz(t)}{dt}$$

$$M \left(\frac{d^2 Z_s(t)}{dt^2} + \frac{d^2 z(t)}{dt^2} \right) = k(z_v - z_0) + k(z_0 - z(t)) - Mg - \lambda_m \frac{dz(t)}{dt} - \lambda_e \frac{dz(t)}{dt}$$

$$M \left(\frac{d^2 Z_s(t)}{dt^2} + \frac{d^2 z(t)}{dt^2} \right) = Mg - k dz(t) - Mg - \lambda_m \frac{dz(t)}{dt} - \lambda_e \frac{dz(t)}{dt}$$

or $z(t) = z_0 + dz(t)$ donc $\frac{dz(t)}{dt} = \frac{d(dz(t))}{dt}$

$$M \frac{d^2 Z_s(t)}{dt^2} = -M \frac{d^2(dz(t))}{dt^2} - k dz(t) - \lambda_m \frac{d(dz(t))}{dt} - \lambda_e \frac{d(dz(t))}{dt}$$

Question 12 Déterminer, dans les conditions d'Heaviside, la fonction de transfert $H(p) = \frac{D_z(p)}{Z_s(p)}$ et la mettre sous forme canonique. Exprimer la pulsation propre ω_0 et le coefficient d'amortissement ξ en fonction de M , λ_e , λ_m et de k .

$$Mp^2 Z_s(p) = - \left(Mp^2 + (\lambda_m + \lambda_e)p + k \right) D_z(p)$$

$$\frac{D_z(p)}{Z_s(p)} = \frac{-\frac{M}{k} p^2}{\frac{M}{k} p^2 + \frac{(\lambda_m + \lambda_e)}{k} p + 1}$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{M}} \text{ et } \xi = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{kM}} (\lambda_m + \lambda_e)$$

Question 13 Déterminer le module et l'argument de la fonction de transfert harmonique $\underline{H}(j\omega)$. Distinguer les résultats en fonction de la valeur du ratio $\frac{\omega}{\omega_0}$.

$$|\underline{H}(j\omega)| = \frac{\frac{\omega^2}{\omega_0^2}}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2 + 4\xi^2 \frac{\omega^2}{\omega_0^2}}}$$

$$\arg(\underline{H}(j\omega)) = -\arg\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} + 2\xi \frac{\omega}{\omega_0} j\right)$$

Si $\frac{\omega}{\omega_0} \ll 1$

$$|\underline{H}(j\omega)| \approx \frac{\omega^2}{\omega_0^2}$$

$$\arg(\underline{H}(j\omega)) \approx -\arg(1) = 0$$

Si $\frac{\omega}{\omega_0} \gg 1$

$$|\underline{H}(j\omega)| \approx 1$$

$$\arg(\underline{H}(j\omega)) \approx -\arg\left(-\frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right) = -\pi$$

Si $\frac{\omega}{\omega_0} = 1$

$$|\underline{H}(j\omega)| = \frac{1}{2\xi}$$

$$\arg(\underline{H}(j\omega)) = -\arg(2\xi j) = -\frac{\pi}{2}$$

Question 14 En régime permanent, la réponse du sismomètre est une fonction de forme similaire à l'excitation induite par le séisme. Donner la forme de la réponse $dz(t)$ en fonction des caractéristiques du sismomètre (ξ, ω_0) et des caractéristiques du séisme (Z_S, ω) .

$$dz(t) = |\underline{H}(j\omega)| Z_S \cos(\omega t + \arg(\underline{H}(j\omega)))$$

donc

$$dz(t) = \frac{\frac{\omega^2}{\omega_0^2}}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2 + 4\xi^2 \frac{\omega^2}{\omega_0^2}}} Z_S \cos\left(\omega t - \arg\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} + 2\xi \frac{\omega}{\omega_0} j\right)\right)$$

Question 15 Expliquer, de manière succincte, pourquoi l'évolution du gain et de la phase donnée sur la figure 6 correspond au modèle du sismomètre proposé précédemment.

Les résultats de la question 13 permettent de voir que :

- pour les petites pulsations, la courbe de gain admet une asymptote de 40 dB/dec et la courbe de phase une asymptote de pente nulle.
- pour les grandes pulsations, la courbe de gain possède une asymptote de pente nulle et la courbe de phase une asymptote en $-\pi$
- tandis que pour $\omega = \omega_0$, la phase vaut $-\frac{\pi}{2}$ et le gain vaut $20 \log(\frac{1}{2\xi})$

Question 16 L'amplitude mesurée doit être identique à l'amplitude du séisme sur la plage de fréquence correspondant à l'exigence définie dans le **tableau 1**. Comment faut-il choisir la pulsation propre ω_0 par rapport à la pulsation ω de la secousse sismique ? Commenter physiquement ce résultat.

Pour que les amplitudes soient identiques, il faut que $|\underline{H}(j\omega)| = 1$. Sur la courbe 6, nous voyons qu'il faut prendre ω_0 tel que $\omega_0 < \frac{\omega}{10}$.

Commentaire

Question 17 Quel est le meilleur choix pour le coefficient d'amortissement ξ pour que la réponse temporelle du sismomètre à un échelon soit la plus rapide sans dépassement ? A partir des données de la **figure 6**, évaluer la valeur minimale de ω_0 correspondante en fonction de la fréquence des ondes sismiques à mesurer.

$\xi = 1$ permet la réponse la plus rapide sans dépassement.

Les fréquences à mesurer sont comprises dans la plage de fréquence de 0,1 à 100 Hz, et donc de pulsations comprises entre $0, 2\pi$ et $200\pi \text{ rad.s}^{-1}$.

Donc $\omega_{0\min} = 0,02\pi \text{ rad.s}^{-1}$.

Question 18 Conclure sur les fréquences de séisme que ce sismomètre est capable de mesurer. L'exigence du cahier des charges est-elle vérifiée ?

$\omega_{\min} = 1 \text{ rad.s}^{-1}$ donc $f_{\min} = 0,16 \text{ Hz}$.

Le cahier des charges n'est pas vérifié car les petites fréquences ne sont pas mesurées.

LOCALISATION DU SÉISME

Objectif

L'objectif de cette partie est de modéliser la localisation de l'épicentre du séisme à partir de l'estimation des distances entre chaque station et le séisme.

Question 19 Dans le cas donné sur la **figure 8a**, écrire, de manière littérale, les équations de chaque cercle.

$$(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 = r_1^2 \quad (1)$$

$$(x - x_2)^2 + (y - y_2)^2 = r_2^2 \quad (2)$$

$$(x - x_3)^2 + (y - y_3)^2 = r_3^2 \quad (3)$$

Question 20 Développer les équations des cercles des stations 1 et 2. Effectuer la différence terme à terme et en déduire l'équation de la droite d_{12} de la **figure 8b**. Effectuer l'application numérique.

$$x^2 - 2xx_1 + x_1^2 + y^2 - 2yy_1 + y_1^2 = r_1^2$$

$$x^2 - 2xx_2 + x_2^2 + y^2 - 2yy_2 + y_2^2 = r_2^2$$

et

$$x(2x_2 - 2x_1) + y(2y_2 - 2y_1) = r_1^2 - r_2^2 - x_1^2 - y_1^2 + x_2^2 + y_2^2$$

La droite d_{12} est donc d'équation :

$$y = \frac{x_1 - x_2}{y_2 - y_1} x + \frac{r_1^2 - r_2^2 - x_1^2 - y_1^2 + x_2^2 + y_2^2}{2y_2 - 2y_1}$$

$$y = \frac{2 - 5}{10 - 5} x + \frac{25 - 16 - 4 - 25 + 25 + 100}{2 \times 10 - 2 \times 5} = -0,6x + 10,5$$

Question 21 Dans le cas donné sur la **figure 8b**, écrire, de manière littérale, les équations de chaque droite. En déduire le système d'équations linéaire permettant de localiser l'épicentre et le mettre sous la forme $AX = R$ avec A une matrice 3×2 , X le vecteur donnant les coordonnées de l'épicentre et R un vecteur de 3 composantes.

La droite d_{12} est d'équation :

$$(2x_2 - 2x_1)x + (2y_2 - 2y_1)y = r_1^2 - r_2^2 - x_1^2 - y_1^2 + x_2^2 + y_2^2$$

La droite d_{13} est donc d'équation :

$$(2x_3 - 2x_1)x + (2y_3 - 2y_1)y = r_1^2 - r_3^2 - x_1^2 - y_1^2 + x_3^2 + y_3^2$$

La droite d_{23} est donc d'équation :

$$(2x_3 - 2x_2)x + (2y_3 - 2y_2)y = r_2^2 - r_3^2 - x_2^2 - y_2^2 + x_3^2 + y_3^2$$

Ce qui nous donne sous forme matricielle :

$$\begin{pmatrix} (2x_2 - 2x_1) & (2y_2 - 2y_1) \\ (2x_3 - 2x_1) & (2y_3 - 2y_1) \\ (2x_3 - 2x_2) & (2y_3 - 2y_2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_e \\ y_e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_1^2 - r_2^2 - x_1^2 - y_1^2 + x_2^2 + y_2^2 \\ r_1^2 - r_3^2 - x_1^2 - y_1^2 + x_3^2 + y_3^2 \\ r_2^2 - r_3^2 - x_2^2 - y_2^2 + x_3^2 + y_3^2 \end{pmatrix}$$

$$\text{donc } A = \begin{pmatrix} (2x_2 - 2x_1) & (2y_2 - 2y_1) \\ (2x_3 - 2x_1) & (2y_3 - 2y_1) \\ (2x_3 - 2x_2) & (2y_3 - 2y_2) \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} x_e \\ y_e \end{pmatrix}, \text{ et } R = \begin{pmatrix} r_1^2 - r_2^2 - x_1^2 - y_1^2 + x_2^2 + y_2^2 \\ r_1^2 - r_3^2 - x_1^2 - y_1^2 + x_3^2 + y_3^2 \\ r_2^2 - r_3^2 - x_2^2 - y_2^2 + x_3^2 + y_3^2 \end{pmatrix}$$

Question 22 Évaluer le rang du système précédent. Simplifier le système matriciel précédent en le mettant sous la forme $A'X = R$ où la nouvelle matrice A' est carrée de dimension 2×2 .

La troisième ligne de la matrice A étant une combinaison linéaire des deux précédente, la matrice est de rang 2.

On peut alors mettre le système sous la forme $A'X = R'$

$$\text{avec } A' = \begin{pmatrix} (2x_2 - 2x_1) & (2y_2 - 2y_1) \\ (2x_3 - 2x_1) & (2y_3 - 2y_1) \end{pmatrix}, \text{ et } R' = \begin{pmatrix} r_1^2 - r_2^2 - x_1^2 - y_1^2 + x_2^2 + y_2^2 \\ r_1^2 - r_3^2 - x_1^2 - y_1^2 + x_3^2 + y_3^2 \end{pmatrix}$$

Question 23 Parmi les valeurs $\{-10000, -1000, -1, 1, 1000, 10000\}$, lesquelles sont plausibles et laquelle entraînera le meilleur conditionnement de la matrice A' ? Justifier.

Une norme étant par définition toujours positive, nous pouvons écarter les valeurs -10000, -1000 et -1. Pour qu'une faible variation de R n'entraîne qu'une faible variation de X , la valeur idéale est 1.

Question 24 A partir du système précédemment défini, expliquer comment obtenir la localisation de l'épicentre

$$AX = R$$

$$A^+AX = A^+R$$

$$({}^tAA)^{-1} \cdot {}^tAAX = A^+R$$

or $({}^tAA)^{-1} \cdot {}^tAA = I$ donc

$$X = A^+R$$

PROPAGATION D'UN TSUNAMI

Objectif

L'objectif de cette partie est de modéliser la propagation du tsunami et d'estimer son temps de propagation à partir de l'épicentre.

Question 25 Justifier, à partir des ordres de grandeur proposés, qu'il est difficile de détecter un tsunami en haute mer.

L'amplitude du tsunami est très petite devant sa longueur d'onde, $\zeta_{max} \ll \lambda_T$. Ce qui rend difficile la visualisation de la vague.

Question 26 Justifier que le champ des vitesses vérifie $\vec{v} = v_x(x, z, t)\vec{u}_x + v_z(x, z, t)\vec{u}_z$

Par invariance du champ suivant y , nous pouvons écrire que $\vec{v} = v_x(x, z, t)\vec{u}_x + v_z(x, z, t)\vec{u}_z$

Question 27 Les trajectoires des particules de fluide au passage d'une onde sinusoïdale de longueur d'onde λ pour différentes profondeurs d'eau h sont photographiées **figure 10**. L'évolution de l'allure des trajectoires des particules de fluide pour différentes valeurs du rapport $\frac{h}{\lambda}$ est présentée **figure 11**. A la limite $\frac{h}{\lambda} \ll 1$ justifier que $\vec{v} \approx v_x(x, t)\vec{u}_x$.

Lorsque $\frac{h}{\lambda} \ll 1$, la trajectoire de chaque particule quelque soit sa profondeur est proche d'une droite d'équation $z = \text{constante}$ et donc $\vec{v} \approx v_x(x, t)\vec{u}_x$.

Question 28 En généralisant l'expression du champ des vitesses obtenue à la **Q26**, simplifier l'équation (1), puis la projeter selon les axes x et z .

On exploite l'équation (1) :

$$\frac{\partial v_x(x, z, t)}{\partial t} \vec{u}_x = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P(x, z, t)}{\partial x} \vec{u}_x - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P(x, z, t)}{\partial z} \vec{u}_z - g \vec{u}_z$$

En projection sur x :

$$\frac{\partial v_x(x, z, t)}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P(x, z, t)}{\partial x}$$

En projection sur z :

$$0 = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P(x, z, t)}{\partial z} - g$$

Question 29 En déduire que le champ de pression est donné par $P(x, z, t) = P_0 + \rho g(h + \zeta(x, t) - z)$ où P_0 est la pression atmosphérique. On supposera pour cela que la pression est continue à l'interface air-eau.

On exploite la projection sur z :

$$\frac{\partial P(x, z, t)}{\partial z} = -\rho g$$

donc $P(x, z, t) = -\rho g z + c(x, t)$ avec $c(x, t)$ indépendant de z .

Les conditions aux limites nous impose que $\forall x$ et $\forall t : P(x, z, t) = P_0$ lorsque $z = h + \zeta(x, t)$.

Donc, $c(x, t) = P_0 + \rho g(h + \zeta(x, t))$ et $P(x, z, t) = P_0 + \rho g(h + \zeta(x, t) - z)$

Question 30 En réalisant un bilan de masse, entre t et $t + dt$, pour la tranche de fluide comprise entre x et $x + dx$, de hauteur $h + \zeta(x, t)$ à l'instant t et de largeur arbitraire L_y , montrer que $\frac{\partial \zeta}{\partial t} \approx -h \frac{\partial v_x}{\partial x}$. On mettra à profit le fait qu'une augmentation de la masse d'eau comprise entre x et $x + dx$ se traduit par une augmentation de ζ . On exprimera de deux manières la masse δm_e entrant (algébriquement) dans la tranche de fluide, entre t et $t + dt$, et on précisera l'approximation effectuée.

$$\begin{aligned} \delta m_e &= \rho v_x(x, t)(h + \zeta(x, t)).L_y.dt - \rho v_x(x + dx, t)(h + \zeta(x, t)).L_y.dt \\ &= \rho(h + \zeta(x, t + dt)).L_y.dx - \rho(h + \zeta(x, t)).L_y.dx \end{aligned}$$

$$(v_x(x, t) - v_x(x + dx, t))(h + \zeta(x, t)).dt = (\zeta(x, t + dt) - \zeta(x, t)).dx$$

En supposant $\zeta(x, t) \ll h$, on obtient l'équation proposée $\frac{\partial \zeta}{\partial t} \approx -h \frac{\partial v_x}{\partial x}$

Question 31 Finalement, montrer que :

$$\frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2}(x, t) - c^2 \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2}(x, t) = 0$$

où $c = \sqrt{gh}$. Comment s'appelle ce type d'équation ?

On dérive selon t l'équation précédemment obtenue : $\frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} = -h \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} \right)$

Or d'après la question 28 :

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial v_x(x, z, t)}{\partial x} \right) = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial^2 P(x, z, t)}{\partial x^2} = -\frac{\rho g}{\rho} \frac{\partial^2 \zeta(x, z, t)}{\partial x^2}$$

donc

$$\frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} = hg \frac{\partial^2 \zeta(x, z, t)}{\partial x^2}$$

en posant $c = \sqrt{hg}$, on obtient l'équation proposée. C'est une équation de d'Alembert à 1 dimension (équation de propagation d'onde plane)

Question 32 La propagation des ondes vérifiant cette relation est-elle dispersive lorsque h ne varie pas ?

La propagation de ces ondes n'est pas dispersive lorsque c (et donc ici h) ne varie pas.

Question 33 D'après les figures 13 et 14, le modèle rend-il bien compte d'une augmentation de l'amplitude au voisinage des côtes ? Le modèle rend-il bien compte d'une diminution de la célérité des ondes se propageant dans l'eau lorsque la profondeur diminue ? L'allure des courbes de la figure 14 est-elle compatible avec votre réponse à la question Q32. Justifier.

En regardant les figures 12 et 13, nous pouvons constater que l'amplitude augmente lorsque h diminue et donc au voisinage des côtes.

D'autre part, l'écart (en km) entre deux pics espacés du même intervalle de temps diminue, ce qui implique une diminution de la célérité des ondes.

Pour une valeur de h ne variant pas, on peut voir que le paquet d'ondes n'est pas déformé (pas d'étalement au cours du temps), la propagation n'est donc pas dispersive, ce qui est cohérent avec la réponse à la question 32

Question 34 Justifier que le temps de propagation τ_p de l'épicentre jusqu'à un point d'abscisse d est donné par $\tau_p = \int_0^d \frac{dx}{\sqrt{gh(x)}}$.

$$c(x, t) = \frac{dx}{dt}$$

$$\Rightarrow dt = \frac{dx}{c(x, t)}$$

$$\Rightarrow \int_0^{\tau_p} dt = \int_0^d \frac{dx}{c(x, t)}$$

$$\Rightarrow \tau_p = \int_0^d \frac{dx}{c(x, t)}$$

Question 35 Écrire une fonction Python *Tpropag* prenant la liste *dist* comme argument et renvoyant, en utilisant la méthode des rectangles, le temps de propagation, exprimé en heure, du tsunami entre M_0 et M_n .

```
1 import numpy as np
2 tau=0
3 def Tpropag(dist)
4     for i in range(length(dist)-1)
5         tau=tau+dist[i][1]/np.sqrt(g*dist[i][2])*1000/60
6     print(tau)
```

Question 36 L'appel de la fonction T_{propag} appliqué au cas de la propagation du tsunami de mars 2011 de son épicentre au large du Japon à la bouée D.A.R.T. n°51407 renvoie 7,66. En se fixant une marge égale à 1 % du temps de propagation réel, ce résultat est-il acceptable ?

On lit sur la figure 15 que le temps de propagation est de 7,54 h.

Le résultat trouvé par T_{propag} devrait donc être au maximum de 7,62, le résultat n'est donc pas acceptable.

Question 37 La mise en place d'un réseau de sismomètres et de bouées D.A.R.T. permet-elle de prévenir les populations ?

Un réseau de sismomètres et de bouées permet de voir la célérité et l'amplitude de la propagation d'une perturbation à la surface de l'eau et donc d'anticiper le moment d'arrivée sur les cotes afin de prévenir les populations.

