

Proposition de corrigé

Concours : Concours Commun Mines-Ponts

Année : 2024

Filière : MP

Épreuve : Sciences Industrielles pour l'Ingénieur

Ceci est une proposition de corrigé des concours de CPGE, réalisée bénévolement par des enseignants de Sciences Industrielles de l'Ingénieur et d'Informatique, membres de l'[UPSTI](https://www.upsti.fr) (Union des Professeurs de Sciences et Techniques Industrielles), et publiée sur le site de l'association :

<https://www.upsti.fr/espace-etudiants/annales-de-concours>

A l'attention des étudiants

Ce document vous apportera des éléments de corrections pour le sujet traité, mais n'est ni un corrigé officiel du concours, ni un corrigé détaillé ou exhaustif de l'épreuve en question.

L'UPSTI ne répondra pas directement aux questions que peuvent soulever ces corrigés : nous vous invitons à vous rapprocher de vos enseignants si vous souhaitez des compléments d'information, et à vous adresser à eux pour nous faire remonter vos éventuelles remarques.

Licence et Copyright

Toute représentation ou reproduction (même partielle) de ce document faite sans l'accord de l'UPSTI est **interdite**. Seuls le téléchargement et la copie privée à usage personnel sont autorisés (protection au titre des [droits d'auteur](#)).

En cas de doute, n'hésitez pas à nous contacter à : corrigesconcours@upsti.fr.

Informez-vous !

Retrouvez plus d'information sur les [Sciences de l'Ingénieur](#), l'[orientation](#), les [Grandes Ecoles](#) ainsi que sur les [Olympiades de Sciences de l'Ingénieur](#) et sur les [Sciences de l'Ingénieur au Féminin](#) sur notre site : www.upsti.fr

L'équipe UPSTI

L'inverseur de poussée eTras[®]

Corrigé UPSTI

2 Mise en situation du système étudié avec comparaison aux autres systèmes de freinage

Objectif

Évaluer la pertinence de l'inverseur de poussée dans la phase de freinage d'un avion de ligne sur piste mouillée ou glacée.

Question 1 À partir des données du problème, **déterminer** une expression de la décélération, notée a , en fonction des grandeurs du problème. **Indiquer** l'isolement réalisé et la méthode utilisée.

Isolement : La totalité de l'avion

Théorème appliqué : Théorème de la résultante dynamique(projeté suivant $\vec{x}$ et $\vec{y}$)

1. Théorème de la résultante dynamique suivant $\vec{y}$ (avec accélération verticale nulle) :

Bilan des résultantes extérieures suivant $\vec{y}$:

- pesanteur : $-M \cdot g$
- action globale normale du sol sur l'ensemble des 22 roues : $N_{sol \rightarrow avion}$

On obtient donc, comme l'accélération est nulle suivant cette direction :

$$N_{sol \rightarrow avion} = M \cdot g$$

2. Théorème de la résultante dynamique suivant $\vec{x}$:

Bilan des résultantes suivant $\vec{x}$:

- actions globale tangentielle du sol sur l'ensemble des 22 roues : $T_{sol \rightarrow avion} = -N_{sol \rightarrow avion} = -f \cdot M \cdot g$ car le frottement s'oppose au mouvement des roues de l'avion par rapport au sol ;
- action de l'air sur l'avion : $-\frac{1}{2} \cdot \rho \cdot S \cdot C_x \cdot v(t)^2$.

On obtient :

$$M \cdot a(t) = -f \cdot M \cdot g - \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot S \cdot C_x \cdot v(t)^2$$

Au bilan, on a donc :

$$a(t) = -f \cdot g - \frac{1}{2 \cdot M} \cdot \rho \cdot S \cdot C_x \cdot v(t)^2$$

Question 2 En utilisant le théorème de l'énergie cinétique sous forme intégrée entre l'instant initial et l'instant final (arrêt de l'avion) noté T , **montrer** que la variation d'énergie cinétique est égale à la somme de deux termes, le travail des actions de frottement noté W_f et le travail des actions aérodynamiques noté W_a dont on donnera les expressions intégrales sans les calculer ou les simplifier. **Calculer** numériquement l'énergie cinétique totale à dissiper au cours de l'atterrissage.

On isole toujours la totalité de l'avion.

- Calcul de l'énergie cinétique E_{CT} de l'ensemble isolé :

L'ensemble isolé est animé d'un mouvement de translation rectiligne par rapport au sol considéré comme galiléen, donc

$$E_{CT} = \frac{1}{2} M \cdot v(t)^2$$

- Puissances appliquées à l'ensemble isolé :

- action globale normale du sol sur l'ensemble des 22 roues : $P_N = 0$ car action orthogonale au mouvement;

- action globale tangentielle du sol sur l'ensemble des 22 roues : $P_f = -f \cdot M \cdot g \cdot v$;

- action de l'air sur l'avion : $P_a = -\frac{1}{2} \cdot \rho \cdot S \cdot C_x \cdot v(t)^3$.

- On applique le théorème de l'énergie cinétique :

$$\frac{dE_{CT}}{dt}(t) = P_a + P_f$$

- On intègre cette égalité de $t = 0$ à T :

$$\Delta E_{CT} = E_{CT}(T) - E_{CT}(0) = \int_0^T P_f \cdot dt + \int_0^T P_a \cdot dt$$

On obtient alors :

$$W_f = \int_0^T P_f \cdot dt = -f \cdot M \cdot g \int_0^T v(t) \cdot dt$$

$$W_a = \int_0^T P_a \cdot dt = -\frac{1}{2} \cdot \rho \cdot S \cdot C_x \int_0^T v(t)^3 \cdot dt$$

- Enfin, la vitesse finale étant nulle et la vitesse initiale valant V_a , l'énergie cinétique totale à dissiper vaut :

$$E_{CT}(t=0) = \frac{1}{2} M \cdot V_a^2$$

Application numérique : $E_{CT}(t=0) = \frac{400 \cdot 10^3 \cdot 260^2 \cdot 10^6}{2 \cdot 60^2} \approx 3,8 \cdot 10^{12} \text{ J} = 3800 \text{ GJ}$

Question 3 Compléter les lignes 13, 14, 15, 18 du programme donné sur le cahier réponse en utilisant une méthode d'Euler explicite pour calculer la vitesse v , la position (x) et l'énergie (W_a).

ligne 13 : `while v > 0 :`

ligne 15 : `x.append(x[-1]+pas*v)`

ligne 14 : `v = v+pas*FI(v)`

ligne 16 : `Wa.append(Wa[-1]+pas*A1*M*v**3)`

Question 4 Justifier l'allure de la courbe $W_f(x)$.

Comme l'avion est en phase de freinage et donc en mouvement, les actions de contact entre les 22 roues et le sol sont sur le cône de frottement. Ainsi, durant toute la phase de freinage, les actions de frottement sont constantes.

Le travail des forces de frottement est donc égal à la norme de ces force multipliée par le déplacement puis par le cosinus de l'angle entre le déplacement et ces forces. Il vaut donc :

$$W_f = -f \cdot M \cdot g \cdot x(t)$$

Sur la courbe proposée, on a bien un travail proportionnel au déplacement.

Remarques : Comme on est en phase de décélération, le travail des forces de frottement est censé être négatif, alors que sur la courbe proposée il est positif. Il en va de même pour le travail de l'action de l'air.

Question 5 Comparer la première Figure (6.a) (sans inverseur de poussée sur piste sèche) avec la courbe des travaux de la Figure (5) (allure, valeur finale). **Donner** approximativement les distances d'arrêt sur piste sèche et glacée et **commenter** les valeurs obtenues par rapport au cahier des charges.

Sans inverseur de poussée, sur piste sèche (figure 6.a), on trouve le même ordre de grandeur de distance d'arrêt que la simulation numérique (fig 5). Le coefficient de frottement entre les roues et le sol utilisé dans la simulation doit être celui pour une piste sèche.

Il est difficile de conclure sur l'allure des courbes mais les travaux sont soit linéaire (frottement) soit polynomial (air). Il semble en être de même pour la dissipation d'énergie.

	Sans inverseur		Avec inverseur	
	Distance d'arrêt	Validation	Distance d'arrêt	Validation
Piste sèche	≈ 750 m	oui	≈ 750 m	oui
Piste glacée	≈ 3900 m	non	≈ 1100 m	oui

Un tiers de la piste devant être laissée vacante, la distance d'arrêt maximale envisageable est de 1800 m. On voit donc que sans inverseur de poussée, il ne sera pas possible de s'arrêter sur la piste dans des conditions météorologiques hivernales, ce qui est un énorme manquement au cahier des charges.

Question 6 Quantifier l'effet de la présence des inverseurs de poussée sur l'arrêt d'un avion et **justifier** l'intérêt d'avoir ce dispositif pour une compagnie aérienne.

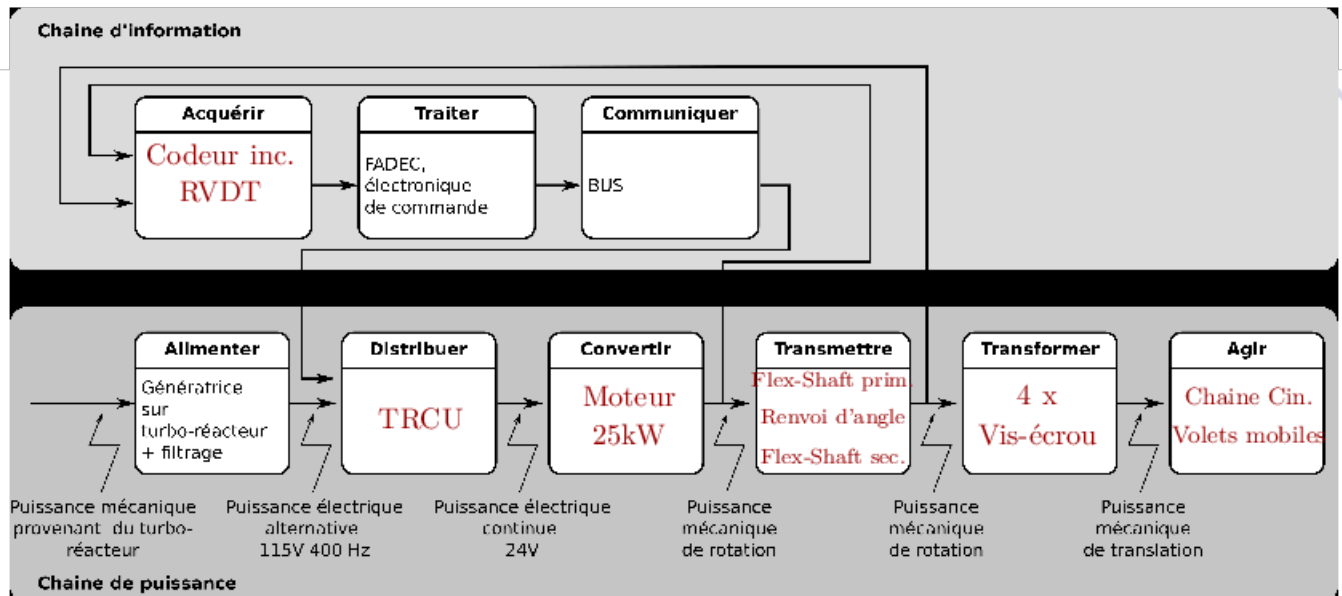
	Influence de l'inverseur de poussée	
Piste sèche	Dissipation d'une partie de la puissance aérodynamique (environ la moitié).	
Piste glacée	Dissipation de deux tiers de la puissance aérodynamique et de la moitié de la puissance de freinage.	

Intérêt :

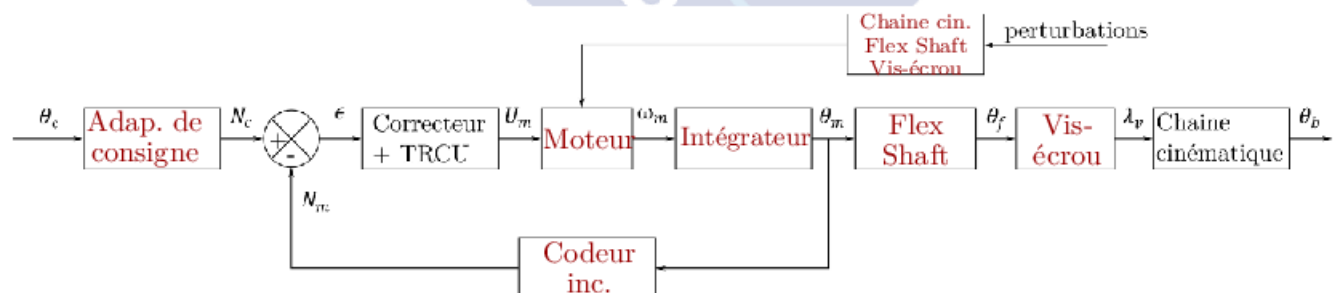
- Sur piste sèche, peu d'intérêt.
- Sur piste glacée, réduction par 3 de la distance d'arrêt. Réduction de l'usure des freins.

3 Analyse de la chaîne structurale de l'eTras[®]

Question 7 A partir de la description de la chaîne structurale de l'eTras[®], compléter la chaîne de puissance et d'information du cahier réponse.

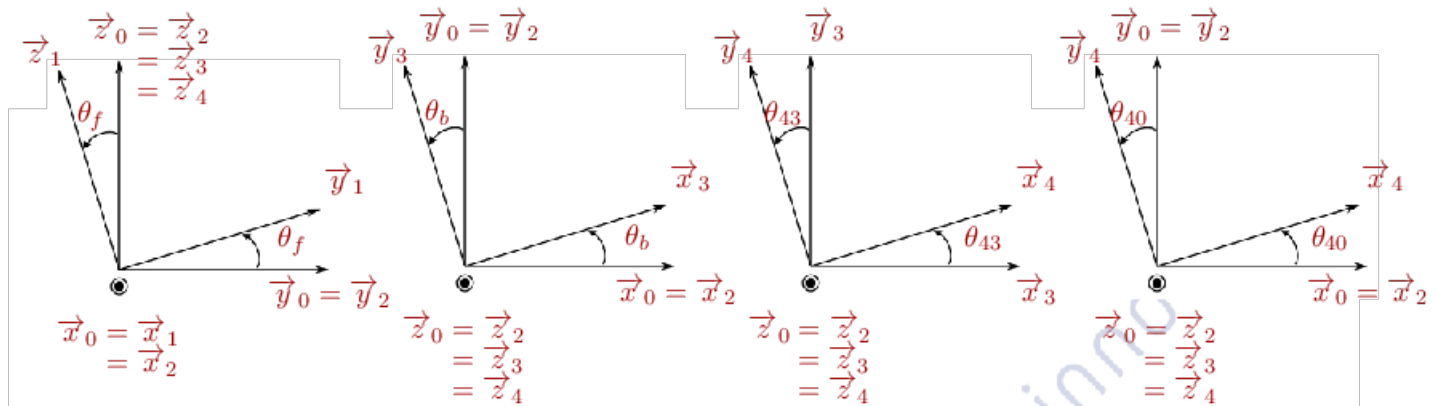


Question 8 A partir de la description de la modélisation de la chaîne d'asservissement, compléter le schéma bloc fonctionnel du cahier réponse.



4 Modélisation du comportement du système en aval des flex-shafts

Question 9 Compléter les figures de changement de bases associées au paramétrage précédent.



Question 10 Déterminer l'expression de la variable de translation $\lambda(t)$ de la partie mobile de la nacelle (2) en fonction de l'angle de rotation $\theta_b(t)$ ainsi que des grandeurs géométriques constantes du système.

Par fermeture géométrique, on a :

$$\overrightarrow{O_1O_2} + \overrightarrow{O_2O_3} + \overrightarrow{O_3O_4} + \overrightarrow{O_4O_1} = \vec{0}$$

$$\lambda(t) \vec{x}_0 + L_3 \vec{x}_3 + L_4 \vec{x}_4 - L \vec{x}_0 - H \vec{y}_0 = \vec{0}$$

Ce qui permet d'aboutir, par projections suivant $\vec{x}_0$ et $\vec{y}_0$, au système d'équations suivant :

$$\begin{cases} / \vec{x}_0 : \lambda(t) + L_3 \cdot \cos(\theta_b(t)) + L_4 \cdot \cos(\theta_{40}) - L = 0 \\ / \vec{y}_0 : L_3 \cdot \sin(\theta_b(t)) + L_4 \cdot \sin(\theta_{40}) - H = 0 \end{cases}$$

En isolant les termes en θ_{40} , et en ajoutant les deux équations après les avoir élevées au carré, on obtient :

$$L_4^2 = [\lambda(t) + L_3 \cdot \cos(\theta_b(t)) - L]^2 + [L_3 \cdot \sin(\theta_b(t)) - H]^2$$

Ce qui amène enfin à :

$$\lambda(t) = \sqrt{L_4^2 - [L_3 \cdot \sin(\theta_b(t)) - H]^2} - L_3 \cdot \cos(\theta_b(t)) + L$$

Question 11 À partir de la Figure 9, déterminer la course C de la partie mobile de la nacelle correspondant à l'évolution angulaire des volets puis comparer la valeur trouvée à la valeur du cahier des charges.

Sur la Figure 9, pour $\theta_b \in [5^\circ; 85^\circ]$, on a :

$$\lambda_{min} \approx 250 \text{ mm} \text{ et } \lambda_{max} \approx 790 \text{ mm}$$

Ainsi, on a :

$$C = \lambda_{max} - \lambda_{min} \approx 540 \text{ mm}$$

On trouve une valeur de course qui est supérieure à 50 cm. L'exigence id 1.2.2 est vérifiée.

Question 12 Justifier l'intérêt d'utiliser une régression linéaire univariée plutôt qu'une linéarisation autour d'un point de fonctionnement pour simplifier le modèle. **Critiquer** ce choix sur la plage de variation de $\theta_b \in [5^\circ; 30^\circ]$. En se basant sur l'exemple présenté dans l'annexe "Bibliothèque Scikit-Learn Python", **compléter** le code Python du cahier réponse afin d'obtenir les paramètres d'optimisation du modèle de régression linéaire permettant de tracer la droite.

Justification : La régression univariée est ici préférable à la linéarisation autour d'un point de fonctionnement car la variable explicative d'entrée varie sur une grande plage de valeurs.
Une régression linéaire univariée serait ici parfaitement cohérente si $\frac{d\lambda_i}{d\theta_{bi}} \approx \text{constante}$ sur toute la plage de variation de θ_{bi} considérée. Ce n'est pas le cas pour $\theta_b \in [5^\circ; 30^\circ]$.

Ligne 22 : `model_linreg.fit(X_train,Y.reshape((-1,1)))`

ligne 24 : `a = model_linreg.coef_`

ligne 25 : `b = model_linreg.intercept_`

Question 13 Déterminer la fonction de transfert $K_{cc} = \frac{\omega_b}{V_{20}}$ associée à la chaîne cinématique à partir du résultat de l'algorithme d'apprentissage supervisé présenté sur la Figure 11.

La régression linéaire donne :

- pour $\theta_{bi} = 20^\circ$, $\lambda_{i,min} = 400$ mm ;
- pour $\theta_{bi} = 70^\circ$, $\lambda_{i,max} = 700$ mm.

Ainsi :

$$\frac{\omega_b}{V_{20}} = \frac{\Delta\theta_{bi}}{\Delta\lambda} = \frac{70 - 20}{700 - 400} = \frac{5}{30} = \frac{1}{6} \approx 0,17^\circ \cdot \text{mm}^{-1} \quad \text{et donc} \quad K_{cc} \approx 1,05 \cdot 10^{-3} \text{ rad} \cdot \text{m}^{-1}$$

Question 14 À partir des données fournies et des réponses aux questions précédentes, **déterminer** l'expression du temps d'ouverture de la nacelle. **Donner** l'application numérique et **conclure** vis-à-vis du cahier des charges. On considèrera pour cette question que le moteur tourne à vitesse constante $N = N_m$.

Le fonctionnement défini donne un besoin d'ouverture de $\Delta\theta_b = 80^\circ \approx 12,7$ rad pour les volets.

Ainsi, il est nécessaire d'avoir une course de la pièce 2 de $\Delta\lambda = \frac{\Delta\theta_b}{K_{cc}} = 6 \cdot 80 = 480$ mm.

Comme la vis possède un pas valant $p = 8 \text{ mm} \cdot \text{tr}^{-1}$, on aboutit à un nombre de tours nécessaire pour la vis 1 pour obtenir l'ouverture désirée des volets de :

$$\Delta N_{\text{tours}} = \frac{\Delta\theta_b}{K_{cc} \cdot p} = \frac{480}{8} = 60 \text{ tr}$$

Or, à vitesse constante, on a :

$$t_{\text{ouverture}} = \frac{\Delta N_{\text{tours}}}{N_m} = \frac{\Delta\theta_b}{K_{cc} \cdot p \cdot N_m} = \frac{60}{2000} = 0,03 \text{ min} \quad \text{et donc} \quad t_{\text{ouverture}} = \frac{60 \cdot \Delta\theta_b}{K_{cc} \cdot p \cdot N_m} = 1,8 \text{ s}$$

L'exigence id='1.1.1' fixe une nécessité d'inversion de poussée, c'est à dire une ouverture complète des volets, en moins de 3 s. Le temps d'ouverture est bien inférieur à 3 s, l'exigence id='1.1.1' est donc validée.

Question 15 Déterminer le torseur des actions mécaniques de l'air sur un volet $\mathcal{T}_{air \rightarrow 3}$ au point O_2 exprimé dans la base B_3 .

On a le modèle local suivant :

$$d\mathcal{T}_{air \rightarrow 3} = \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{dR}(air \rightarrow 3) \\ \overrightarrow{0} \end{array} \right\}_{(M)}$$

avec :

- $\overrightarrow{dR}(air \rightarrow 3) = -p_S \cdot dS \cdot \vec{y}_3$ où $dS = dx \cdot dy$;
- $\overrightarrow{O_2M} = x \cdot \vec{x}_3 + y \cdot \vec{y}_3$ où $x \in [0; L_3]$ et $y \in [-\frac{b}{2}; \frac{b}{2}]$

On déplace le modèle local en O_2 , point fixe :

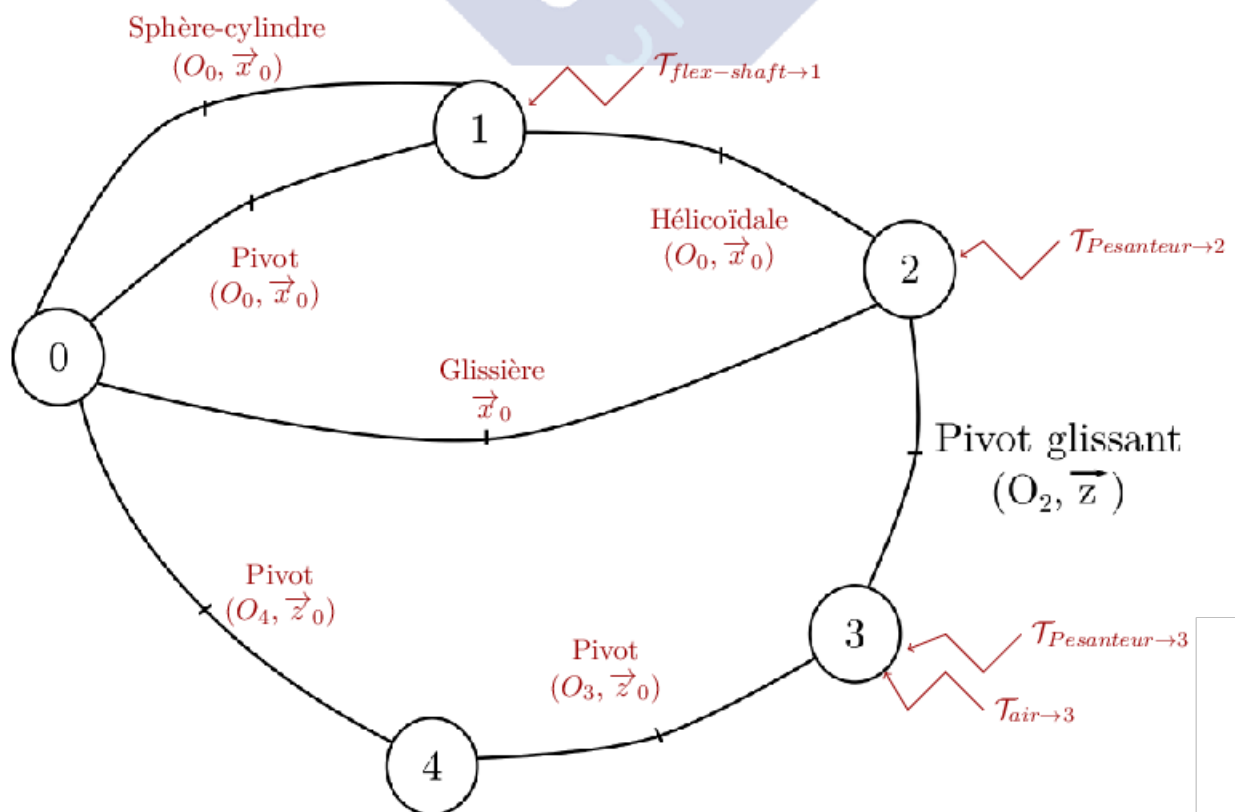
$$d\mathcal{T}_{air \rightarrow 3} = \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{dR}(air \rightarrow 3) \\ \overrightarrow{O_2M} \wedge \overrightarrow{dR}(air \rightarrow 3) \end{array} \right\}_{(O_2)} = \left\{ \begin{array}{c} -p_S \cdot dS \cdot \vec{y}_3 \\ (x \cdot \vec{x}_3 + y \cdot \vec{y}_3) \wedge -p_S \cdot dS \cdot \vec{y}_3 \end{array} \right\}_{(O_2)}$$

$$d\mathcal{T}_{air \rightarrow 3} = \left\{ \begin{array}{c} -p_S \cdot dS \cdot \vec{y}_3 \\ -p_S \cdot x \cdot dx \cdot dy \cdot \vec{z}_3 \end{array} \right\}_{(O_2)}$$

En intégrant sur le domaine défini, on obtient :

$$\mathcal{T}_{air \rightarrow 3} = \left\{ \begin{array}{c} -p_S \cdot L_3 \cdot b \cdot \vec{y}_3 \\ -p_S \cdot \frac{L_3^2}{2} \cdot b \cdot \vec{z}_3 \end{array} \right\}_{(O_2)}$$

Question 16 Compléter le graphe de structure représentant le mécanisme d'ouverture de la nacelle donné sur le cahier réponse. Faire apparaître les liaisons manquantes ainsi que les actions mécaniques autres que celles transmissibles par les liaisons.



Question 17 Justifier la forme des matrices d'inertie $I(O_0, 1)$ et $I(G_3, 3)$.

La vis 1 est assimilable (si on néglige l'influence du filet sur l'opérateur d'inertie) à un solide de révolution d'axe $(O_0, \vec{x}_0)$. On a donc bien :

$$I(O_0, 1) = \begin{bmatrix} A_1 & 0 & 0 \\ 0 & B_1 & 0 \\ 0 & 0 & B_1 \end{bmatrix}_{(\vec{x}_0, -, -)}$$

Le volet 3 est un solide qui présente des symétries (seules deux sont nécessaires pour conclure) :

- de plan $(G_3, \vec{z}_0, \vec{x}_3)$;
- de plan $(G_3, \vec{x}_3, \vec{y}_3)$;
- de plan $(G_3, \vec{y}_3, \vec{z}_0)$.

On a donc bien :

$$I(G_3, 3) = \begin{bmatrix} A_3 & 0 & 0 \\ 0 & B_3 & 0 \\ 0 & 0 & C_3 \end{bmatrix}_{(\vec{x}_3, \vec{y}_3, \vec{z}_0)}$$

Question 18 Déterminer l'inertie équivalente, notée J_{eq} , de l'ensemble $\{1, 2, 3, 4\}$ en mouvement par rapport à 0 ramenée au niveau de l'axe de rotation de la pièce 1. **Mettre** cette inertie équivalente sous la forme $A_{eq} + B_{eq} \cdot \sin(\theta_b)$. **Indiquer** les expressions de A_{eq} et B_{eq} .

Travail préparatoire : Détermination des relations cinématiques.

L'hélicoïdale entre 1 et 2 est à pas à droite. On a donc :

$$V_{21} = \frac{p}{2 \cdot \pi} \cdot \omega_{21}$$

Or, $V_{21} = V_{20} = V$, car $V_{01} = 0$ (1 est en liaison pivot par rapport à 0) et $\omega_{21} = \omega_{01} = -\dot{\theta}_f$ car $\omega_{20} = 0$ (2 est en liaison glissière par rapport à 0).

On a donc :

$$V_{20} = \frac{-p}{2 \cdot \pi} \cdot \dot{\theta}_f \quad \text{et} \quad \dot{\theta}_b = \frac{-p}{2 \cdot \pi} \cdot K_{cc} \cdot \dot{\theta}_f$$

On isole l'ensemble $\{1, 2, 3, 4\}$. On a :

- comme la vis 1 est en rotation autour d'un axe fixe $(O_0, \vec{x}_0)$ à une vitesse $\dot{\theta}_f$:

$$E_{C,1/0} = \frac{1}{2} \cdot A_1 \cdot \dot{\theta}_f^2$$

- comme l'ensemble mobile 2 est en translation rectiligne de direction $\vec{x}_0$ à une vitesse V_{20} :

$$E_{C2} = \frac{1}{2} \cdot M_2 \cdot V_{20}^2 = \frac{1}{2} \cdot M_2 \frac{p^2}{4 \cdot \pi^2} \cdot \dot{\theta}_f^2$$

- le volet 3 ayant un mouvement quelconque :

$$2 \cdot E_{C3} = \mathcal{V}_{3/0} \otimes \mathcal{C}_{3/0}$$

avec :

- $\mathcal{V}_{3/0} = \mathcal{V}_{3/2} + \mathcal{V}_{2/0}$;
- $\mathcal{V}_{2/0} = \left\{ \begin{matrix} \vec{0} \\ V_{20} \cdot \vec{x}_0 \end{matrix} \right\}_{G_3}$ car 2 est en translation par rapport à 0 ;

- $\mathcal{V}_{3/2} = \left\{ \frac{\dot{\theta}_b \cdot \vec{z}_0}{\vec{0}} \right\}_{O_2} = \left\{ \frac{L_3}{2} \cdot \dot{\theta}_b \cdot \vec{y}_3 \right\}_{G_3}$ car $\overrightarrow{G_3 O_2} = -\frac{L_3}{2} \cdot \vec{x}_3$;
- $\mathcal{C}_{3/0} = \left\{ \frac{M_3 \cdot \vec{V}_{G_3/0}}{\vec{\sigma}_{G_3,3/0}} \right\}_{G_3}$;
- $\vec{V}_{G_3/0} = \frac{d\overrightarrow{O_0 G_3}}{dt} \Big|_0 = V_{20} \cdot \vec{x}_0 + \frac{L_3}{2} \cdot \dot{\theta}_b \cdot \vec{y}_3$;

• $\vec{\sigma}_{G_3,3/0} = I(G_3, 3) \vec{\Omega}_{3/0} = C_3 \cdot \dot{\theta}_b \cdot \vec{y}_3$ car G_3 est le centre d'inertie du volet 3
Ainsi, on obtient :

$$E_{C3} = \frac{1}{2} \left(C_3 \cdot \dot{\theta}_b^2 + M_3 \cdot \left(V_{20}^2 + \frac{L_3^2}{4} \cdot \dot{\theta}_b^2 \right) - M_3 \cdot L_3 \cdot \dot{\theta}_b \cdot V_{20} \cdot \sin(\theta_b) \right)$$

- la masse de la bielle 4 étant négligeable :

$$E_{C4} = 0$$

Au bilan, l'énergie cinétique totale de l'ensemble isolé vaut :

$$E_{CT} = \frac{1}{2} \underbrace{\left[A_1 + \frac{p^2}{4 \cdot \pi^2} (M_2 + M_3) + \frac{K_{cc}^2 \cdot p^2}{4 \cdot \pi^2} \cdot \left(C_3 + M_3 \cdot \frac{L_3^2}{4} \right) - M_3 \cdot L_3 \cdot \frac{K_{cc} \cdot p^2}{4 \cdot \pi^2} \cdot \sin(\theta_b) \right]}_{J_{eq}} \cdot \dot{\theta}_f^2$$

On a bien la forme demandée pour J_{eq} avec :

$$A_{eq} = A_1 + \frac{p^2}{4 \cdot \pi^2} (M_2 + M_3) + \frac{K_{cc}^2 \cdot p^2}{4 \cdot \pi^2} \cdot \left(C_3 + M_3 \cdot \frac{L_3^2}{4} \right)$$

$$B_{eq} = -M_3 \cdot L_3 \cdot \frac{K_{cc} \cdot p^2}{4 \cdot \pi^2}$$

Question 19 En précisant le (ou les) solide(s) isolé(s) et en indiquant le théorème utilisé, déterminer une relation entre le couple sur la vis 1 noté C_f et les actions mécaniques de l'air sur le volet 3.

On isole l'ensemble $\{1, 2, 3, 4\}$. On effectue le bilan des actions mécaniques et on exprime la puissance que chacune d'entre-elles développe :

- les liaisons étant parfaites, il n'y a aucune puissance intérieure dissipée, toutes les puissances sont extérieures ;
- PesantEUR → 2.

Le mouvement de 2 par rapport à 0 étant orthogonal à la pesanteur, on a :

$$P_{pes \rightarrow 2} = 0$$

- PesantEUR → 3.

On a :

$$\mathcal{T}_{pes \rightarrow 3} = \left\{ \frac{-M_3 \cdot g \cdot \vec{y}_0}{\vec{0}} \right\}_{G_3} \quad \text{et} \quad \mathcal{V}_{3/0} = \left\{ V_{20} \cdot \vec{x}_0 + \frac{L_3}{2} \cdot \dot{\theta}_b \cdot \vec{y}_3 \right\}_{G_3}$$

donc :

$$P_{pes \rightarrow 3} = -M_3 \cdot g \cdot \frac{L_3}{2} \cdot \dot{\theta}_b \cdot \cos(\theta_b) = K_{cc} \cdot \frac{p}{2 \cdot \pi} \cdot M_3 \cdot g \cdot \frac{L_3}{2} \cdot \cos(\theta_b) \cdot \dot{\theta}_f$$

- Flex-shat $\rightarrow 1$.

On a :

$$\mathcal{T}_{Flex-shat \rightarrow 1} = \left\{ \begin{array}{c} \vec{0} \\ C_f \cdot \vec{x}_0 \end{array} \right\}_{O_0} \quad \text{et} \quad \mathcal{V}_{1/0} = \left\{ \begin{array}{c} \dot{\theta}_f \cdot \vec{x}_0 \\ \vec{0} \end{array} \right\}_{O_0}$$

donc :

$$P_{Flex-shat \rightarrow 1} = C_f \cdot \dot{\theta}_f$$

- Air $\rightarrow 3$.

On a :

$$\mathcal{T}_{air \rightarrow 3} = \left\{ \begin{array}{c} F_{air} \cdot \vec{y}_3 \\ \frac{L_3}{2} \cdot F_{air} \cdot \vec{z}_3 \end{array} \right\}_{O_2} \quad \text{et} \quad \mathcal{V}_{3/0} = \left\{ \begin{array}{c} \dot{\theta}_b \cdot \vec{z}_0 \\ V_{20} \cdot \vec{x}_0 \end{array} \right\}_{O_2}$$

donc :

$$P_{air \rightarrow 3} = -F_{air} \cdot V_{20} \cdot \sin(\theta_b) + \frac{L_3}{2} \cdot F_{air} \cdot \dot{\theta}_b = \dot{\theta}_f \cdot F_{air} \cdot \frac{p}{2 \cdot \pi} \cdot \left(\sin(\theta_b) - \frac{L_3}{2} \cdot K_{cc} \right)$$

On applique alors le théorème de l'énergie-puissance :

- Calcul de $\frac{dE_{CT}}{dt}$.

Comme J_{eq} dépend de θ_b qui dépend du temps, on a :

$$\frac{dE_{CT}}{dt} = J_{eq} \cdot \dot{\theta}_f \cdot \ddot{\theta}_f + \frac{1}{2} \cdot \dot{\theta}_b \cdot B_{eq} \cdot \sin(\theta_b) \dot{\theta}_f^2 = \dot{\theta}_f \cdot \left(J_{eq} \cdot \ddot{\theta}_f - \frac{1}{2} \cdot B_{eq} \cdot \frac{K_{cc} \cdot p}{2 \cdot \pi} \cdot \dot{\theta}_f^2 \right)$$

- Calcul de P_T la somme des puissances :

$$P_T = \dot{\theta}_f \cdot \left[C_f + K_{cc} \cdot \frac{p}{2 \cdot \pi} \cdot M_3 \cdot g \cdot \frac{L_3}{2} \cdot \cos(\theta_b) + F_{air} \cdot \frac{p}{2 \cdot \pi} \cdot \left(\sin(\theta_b) - \frac{L_3}{2} \cdot K_{cc} \right) \right]$$

- D'après le théorème de l'énergie-puissance, on a donc :

$$J_{eq} \cdot \ddot{\theta}_f - B_{eq} \cdot \frac{K_{cc} \cdot p}{4 \cdot \pi} \cdot \dot{\theta}_f^2 = C_f + \frac{K_{cc} \cdot p \cdot M_3 \cdot g \cdot L_3}{4 \cdot \pi} \cdot \cos(\theta_b) + F_{air} \cdot \frac{p}{2 \cdot \pi} \cdot \left(\sin(\theta_b) - \frac{L_3}{2} \cdot K_{cc} \right)$$

5 Étude de l'asservissement de la chaîne de transmission de puissance permettant l'ouverture des volets de la nacelle

Question 20 Établir les expressions littérales des quatre fonctions de transfert du schéma bloc de la Figure 15 dans les conditions de Heaviside.

En passant les équations modélisant le moteur à courant continu dans le domaine de Laplace, on obtient :

$$U(p) - E(p) = (R + L \cdot p) \cdot I(p) \quad ; \quad C_m(p) = K_m \cdot I(p) \quad ;$$

$$E(p) = K_m \cdot \Omega_m(p) \quad \text{et} \quad \Omega_m(p) = \frac{1}{J_m \cdot p} (C_m(p) - C_r(p))$$

Ainsi on a :

$$H_1(p) = \frac{1}{R + L \cdot p} \quad K_2(p) = K_m \quad H_3(p) = \frac{1}{J_m \cdot p} \quad K_4(p) = K_m$$

Question 21 Déterminer la valeur de K_a afin qu'en régime établi $I(t) = I_c(t)$.

Pour que l'asservissement ait un sens, il faut qu'en régime établi, avec $I(t) = I_c(t)$, l'écart $\varepsilon_U(t)$ soit nul . Or, dans le domaine de Laplace :

$$\varepsilon_U(p) = K_a \cdot I_c(p) - R_e \cdot I(p)$$

Ainsi pour $\varepsilon_U(p) = 0$ et $I(p) = I_c(p)$, on obtient qu'il est nécessaire d'avoir :

$$K_a = R_e$$

Question 22 En bloquant la rotation du moteur et en l'absence de couple résistant ($C_r(t) = 0$), calculer

la fonction de transfert en boucle ouverte de l'asservissement en courant $\frac{U_{mes}(p)}{\varepsilon(p)}$.

Avec $\Omega_m(p) = 0$ et $C_r(p) = 0$, on a :

$$\frac{U_{mes}(p)}{\varepsilon(p)} = R_e \cdot H_1(p) \cdot C(p) = \frac{R_e}{R} \cdot \frac{1}{1 + \frac{L}{R} \cdot p} \cdot C(p)$$

Question 23 En déduire la valeur de τ_i .

Avec le correcteur choisi, on a :

$$\frac{U_{mes}(p)}{\varepsilon(p)} = \frac{R_e}{R} \cdot \frac{1}{1 + \frac{L}{R} \cdot p} \cdot K_p \cdot \frac{1 + \tau_i \cdot p}{\tau_i \cdot p}$$

$$\frac{U_{mes}(p)}{\varepsilon(p)} = \frac{R_e \cdot K_p}{\tau_i \cdot R \cdot p} \cdot \frac{1 + \tau_i \cdot p}{1 + \frac{L}{R} \cdot p}$$

Afin de compenser le pôle électrique, il faut choisir :

$$\tau_i = \frac{L}{R}$$

Question 24 Montrer alors que la fonction de transfert $\frac{I(p)}{I_c(p)}$ peut s'exprimer comme suit :

$$\frac{I(p)}{I_c(p)} = \frac{R_e \cdot K_p}{R_e \cdot K_p + \tau_i \cdot R \cdot p}$$

En gardant les mêmes hypothèses (rotor bloqué), on a :

$$\frac{I(p)}{I_c(p)} = K_a \cdot \frac{H_1(p) \cdot C(p)}{1 + R_e \cdot H_1(p) \cdot C(p)}$$

Comme $K_a = R_e$ et que τ_i a été réglé pour avoir compensation du pôle électrique, on a :

$$R_e \cdot H_1(p) \cdot C(p) = \frac{R_e \cdot K_p}{R \cdot \tau_i \cdot p}$$

Ainsi :

$$\frac{I(p)}{I_c(p)} = \frac{\frac{R_e \cdot K_p}{R \cdot \tau_i \cdot p}}{1 + \frac{R_e \cdot K_p}{R \cdot \tau_i \cdot p}} = \frac{R_e \cdot K_p}{R_e \cdot K_p + \tau_i \cdot R \cdot p}$$

On trouve bien la forme demandée.

Question 25 En **déduire** l'expression du temps de réponse de la boucle de courant et la valeur de K_p permettant de répondre au cahier des charges ($L = 1 \cdot 10^{-5}$ H et $R_e = 0,01 \Omega$).

La fonction de transfert de la boucle de courant déterminée est une fonction de transfert du 1^{er} ordre de gain unitaire et de constante de temps $\tau_{BC} = \frac{\tau_i \cdot R}{R_e \cdot K_p} = \frac{L}{R_e \cdot K_p}$.

Le temps de réponse à 5% de cette boucle de courant vaut donc :

$$t_{r5\%} = 3 \cdot \frac{L}{R_e \cdot K_p}$$

Pour respecter l'exigence id='1.4.1', il faut que ce temps de réponse soit inférieur à 0,3 ms. Ainsi, il faut :

$$3 \cdot \frac{L}{R_e \cdot K_p} < 3 \cdot 10^{-4}$$

d'où

$$K_p > \frac{10^4 \cdot L}{R_e} \quad \underline{\text{AN}} : K_p > 10$$

On choisit pour la suite $K_p = 10$

Question 26 A partir du graphique, **valider** le modèle théorique précédemment établi et **vérifier** les performances attendues dans le diagramme des exigences.

Sur la figure 17, avec correcteur on observe une allure de la réponse indicielle qui permet d'assimiler la boucle de courant à :

- un 1^{er} ordre (tangente à l'origine non horizontale) ;
- de gain unitaire (valeur finale tendant vers 1) ;

- de constante d'environ 1 ms (temps pour la valeur 0,63 ou temps de croisement entre l'asymptote finale et la tangente à l'origine);
- avec un temps de réponse à 5% de 3 ms.

Au bilan, cette réponse expérimentale permet de valider l'étude théorique car le modèle obtenu est le même dans les deux cas. De plus l'exigence id='1.4.1' de précision (erreur statique nulle) et de rapidité (temps de réponse inférieur à 0,3 ms) est vérifiée (même si celle de rapidité est à la limite).

Question 27 Calculer la fonction de transfert $\frac{\Omega_f(p)}{\Omega_m(p)}$ en fonction des paramètres présentés précédemment.

Par lecture directe du schéma-bloc, on a :

$$\Omega_f(p) = \frac{1}{J_r \cdot p} \cdot \frac{k + f \cdot p}{p} \cdot (\Omega_m(p) - \Omega_f(p))$$

$$\Omega_f(p) \cdot \frac{k + f \cdot p + J_r \cdot p^2}{J_r \cdot p^2} = \Omega_m(p) \cdot \frac{k + f \cdot p}{J_r \cdot p^2}$$

$$\frac{\Omega_f(p)}{\Omega_m(p)} = \frac{1 + \frac{f}{k} \cdot p}{1 + \frac{f}{k} \cdot p + \frac{J_r}{k} \cdot p^2}$$

Question 28 Calculer la limite quand t tend vers l'infini de $\omega_m(t) - \omega_f(t)$ pour une entrée en rampe de $\omega_m(t)$ de pente a_{m0} .

Par application du théorème de la valeur finale, on a :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (\omega_m(t) - \omega_f(t)) = \lim_{p \rightarrow 0^+} p \cdot (\Omega_m(p) - \Omega_f(p))$$

Or avec $\Omega_m(p) = \frac{a_{m0}}{p^2}$ (entrée de type rampe), on a :

$$\Omega_m(p) - \Omega_f(p) = \frac{a_{m0}}{p^2} \cdot \left(1 - \frac{1 + \frac{f}{k} \cdot p}{1 + \frac{f}{k} \cdot p + \frac{J_r}{k} \cdot p^2} \right) = \frac{a_{m0}}{p^2} \cdot \frac{\frac{J_r}{k} \cdot p^2}{1 + \frac{f}{k} \cdot p + \frac{J_r}{k} \cdot p^2}$$

d'où :

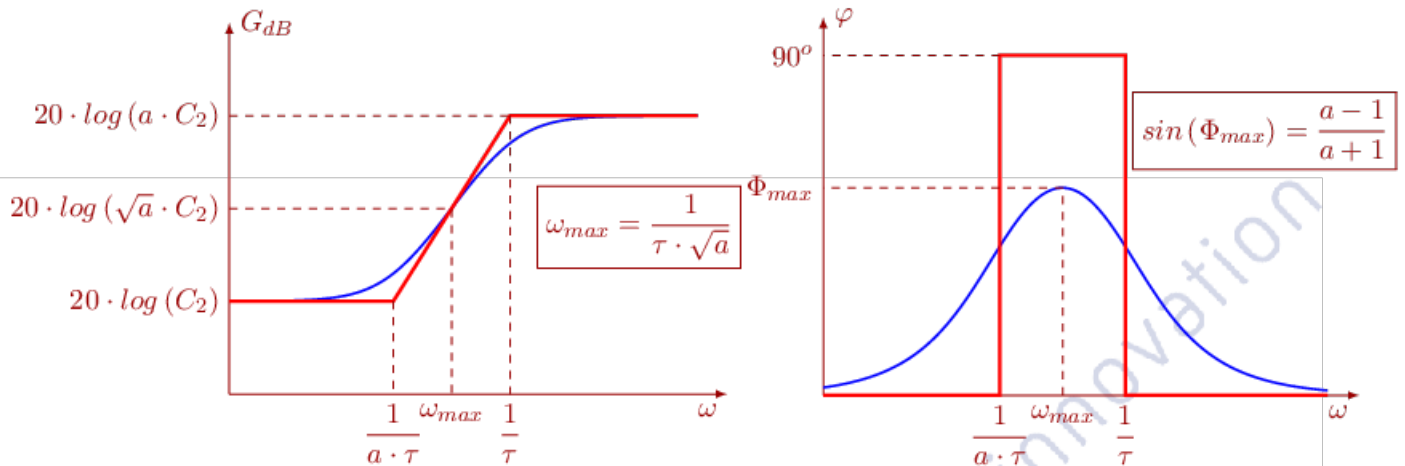
$$\lim_{t \rightarrow \infty} (\omega_m(t) - \omega_f(t)) = \lim_{p \rightarrow 0^+} p \cdot \frac{a_{m0} \cdot \frac{J_r}{k}}{1 + \frac{f}{k} \cdot p + \frac{J_r}{k} \cdot p^2} = 0$$

Question 29 Caractériser le comportement du flex-shaft à temps infini pour l'entrée définie précédemment.

La fonction de transfert modélisant le comportement du flex-shaft présentant un dénominateur du second ordre avec des coefficients de même signe, elle est tout d'abord intrinsèquement stable.

De plus, l'erreur pour une entrée rampe étant nulle, on peut conclure que, pour un temps infini, la vitesse de rotation de sortie du flex-shaft suivra exactement celle de consigne de type rampe.

Question 30 Tracer le diagramme de Bode asymptotique et l'allure réelle du correcteur, préciser les valeurs caractéristiques.



Question 31 Déterminer Φ_{max} permettant de respecter le cahier des charges.

L'exigence id='1.4.2' fixe une marge de phase de 45° minimum et une pulsation de coupure ω_{BP} . On désire donc avoir :

$$\varphi_{corrigée}(\omega_{BP}) \geq -135^\circ$$

Or, avec le correcteur choisi, on aura, en choisissant d'apporter le maximum de phase en ω_{BP} :

$$\varphi_{corrigée}(\omega_{BP}) = \varphi_{non\ corrigée}(\omega_{BP}) + \Phi_{max}$$

Graphiquement, on lit sur le diagramme proposé :

$$\varphi_{non\ corrigée}(\omega_{BP}) = -185^\circ \text{ d'où } \Phi_{max} \geq -135 + 185 = 50^\circ$$

On choisit donc :

$$\Phi_{max} = 50^\circ$$

Question 32 En déduire les expressions analytiques de a et de τ . Calculer numériquement a et poser le calcul de C_2 avec les valeurs numériques nécessaires.

On a par définition de Φ_{max} :

$$\sin(\Phi_{max}) = \frac{a - 1}{a + 1}$$

d'où

$$a = \frac{1 + \sin(\Phi_{max})}{1 - \sin(\Phi_{max})} \quad \text{A.N : } a \approx 7,5$$

De plus, comme on désire apporter le maximum de phase en ω_{BP} , on a :

$$\omega_{BP} = \frac{1}{\sqrt{a} \cdot \tau}$$

d'où :

$$\tau = \frac{1}{\sqrt{a} \cdot \omega_{BP}} = \frac{\sqrt{1 - \sin(\Phi_{max})}}{\sqrt{1 + \sin(\Phi_{max})} \cdot \omega_{BP}}$$

On désire enfin une pulsation de coupure valant ω_{BP} . Ainsi on désire avoir :

$$G_{dB, \text{corrigé}}(\omega_{BP}) = 0$$

Or :

$$G_{dB, \text{corrigé}}(\omega_{BP}) = G_{dB, \text{non corrigé}}(\omega_{BP}) + 20 \cdot \log(\sqrt{a} \cdot C_2)$$

Comme graphiquement, on relève $G_{dB, \text{non corrigé}}(\omega_{BP}) = -38$, on désire avoir :

$$\log(\sqrt{a} \cdot C_2) = \frac{38}{20} \quad \text{d'où} \quad C_2 = \frac{10^{1,9}}{\sqrt{a}} \quad \text{A.N : } C_2 \approx 28,9$$

6 Conclusion

Question 33 Résumer succinctement la validation ou non des critères du diagramme des exigences demandés.

Id	Cahier des charges	Valeur trouvée	Validation
1.1.1	inversion de poussée en moins de 3 s	inversion de poussée en 1,8 s (Question 14)	OUI
1.2.1	$\theta_b \in [5^\circ; 85^\circ]$ pour les volets	$\theta_b \in [5^\circ; 85^\circ]$ non vérifié, donné par le sujet	OUI selon le sujet
1.2.2	course minimale de 50 cm pour la nacelle	course totale de 54 cm (Question 11)	OUI
1.4.1	$t_{r5\%} < 0,03$ ms et erreur statique nulle pour la boucle de courant	$t_{r5\%} = 0,03$ ms et erreur statique nulle (Question 25 et 26)	OUI (mais pas strictement pour $t_{r5\%}$)
1.4.2	$M_\varphi \geq 45^\circ$ bande passante ω_{BP} pour la boucle de position	$M_\varphi = 45^\circ$ bande passante ω_{BP} (Questions 31 et 32)	OUI (mais limite pour M_φ)