

Proposition de corrigé

Concours : Concours Commun INP

Année : 2023

Filière : TSI

Épreuve : Modélisation

Ceci est une proposition de corrigé des concours de CPGE, réalisée bénévolement par des enseignants de Sciences Industrielles de l'Ingénieur et d'Informatique, membres de l'[UPSTI](https://www.upsti.fr) (Union des Professeurs de Sciences et Techniques Industrielles), et publiée sur le site de l'association :

<https://www.upsti.fr/espace-etudiants/annales-de-concours>

A l'attention des étudiants

Ce document vous apportera des éléments de corrections pour le sujet traité, mais n'est ni un corrigé officiel du concours, ni un corrigé détaillé ou exhaustif de l'épreuve en question.

L'UPSTI ne répondra pas directement aux questions que peuvent soulever ces corrigés : nous vous invitons à vous rapprocher de vos enseignants si vous souhaitez des compléments d'information, et à vous adresser à eux pour nous faire remonter vos éventuelles remarques.

Licence et Copyright

Toute représentation ou reproduction (même partielle) de ce document faite sans l'accord de l'UPSTI est **interdite**. Seuls le téléchargement et la copie privée à usage personnel sont autorisés (protection au titre des [droits d'auteur](#)).

En cas de doute, n'hésitez pas à nous contacter à : corrigesconcours@upsti.fr.

Informez-vous !

Retrouvez plus d'information sur les [Sciences de l'Ingénieur](#), l'[orientation](#), les [Grandes Ecoles](#) ainsi que sur les [Olympiades de Sciences de l'Ingénieur](#) et sur les [Sciences de l'Ingénieur au Féminin](#) sur notre site : www.upsti.fr

L'équipe UPSTI

Etude d'un Robot Léopard

Corrigé UPSTI

Introduction

Partie I. Structure du robot

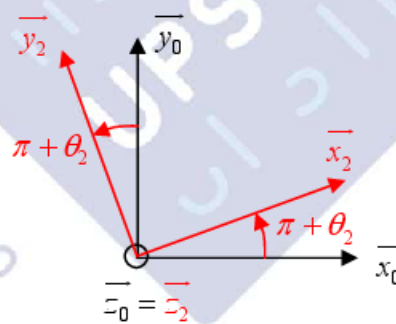
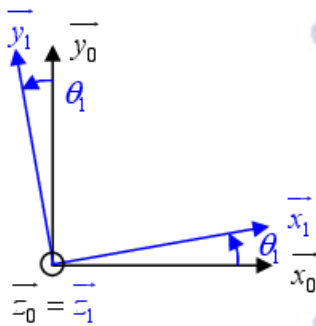
Objectif : Validation de l'hypothèse $\theta_1 = -\theta_2$.

I.1 - Estimation de l'erreur liée à l'hypothèse

Q1. Ecrire la matrice P_{B_0, B_1} de changement de base, de la base $B_0 = (\vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ à la base $B_1 = (\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$.

P_{B_0, B_1} est définie de la manière suivante : c'est la matrice dont les colonnes sont les coordonnées des vecteurs de la base B_1 décomposés dans la base B_0 .

Or le paramétrage permet d'établir les figures de passages suivantes :



Donc :
$$\begin{cases} \vec{x}_1 = \cos(\theta_1) \cdot \vec{x}_0 + \sin(\theta_1) \cdot \vec{y}_0 \\ \vec{y}_1 = -\sin(\theta_1) \cdot \vec{x}_0 + \cos(\theta_1) \cdot \vec{y}_0 \\ \vec{z}_1 = \vec{z}_0 \end{cases} \text{ Ainsi : } P_{B_0, B_1} = \begin{pmatrix} \cos(\theta_1) & -\sin(\theta_1) & 0 \\ \sin(\theta_1) & \cos(\theta_1) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Q2. Ecrire la matrice P_{B_0, B_2} de changement de base, de la base $B_0 = (\vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ à la base $B_2 = (\vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$.

Par analogie,
$$\begin{cases} \vec{x}_2 = \cos(\pi + \theta_2) \cdot \vec{x}_0 + \sin(\pi + \theta_2) \cdot \vec{y}_0 \\ \vec{y}_2 = -\sin(\pi + \theta_2) \cdot \vec{x}_0 + \cos(\pi + \theta_2) \cdot \vec{y}_0 \\ \vec{z}_2 = \vec{z}_0 \end{cases} \text{ soit } \begin{cases} \vec{x}_2 = -\cos(\theta_2) \vec{x}_0 - \sin(\theta_2) \vec{y}_0 \\ \vec{y}_2 = \sin(\theta_2) \vec{x}_0 - \cos(\theta_2) \vec{y}_0 \\ \vec{z}_2 = \vec{z}_0 \end{cases}.$$

Ainsi :
$$P_{B_0, B_2} = \begin{pmatrix} -\cos(\theta_2) & \sin(\theta_2) & 0 \\ -\sin(\theta_2) & -\cos(\theta_2) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Q3. Exprimer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{DF}$ dans la base $B_2 = (\overrightarrow{x_2}, \overrightarrow{y_2}, \overrightarrow{z_2})$ puis dans la base $B_0 = (\overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{y_0}, \overrightarrow{z_0})$ en fonction de a , b et de θ_2 .

$$\overrightarrow{DF} = \overrightarrow{DN} + \overrightarrow{NF}, \text{ donc } \overrightarrow{DF} = a \cdot \overrightarrow{x_2} - b \cdot \overrightarrow{y_2}, \text{ donc } \overrightarrow{DF} = a \cdot (-\cos(\theta_2) \cdot \overrightarrow{x_0} - \sin(\theta_2) \cdot \overrightarrow{y_0}) - b \cdot (\sin(\theta_2) \cdot \overrightarrow{x_0} - \cos(\theta_2) \cdot \overrightarrow{y_0}).$$

$$\text{Ainsi : } \overrightarrow{DF} = -(a \cdot \cos(\theta_2) + b \cdot \sin(\theta_2)) \cdot \overrightarrow{x_0} + (-a \cdot \sin(\theta_2) + b \cdot \cos(\theta_2)) \cdot \overrightarrow{y_0}.$$

Q4. Exprimer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AE}$ dans la base $B_1 = (\overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{y_1}, \overrightarrow{z_1})$ puis dans la base $B_0 = (\overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{y_0}, \overrightarrow{z_0})$ en fonction de a , b et de θ_1 .

$$\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{ME}, \text{ donc } \overrightarrow{AE} = a \cdot \overrightarrow{x_1} - b \cdot \overrightarrow{y_1}, \text{ donc } \overrightarrow{AE} = a \cdot (\cos(\theta_1) \cdot \overrightarrow{x_0} + \sin(\theta_1) \cdot \overrightarrow{y_0}) - b \cdot (-\sin(\theta_1) \cdot \overrightarrow{x_0} + \cos(\theta_1) \cdot \overrightarrow{y_0}).$$

$$\text{Ainsi : } \overrightarrow{AE} = (a \cdot \cos(\theta_1) + b \cdot \sin(\theta_1)) \cdot \overrightarrow{x_0} + (a \cdot \sin(\theta_1) - b \cdot \cos(\theta_1)) \cdot \overrightarrow{y_0}.$$

Q5. En déduire les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{FE}$ dans la base $B_0 = (\overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{y_0}, \overrightarrow{z_0})$ en fonction de a , b , l , θ_1 et de θ_2 .

$$\overrightarrow{FE} = \overrightarrow{FD} + \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AE} \text{ donc } \overrightarrow{FE} = - \begin{pmatrix} -a \cdot \cos(\theta_2) - b \cdot \sin(\theta_2) \\ -a \cdot \sin(\theta_2) + b \cdot \cos(\theta_2) \\ 0 \end{pmatrix}_{B_0} - \begin{pmatrix} 2a \\ -(2b+l) \\ 0 \end{pmatrix}_{B_0} + \begin{pmatrix} a \cdot \cos(\theta_1) + b \cdot \sin(\theta_1) \\ a \cdot \sin(\theta_1) - b \cdot \cos(\theta_1) \\ 0 \end{pmatrix}_{B_0}.$$

$$\overrightarrow{FE} = \begin{pmatrix} a \cdot \cos(\theta_2) + b \cdot \sin(\theta_2) - 2a + a \cdot \cos(\theta_1) + b \cdot \sin(\theta_1) \\ a \cdot \sin(\theta_2) - b \cdot \cos(\theta_2) + (2b+l) + a \cdot \sin(\theta_1) - b \cdot \cos(\theta_1) \\ 0 \end{pmatrix}_{B_0}$$

$$\overrightarrow{FE} = \begin{pmatrix} a \cdot (\cos(\theta_1) + \cos(\theta_2)) + b \cdot (\sin(\theta_1) + \sin(\theta_2)) - 2a \\ a \cdot (\sin(\theta_1) + \sin(\theta_2)) - b \cdot (\cos(\theta_1) + \cos(\theta_2)) + (2b+l) \\ 0 \end{pmatrix}_{B_0}$$

Q6. Après avoir supposé que $\theta_1 = -\theta_2 = \theta$, déterminer le carré de la longueur EF en fonction de θ .

$$\text{On suppose que } \theta_1 = -\theta_2 = \theta, \text{ donc : } \begin{cases} \cos(\theta_1) = \cos(\theta) \\ \cos(\theta_2) = \cos(\theta) \\ \sin(\theta_1) = \sin(\theta) \\ \sin(\theta_2) = -\sin(\theta) \end{cases} \text{ . Ainsi : } \overrightarrow{FE} = \begin{pmatrix} 2a \cdot (\cos(\theta) - 1) \\ -2b \cdot (\cos(\theta) - 1) + l \\ 0 \end{pmatrix}_{B_0}.$$

$$\|\overrightarrow{FE}\|^2 = (2a \cdot (\cos(\theta) - 1))^2 + (-2b \cdot (\cos(\theta) - 1) + l)^2$$

$$\|\overrightarrow{FE}\|^2 = 4a^2 \cdot (\cos(\theta) - 1)^2 + (-2b \cdot (\cos(\theta) - 1))^2 - 2l \cdot 2b \cdot (\cos(\theta) - 1) + l^2$$

$$\|\overrightarrow{FE}\|^2 = 4 \cdot (\cos(\theta) - 1)^2 \cdot (a^2 + b^2) - 4l \cdot b \cdot (\cos(\theta) - 1) + l^2$$

Q7. Vérifier que EF^2 peut s'écrire sous la forme $EF^2 = l^2 + f(\theta)$ avec :

$$f(\theta) = 8 \sin^2 \left(\frac{\theta}{2} \right) \cdot \left(2 \cdot (a^2 + b^2) \cdot \sin^2 \left(\frac{\theta}{2} \right) + l \cdot b \right)$$

Déterminer les valeurs de θ pour lesquelles $f(\theta) = 0$. Conclure quant à l'hypothèse $\theta_1 = -\theta_2 = \theta$.

$$\cos(\theta) - 1 = -2 \sin^2 \left(\frac{\theta}{2} \right), \text{ alors } \|\overrightarrow{FE}\|^2 = 4 \cdot \left(-2 \sin^2 \left(\frac{\theta}{2} \right) \right)^2 \cdot (a^2 + b^2) - 4l \cdot b \cdot \left(-2 \sin^2 \left(\frac{\theta}{2} \right) \right) + l^2$$

$$\|\overrightarrow{FE}\|^2 = l^2 + 8 \sin^2 \left(\frac{\theta}{2} \right) \cdot \left(2 \sin^2 \left(\frac{\theta}{2} \right) \cdot (a^2 + b^2) + l \cdot b \right)$$

Ainsi, $EF^2 = l^2 + f(\theta)$ avec $f(\theta) = 8 \sin^2 \left(\frac{\theta}{2} \right) \cdot \left(2 \cdot (a^2 + b^2) \cdot \sin^2 \left(\frac{\theta}{2} \right) + l \cdot b \right)$.

$$\begin{aligned} f(\theta) = 0 &\Leftrightarrow 8 \sin^2 \left(\frac{\theta}{2} \right) \cdot \left(2 \cdot (a^2 + b^2) \cdot \sin^2 \left(\frac{\theta}{2} \right) + l \cdot b \right) = 0 \\ &\Leftrightarrow 8 \sin^2 \left(\frac{\theta}{2} \right) = 0 \quad \text{ou} \quad \left(2 \cdot (a^2 + b^2) \cdot \sin^2 \left(\frac{\theta}{2} \right) + l \cdot b \right) = 0 \\ &\Leftrightarrow \theta = 0 \text{ car } \theta \in [-10^\circ; 10^\circ] \quad \text{ou} \quad 2 \cdot (a^2 + b^2) \cdot \sin^2 \left(\frac{\theta}{2} \right) = -l \cdot b \\ &\Leftrightarrow \theta = 0 \text{ car } 2 \cdot (a^2 + b^2) \cdot \sin^2 \left(\frac{\theta}{2} \right) \geq 0 \text{ et } -l \cdot b < 0. \end{aligned}$$

Donc : $f(\theta) = 0$ pour $\theta = 0$.

L'énoncé donne $EF = l$ donc $EF^2 = l^2$.

Avec l'hypothèse $\theta_1 = -\theta_2 = \theta$, on a établi que $EF^2 = l^2 + f(\theta)$.

Ainsi, si l'hypothèse $\theta_1 = -\theta_2 = \theta$ est vérifiée, cela signifie que $\forall \theta \in [-10^\circ; 10^\circ]$, $f(\theta) = 0$.

Or $f(\theta) = 0$ uniquement pour $\theta = 0$. Pour $\theta \neq 0$, $f(\theta) \neq 0$.

On commet donc une erreur, si $\theta \in [-10^\circ; 10^\circ]$ en considérant $\theta_1 = -\theta_2 = \theta$.

Q8. Vérifier que la dérivée de f peut s'écrire sous la forme :

$$f'(\theta) = 4 \sin(\theta) \cdot \left(4 \cdot (a^2 + b^2) \cdot \sin^2 \left(\frac{\theta}{2} \right) + l \cdot b \right)$$

f est dérivable sur $\theta \in [-10^\circ; 10^\circ]$ car produit de fonctions dérivables.

$$f'(\theta) = 8 \cdot 2 \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot \cos \left(\frac{\theta}{2} \right) \right) \cdot \left(\sin \left(\frac{\theta}{2} \right) \right) \cdot \left(2 \cdot (a^2 + b^2) \cdot \sin^2 \left(\frac{\theta}{2} \right) + l \cdot b \right) + 8 \sin^2 \left(\frac{\theta}{2} \right) \cdot \left(2 \cdot (a^2 + b^2) \cdot \left(2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \cos \left(\frac{\theta}{2} \right) \right) \cdot \left(\sin \left(\frac{\theta}{2} \right) \right) \right)$$

$$f'(\theta) = 4 \cdot \sin(\theta) \cdot \left(2 \cdot (a^2 + b^2) \cdot \sin^2 \left(\frac{\theta}{2} \right) + l \cdot b \right) + 8 \sin^2 \left(\frac{\theta}{2} \right) \cdot (a^2 + b^2) \cdot \sin(\theta)$$

$$f'(\theta) = 4 \sin(\theta) \cdot \left(4 \cdot (a^2 + b^2) \cdot \sin^2 \left(\frac{\theta}{2} \right) + l \cdot b \right)$$

Q9. Dresser le tableau de variation de f sur $[-10^\circ; 10^\circ]$. Conclure quant aux valeurs de θ qui génèrent le plus grand écart.

$$\left(4 \cdot (a^2 + b^2) \cdot \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) + l \cdot b \right) > 0 \text{ donc le signe de } f'(\theta) \text{ est celui de } \sin(\theta).$$

Ainsi :

θ	-10	0°	10
$\sin(\theta)$	$-$	0	$+$
$f'(\theta)$	$-$	0	$+$
$f(\theta)$	$f(-10)$	0	$f(10)$

De plus, $f(-\theta) = 8 \sin^2\left(\frac{-\theta}{2}\right) \cdot \left(2 \cdot (a^2 + b^2) \cdot \sin^2\left(\frac{-\theta}{2}\right) + l \cdot b \right) = 8 \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \cdot \left(2 \cdot (a^2 + b^2) \cdot \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) + l \cdot b \right) = f(\theta)$ donc f est paire. $f(-10) = f(10)$

Les valeurs θ qui génèrent le plus grand écart sont $\theta = -10^\circ$ et $\theta = +10^\circ$.

I.2 - Construction graphique

Q10. Tracer sur de DR le point E . Justifier les constructions

Voir figure 1 page suivante : constructions en Bleu. $\theta = 0$, $[AM]$ est vertical et mesure 5cm, $[ME]$ est horizontal et mesure 2cm.

Q11. Tracer sur de DR le point F' . Il faudra utiliser le rapporteur imprimé sur le document et justifier les constructions.

Voir figure 1 page suivante : constructions en Vert.

N' est situé à l'intersection du cercle de centre D et de rayon 5cm et de la droite passant par D incliné de $\theta_2 = -10^\circ$.

F' est situé à l'intersection du cercle de centre N' et de rayon 2cm et de la droite passant par N' perpendiculaire à (DN')

Q12. Tracer sur de DR le point E' . Justifier les constructions

Voir figure 1 page suivante : constructions en rouge. :

E' est situé à l'intersection du cercle de centre F' et de rayon 6cm et du cercle de centre A et de rayon AE

Q13. Mesurer, à partir de la variation de position du point E , l'angle θ_1 et calculer l'écart avec $-\theta_2$.
Commenter l'hypothèse $\theta_1 = -\theta_2$.

Voir figure 1 page suivante :

M' est situé à l'intersection du cercle de centre A et de rayon 5cm et du cercle de centre E' et de rayon 2cm.
On en déduit que pour $\theta_2 = -10^\circ$, $\theta_1 = +8^\circ$ soit une différence de 2° , qui ne peut être négligée devant les angles mis en jeu.

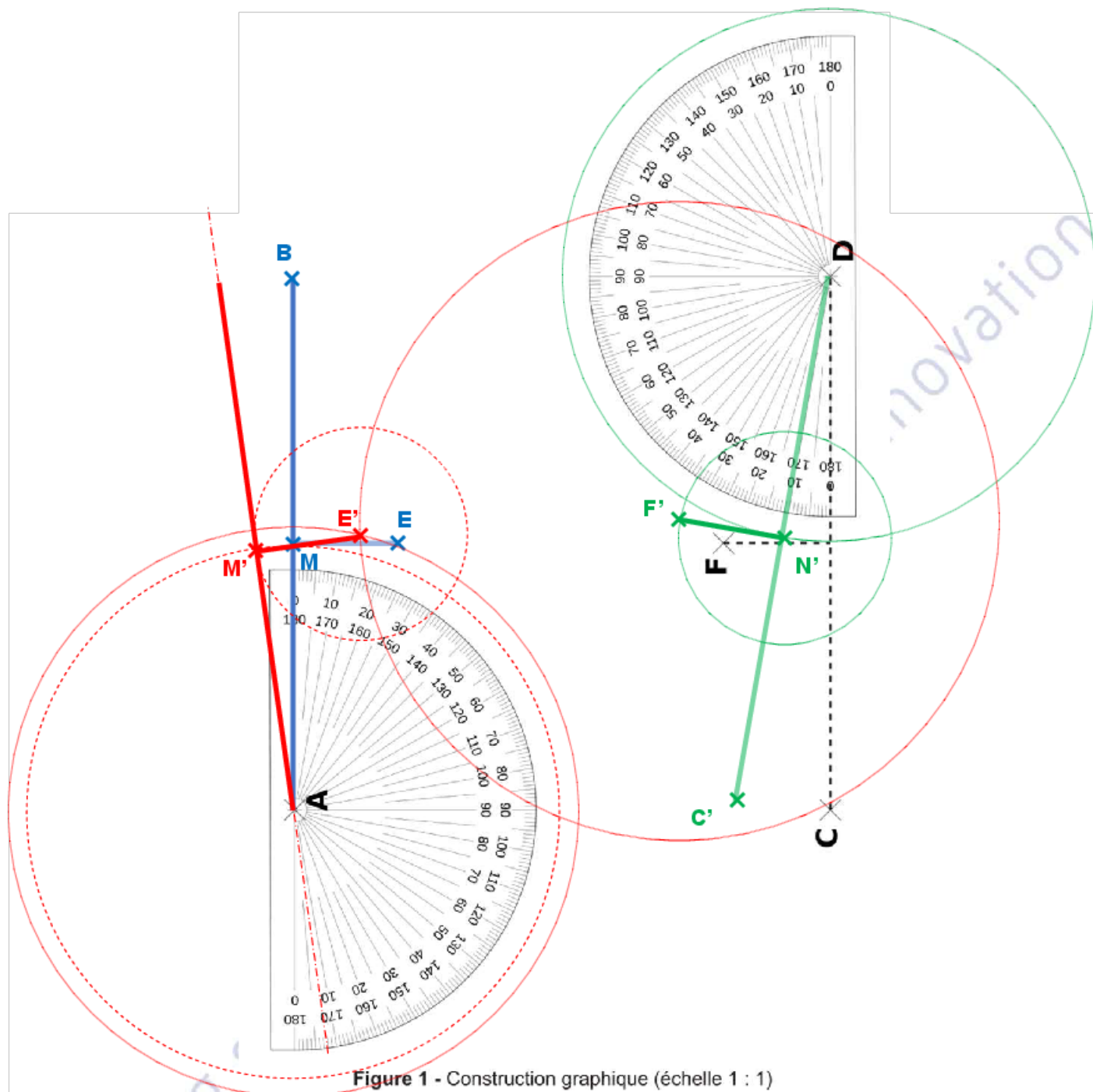


Figure 1 - Construction graphique (échelle 1 : 1)

Partie II. Calculs de cinématique

Objectif : Etude de la cinématique du mécanisme.

II.1 - Etude de la fermeture cinématique

Q14. Quel est le modèle de la liaison cinématique utilisé pour toutes les liaisons de ce mécanisme ? Donner les éléments de réduction du torseur $\{V_{1/0}\}$ au point A .

Le modèle de liaison utilisée est le modèle de la liaison pivot d'axe $(P, \vec{\varepsilon}_0)$ avec $P \in \{A, E, D, F\}$ sachant que

$$\vec{\varepsilon}_0 = \vec{\varepsilon}_1 = \vec{\varepsilon}_2. \quad \{V_{1/0}\} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \omega_{10z} & 0 \end{Bmatrix}_{A, B_1}, \quad i \in \{0, 1, 2\}.$$

Q15. Déterminer le degré d'hyperstatisme du modèle du système tel qu'il est représenté sur la **figure 2**. Commenter la valeur trouvée et expliciter brièvement la localisation du jeu permettant de libérer les contraintes d'assemblage.

Par la méthode cinématique : $h = 6\gamma - Ic + m$.

Soit $h = 6 \cdot 1 - (1 + 1 + 1 + 1) + 1$ car il n'y a qu'un cycle, 4 pivots et une seule mobilité : la rotation en A entraîne la rotation en D .

Le degré d'hyperstatisme est donc $h = 3$

Le parallélisme des axes des liaisons pivot imposent 2 conditions géométriques, et le blocage en translation suivant la direction $\vec{\varepsilon}_0$ est réalisé 2 fois, ce qui impose la 3^{ème}.

Mettre du jeu dans les liaisons pivot en E et F par exemple, pour les modéliser par des rotules, permettrait de lever l'hyperstatisme ($h = 6 \cdot 1 - (1 + 1 + 3 + 3) + 2 = 0$ une mobilité étant rajoutée par la rotation de la pièce 2 sur elle-même permise par les 2 rotules)

Q16. Ecrire les éléments de réduction des torseurs $\{V_{2/3}\}$, $\{V_{3/1}\}$ et $\{V_{2/0}\}$ au point A dans la base B_0 en fonction de a , b , c , θ et des inconnues cinématiques.

$$\{V_{3/1}\} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \omega_{31z} & 0 \end{Bmatrix}_{E, B_0}. \text{ Or } \vec{V}_{A,3/1} = \vec{V}_{E,3/1} + \vec{AE} \wedge \vec{\Omega}_{3/1} = \begin{Bmatrix} 0 & a \cdot \cos(\theta_1) + b \cdot \sin(\theta_1) \\ 0 + a \cdot \sin(\theta_1) - b \cdot \cos(\theta_1) \wedge \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{B_0} \omega_{31z}$$

$$\text{donc } \{V_{3/1}\} = \begin{Bmatrix} 0 & (a \cdot \sin(\theta) - b \cdot \cos(\theta)) \cdot \omega_{31z} \\ 0 & -(a \cdot \cos(\theta) + b \cdot \sin(\theta)) \cdot \omega_{31z} \\ \omega_{31z} & 0 \end{Bmatrix}_{A, B_0}$$

$$\{V_{2/0}\} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \omega_{20z} & 0 \end{Bmatrix}_{D, B_0}. \text{ Or } \vec{V}_{A,2/0} = \vec{V}_{D,2/0} + \vec{AD} \wedge \vec{\Omega}_{2/0} = \begin{Bmatrix} 0 & 2a \\ 0 + (2b + l) \wedge \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{B_0} \omega_{20z}$$

$$\{V_{2/0}\} = \begin{Bmatrix} 0 & -(2b + l) \cdot \omega_{20z} \\ 0 & -2a \cdot \omega_{20z} \\ \omega_{20z} & 0 \end{Bmatrix}_{A, B_0}$$

$$\{V_{2/3}\} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \omega_{23z} & 0 \end{Bmatrix}_{F, B_0} \quad . \text{ Or } \overrightarrow{V_{A,2/3}} = \overrightarrow{V_{F,2/3}} + \overrightarrow{AF} \wedge \overrightarrow{\Omega_{2/3}}$$

$$\overrightarrow{V_{A,2/3}} = \overrightarrow{V_{F,2/3}} + (\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DF}) \wedge \overrightarrow{\Omega_{2/3}} = \begin{array}{c|c|c} \begin{array}{c} 0 \\ 0+ \\ 0 \end{array} & \begin{array}{c} 2a - a \cdot \cos(\theta_2) - b \cdot \sin(\theta_2) \\ -(2b+l) - a \cdot \sin(\theta_2) + b \cdot \cos(\theta_2) \wedge \\ 0 \end{array} & \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ \omega_{23z} \end{array} \end{array} \quad .$$

$$\text{donc } \{V_{2/3}\} = \begin{Bmatrix} 0 & (-(2b+l) + a \cdot \sin(\theta) + b \cdot \cos(\theta)) \cdot \omega_{23z} \\ 0 & -(2a - a \cdot \cos(\theta) + b \cdot \sin(\theta)) \cdot \omega_{23z} \\ \omega_{23z} & 0 \end{Bmatrix}_{A, B_0} .$$

Q17. En utilisant la fermeture géométrique précédente au point A , montrer que l'on peut écrire le système d'équations suivant :

$$\begin{cases} 0 = 0 \\ 0 = 0 \\ \omega_{10z} + \omega_{31z} + \omega_{23z} - \omega_{20z} = 0 \\ c \cdot \omega_{20z} + (a \cdot \sin(\theta) - b \cdot \cos(\theta)) \cdot \omega_{31z} + (-c + a \cdot \sin(\theta) + b \cdot \cos(\theta)) \cdot \omega_{23z} = 0 \\ 2a \cdot \omega_{20z} - (a \cdot \cos(\theta) + b \cdot \sin(\theta)) \cdot \omega_{31z} - (2a - a \cdot \cos(\theta) + b \cdot \sin(\theta)) \cdot \omega_{23z} = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

$$\{V_{2/3}\} + \{V_{3/1}\} + \{V_{1/0}\} = \{V_{2/0}\} \text{ donc } \{V_{2/3}\} + \{V_{3/1}\} + \{V_{1/0}\} - \{V_{2/0}\} = \{0\} .$$

$$\text{Ainsi : } \begin{cases} 0 + 0 + 0 - 0 = 0 \\ 0 + 0 + 0 - 0 = 0 \\ \omega_{23z} + \omega_{31z} + \omega_{10z} - \omega_{20z} = 0 \\ (-(2b+l) + a \cdot \sin(\theta) + b \cdot \cos(\theta)) \cdot \omega_{23z} + (a \cdot \sin(\theta) - b \cdot \cos(\theta)) \cdot \omega_{31z} + 0 + (2b+l) \cdot \omega_{20z} = 0 \\ -(2a - a \cdot \cos(\theta) + b \cdot \sin(\theta)) \cdot \omega_{23z} - (a \cdot \cos(\theta) + b \cdot \sin(\theta)) \cdot \omega_{31z} + 0 + 2a \cdot \omega_{20z} = 0 \\ 0 + 0 + 0 - 0 = 0 \end{cases}$$

$$\text{Or } c = 2b+l, \text{ le système devient : } \begin{cases} 0 = 0 \\ 0 = 0 \\ \omega_{10z} + \omega_{31z} + \omega_{23z} - \omega_{20z} = 0 \\ c \cdot \omega_{20z} + (a \cdot \sin(\theta) - b \cdot \cos(\theta)) \cdot \omega_{31z} + (-c + a \cdot \sin(\theta) + b \cdot \cos(\theta)) \cdot \omega_{23z} = 0 \\ 2a \cdot \omega_{20z} - (a \cdot \cos(\theta) + b \cdot \sin(\theta)) \cdot \omega_{31z} - (2a - a \cdot \cos(\theta) + b \cdot \sin(\theta)) \cdot \omega_{23z} = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

Q18. Montrer que l'on peut mettre ce système sous la forme $A \cdot X = B$, avec $A \in M_3(\mathbb{R})$, que l'on

précisera, $X = \begin{pmatrix} \omega_{31z} \\ \omega_{23z} \\ \omega_{20z} \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} -\omega_{10z} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Ce système est équivalent à :

$$\begin{cases} \omega_{31z} + \omega_{23z} - \omega_{20z} = -\omega_{10z} \\ (a \cdot \sin(\theta) - b \cdot \cos(\theta)) \cdot \omega_{31z} + (-c + a \cdot \sin(\theta) + b \cdot \cos(\theta)) \cdot \omega_{23z} + c \cdot \omega_{20z} = 0 \\ -(a \cdot \cos(\theta) + b \cdot \sin(\theta)) \cdot \omega_{31z} - (2a - a \cdot \cos(\theta) + b \cdot \sin(\theta)) \cdot \omega_{23z} + 2a \cdot \omega_{20z} = 0 \end{cases}$$

Qui s'écrit sous forme matricielle :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ a \cdot \sin(\theta) - b \cdot \cos(\theta) & -c + a \cdot \sin(\theta) + b \cdot \cos(\theta) & c \\ -a \cdot \cos(\theta) - b \cdot \sin(\theta) & -2a + a \cdot \cos(\theta) - b \cdot \sin(\theta) & 2a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \omega_{31z} \\ \omega_{23z} \\ \omega_{20z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\omega_{10z} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ainsi : $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ a \cdot \sin(\theta) - b \cdot \cos(\theta) & -c + a \cdot \sin(\theta) + b \cdot \cos(\theta) & c \\ -a \cdot \cos(\theta) - b \cdot \sin(\theta) & -2a + a \cdot \cos(\theta) - b \cdot \sin(\theta) & 2a \end{pmatrix}$

Q19. Calculer le déterminant de la matrice A et vérifier qu'il est proportionnel à :

$$D = (2 \cdot a \cdot b - a \cdot c) \cdot \cos(\theta) + (2 \cdot a^2 + b \cdot c) \cdot \sin(\theta) - (a^2 + b^2) \cdot \sin(2\theta)$$

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ a \cdot \sin(\theta) - b \cdot \cos(\theta) & -c + a \cdot \sin(\theta) + b \cdot \cos(\theta) & c \\ -a \cdot \cos(\theta) - b \cdot \sin(\theta) & -2a + a \cdot \cos(\theta) - b \cdot \sin(\theta) & 2a \end{vmatrix}$$

En développant par rapport à la 1^{ère} colonne :

$$\begin{aligned} \det(A) &= (-c + a \cdot \sin(\theta) + b \cdot \cos(\theta)) \cdot 2a + c \cdot (2a - a \cdot \cos(\theta) + b \cdot \sin(\theta)) \\ &\quad - (a \cdot \sin(\theta) - b \cdot \cos(\theta)) \cdot (2a - 2a + a \cdot \cos(\theta) - b \cdot \sin(\theta)) \\ &\quad - (a \cdot \cos(\theta) + b \cdot \sin(\theta)) \cdot (c - c + a \cdot \sin(\theta) + b \cdot \cos(\theta)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \det(A) &= -2a \cdot c + 2a^2 \cdot \sin(\theta) + 2a \cdot b \cdot \cos(\theta) + 2a \cdot c - a \cdot c \cdot \cos(\theta) + b \cdot c \cdot \sin(\theta) \\ &\quad - (a \cdot \sin(\theta) - b \cdot \cos(\theta)) \cdot (a \cdot \cos(\theta) - b \cdot \sin(\theta)) - (a \cdot \cos(\theta) + b \cdot \sin(\theta)) \cdot (a \cdot \sin(\theta) + b \cdot \cos(\theta)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \det(A) &= 2a^2 \cdot \sin(\theta) + 2a \cdot b \cdot \cos(\theta) - a \cdot c \cdot \cos(\theta) + b \cdot c \cdot \sin(\theta) \\ &\quad - (a^2 \cdot \sin(\theta) \cdot \cos(\theta) - a \cdot b \cdot \cos^2(\theta) - a \cdot b \cdot \sin^2(\theta) + b^2 \cdot \sin(\theta) \cdot \cos(\theta)) \\ &\quad - (a^2 \cdot \sin(\theta) \cdot \cos(\theta) + a \cdot b \cdot \sin^2(\theta) + a \cdot b \cdot \cos^2(\theta) + b^2 \cdot \sin(\theta) \cdot \cos(\theta)) \end{aligned}$$

$$\det(A) = (2 \cdot a^2 + b \cdot c) \cdot \sin(\theta) + (2 \cdot a \cdot b - a \cdot c) \cdot \cos(\theta) - 2(a^2 + b^2) \cdot \sin(\theta) \cdot \cos(\theta)$$

Ainsi : $\det(A) = (2 \cdot a \cdot b - a \cdot c) \cdot \cos(\theta) + (2 \cdot a^2 + b \cdot c) \cdot \sin(\theta) - (a^2 + b^2) \cdot \sin(2\theta) = D$

Q20. Montrer, à l'aide de la figure 3, que ce système a une unique solution pour $\theta \in [-10^\circ; 10^\circ]$.

$\det(A)$ ne s'annule jamais sur l'intervalle $\theta \in [-10^\circ; 10^\circ]$, donc A est inversible.

Ce système a donc une unique solution sur $\theta \in [-10^\circ; 10^\circ]$.

II.2 - Analyse du tracking vidéo du mouvement d'un léopard.

Q21. Démontrer que $V_t = \overline{t^2} - \bar{t}^2$.

$$\begin{aligned}
 V_t &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (t_i - \bar{t})^2, \text{ donc : } V_t = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (t_i^2 - 2t_i \cdot \bar{t} + \bar{t}^2) \\
 &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n t_i^2 - 2 \cdot \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (t_i \cdot \bar{t}) + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \bar{t}^2 \\
 &= \overline{t^2} - 2 \cdot \bar{t} \cdot \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n t_i + \bar{t}^2 \cdot \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n 1 \\
 &= \overline{t^2} - 2\bar{t} \cdot \bar{t} + \bar{t}^2 \cdot \frac{1}{n} \cdot n
 \end{aligned}$$

$V_t = \overline{t^2} - \bar{t}^2$

Q22. Démontrer que $\text{Cov}(t, \theta) = \overline{\theta t} - \bar{t} \cdot \bar{\theta}$.

$$\begin{aligned}
 \text{Cov}(t, \theta) &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (t_i - \bar{t})(\theta_i - \bar{\theta}), \text{ donc : } \text{Cov}(t, \theta) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (t_i \cdot \theta_i - \bar{t} \cdot \theta_i - t_i \cdot \bar{\theta} + \bar{t} \cdot \bar{\theta}) \\
 &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (t_i \cdot \theta_i) - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (\bar{t} \cdot \theta_i) - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (t_i \cdot \bar{\theta}) + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (\bar{t} \cdot \bar{\theta}) \\
 &= \overline{\theta t} - \bar{t} \cdot \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (\theta_i) - \bar{\theta} \cdot \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (t_i) + \bar{t} \cdot \bar{\theta} \cdot \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n 1 \\
 &= \overline{\theta t} - \bar{t} \cdot \bar{\theta} - \bar{\theta} \cdot \bar{t} + \bar{t} \cdot \bar{\theta} \cdot \frac{1}{n} \cdot n
 \end{aligned}$$

$\text{Cov}(t, \theta) = \overline{\theta t} - \bar{t} \cdot \bar{\theta}$

Q23. Calculer les deux dérivées partielles d'ordre 1 de la fonction e .

$$\begin{aligned}
 e(u, v) &= \sum_{i=1}^n (\theta_i - u \cdot t_i - v)^2, \text{ donc : } \frac{\partial e(u, v)}{\partial u} = \frac{\partial \sum_{i=1}^n (\theta_i - u \cdot t_i - v)^2}{\partial u} \\
 &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial (\theta_i - u \cdot t_i - v)^2}{\partial u} \\
 &= \sum_{i=1}^n 2 \cdot (-t_i) \cdot (\theta_i - u \cdot t_i - v) \\
 &= -2 \sum_{i=1}^n (t_i \cdot \theta_i - u \cdot t_i^2 - v \cdot t_i) \\
 &= -2n \cdot \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (t_i \cdot \theta_i) - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (u \cdot t_i^2) - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (v \cdot t_i) \right) \\
 &= -2n \cdot \left(\overline{\theta t} - u \cdot \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n t_i^2 - v \cdot \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n t_i \right)
 \end{aligned}$$

$$\frac{\partial e(u, v)}{\partial u} = -2n \cdot (\overline{\theta t} - u \cdot \overline{t^2} - v \cdot \bar{t})$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial e(u,v)}{\partial v} &= \frac{\partial \sum_{i=1}^n (\theta_i - u \cdot t_i - v)^2}{\partial v}, \text{ donc : } \frac{\partial e(u,v)}{\partial v} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial (\theta_i - u \cdot t_i - v)^2}{\partial v} \\ &= \sum_{i=1}^n 2 \cdot (-1) \cdot (\theta_i - u \cdot t_i - v) \\ &= -2n \cdot \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \theta_i - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (u \cdot t_i) - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n v \right) \\ &= -2n \cdot \left(\bar{\theta} - u \cdot \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n t_i - v \cdot \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n 1 \right)\end{aligned}$$

$$\frac{\partial e(u,v)}{\partial v} = -2n \cdot (\bar{\theta} - u \cdot \bar{t} - v)$$

Q24. Vérifier que les coordonnées de celui-ci sont $\left(\frac{\text{Cov}(t, \theta)}{V_t}, \bar{\theta} - \frac{\text{Cov}(t, \theta)}{V_t} \cdot \bar{t} \right)$.

Cherchons le point critique de la fonction e .

$$\frac{\partial e(u,v)}{\partial u} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad -2n \cdot (\bar{\theta} - u \cdot \bar{t}^2 - v \cdot \bar{t}) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \bar{\theta} - u \cdot \bar{t}^2 - v \cdot \bar{t} = 0$$

$$\frac{\partial e(u,v)}{\partial v} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad -2n \cdot (\bar{\theta} - u \cdot \bar{t} - v) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \bar{\theta} - u \cdot \bar{t} - v = 0$$

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial e(u,v)}{\partial u}, \frac{\partial e(u,v)}{\partial v} \right) &= (0,0) \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \bar{\theta} - u \cdot \bar{t}^2 - v \cdot \bar{t} = 0 \\ \bar{\theta} - u \cdot \bar{t} - v = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \quad \begin{cases} \bar{\theta} - u \cdot \bar{t}^2 - (\bar{\theta} - u \cdot \bar{t}) \cdot \bar{t} = 0 \\ v = \bar{\theta} - u \cdot \bar{t} \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \quad \begin{cases} \bar{\theta} - u \cdot (\bar{t}^2 - \bar{t}^2) - \bar{\theta} \cdot \bar{t} = 0 \\ v = \bar{\theta} - u \cdot \bar{t} \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \quad \begin{cases} u = \frac{\bar{\theta} - \bar{\theta} \cdot \bar{t}}{\bar{t}^2 - \bar{t}^2} \\ v = \bar{\theta} - u \cdot \bar{t} \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \quad \begin{cases} u = \frac{\text{Cov}(t, \theta)}{V_t} \\ v = \bar{\theta} - \frac{\text{Cov}(t, \theta)}{V_t} \cdot \bar{t} \end{cases}\end{aligned}$$

Ainsi, le minimum de la fonction e a pour coordonnées $(m, p) = \left(\frac{\text{Cov}(t, \theta)}{V_t}, \bar{\theta} - \frac{\text{Cov}(t, \theta)}{V_t} \cdot \bar{t} \right)$.

Q25. Faire l'application numérique pour m et p , on pourra arrondir aux valeurs entières.

On reprend les résultats intermédiaires de la question précédente : $m = \frac{\overline{\theta t} - \bar{\theta} \cdot \bar{t}}{\bar{t}^2 - \bar{t}^2}$ et $p = \bar{\theta} - m \cdot \bar{t}$.

Application Numérique : $m = \frac{1.03 - 0.4 \cdot 0.25}{0.084 - 0.25 \cdot 0.25} = \frac{1.03 - 0.1}{0.084 - 0.0625} = \frac{0.93}{0.0215} = \frac{93}{2.15}$ soit $m \simeq 45$
 $p \simeq 0.4 - 45 \cdot 0.25$ soit $p \simeq 0.4 - 11.25$ soit $p \simeq -10.85$

Q26. Dédurre de la question précédente la valeur de ω_{10z} constante permettant de copier le mouvement du lézard de la vidéo.

La régression linéaire a permis de modéliser l'évolution de l'angle θ en fonction du temps t : $\theta = 45 \cdot t - 10.85$

Ainsi, $\omega_{10z} = \frac{d\theta}{dt}$ soit $\omega_{10z} = 45^\circ/s$ ou $\omega_{10z} = 0.75 \text{ rad/s}$.

Partie III. Dimensionnement des moteurs du robot

Objectif : Etude du dimensionnement des moteurs du robot afin de permettre l'ascension d'une paroi verticale.

Q27. Déterminer la résultante dynamique $\overrightarrow{R_{d,2/0}}$ en projections sur $\overrightarrow{x_2}$ et $\overrightarrow{y_2}$ en fonction de m_2 , ω_{20z} , $\frac{d\omega_{20z}}{dt}$, x_{G_2} et de y_{G_2} .

$$\overrightarrow{R_{d,2/0}} = m_2 \cdot \overrightarrow{\Gamma_{G_2,2/0}}, \text{ or } \overrightarrow{\Gamma_{G_2,2/0}} = \left(\frac{d\overrightarrow{V_{G_2,2/0}}}{dt} \right)_0 \text{ et } \overrightarrow{V_{G_2,2/0}} = \left(\frac{d\overrightarrow{DG_2}}{dt} \right)_0 \text{ car } G_2 \text{ appartient physiquement à 2.}$$

$$\overrightarrow{V_{G_2,2/0}} = \left(\frac{d(x_{G_2} \cdot \overrightarrow{x_2} + y_{G_2} \cdot \overrightarrow{y_2})}{dt} \right)_0 = x_{G_2} \cdot \left(\frac{d\overrightarrow{x_2}}{dt} \right)_0 + y_{G_2} \cdot \left(\frac{d\overrightarrow{y_2}}{dt} \right)_0 = x_{G_2} \cdot \left(\frac{d\overrightarrow{x_2}}{dt} \right)_0 + y_{G_2} \cdot \left(\frac{d\overrightarrow{y_2}}{dt} \right)_0 = x_{G_2} \cdot \dot{\theta}_2 \cdot \overrightarrow{y_2} - y_{G_2} \cdot \dot{\theta}_2 \cdot \overrightarrow{x_2}$$

(d'après les figures de passage de la Q1).

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\Gamma_{G_2,2/0}} &= \left(\frac{d(x_{G_2} \cdot \dot{\theta}_2 \cdot \overrightarrow{y_2} - y_{G_2} \cdot \dot{\theta}_2 \cdot \overrightarrow{x_2})}{dt} \right)_0 \\ &= x_{G_2} \cdot \left(\frac{d(\dot{\theta}_2 \cdot \overrightarrow{y_2})}{dt} \right)_0 - y_{G_2} \cdot \left(\frac{d(\dot{\theta}_2 \cdot \overrightarrow{x_2})}{dt} \right)_0 \\ &= x_{G_2} \cdot (\ddot{\theta}_2 \cdot \overrightarrow{y_2} - \dot{\theta}_2^2 \cdot \overrightarrow{x_2}) - y_{G_2} \cdot (\ddot{\theta}_2 \cdot \overrightarrow{x_2} + \dot{\theta}_2^2 \cdot \overrightarrow{y_2}) \end{aligned}$$

$$= -(y_{G_2} \cdot \ddot{\theta}_2 + x_{G_2} \cdot \dot{\theta}_2^2) \cdot \overrightarrow{x_2} + (x_{G_2} \cdot \ddot{\theta}_2 - y_{G_2} \cdot \dot{\theta}_2^2) \cdot \overrightarrow{y_2}$$

$$\text{Ainsi : } \overrightarrow{R_{d,2/0}} = m_2 \cdot \left(- \left(y_{G_2} \cdot \frac{d\omega_{20z}}{dt} + x_{G_2} \cdot \omega_{20z}^2 \right) \cdot \overrightarrow{x_2} + \left(x_{G_2} \cdot \frac{d\omega_{20z}}{dt} - y_{G_2} \cdot \omega_{20z}^2 \right) \cdot \overrightarrow{y_2} \right)$$

Q28. Déterminer la projection du moment dynamique $\overrightarrow{\delta_{F,2/0}}$ sur $\vec{z}_0$ en fonction de m_2 , J_2 , ω_{20z} , $\frac{d\omega_{20z}}{dt}$, a , b , x_{G_2} et de y_{G_2} .

Le moment dynamique $\overrightarrow{\delta_{F,2/0}}$ est défini par : $\overrightarrow{\delta_{F,2/0}} = \left(\frac{d\overrightarrow{\sigma_{F,2/0}}}{dt} \right)_0 + m_2 \cdot \overrightarrow{V_{F/0}} \wedge \overrightarrow{V_{G_2,2/0}}$.

Le moment cinétique $\overrightarrow{\sigma_{F,2/0}}$ est défini par : $\overrightarrow{\sigma_{F,2/0}} = [I]_{F,2} \cdot \overrightarrow{\Omega_{2/0}} + m_2 \cdot \overrightarrow{FG_2} \wedge \overrightarrow{V_{F,2/0}}$.

$$\overrightarrow{FG_2} = \overrightarrow{FD} + \overrightarrow{DG_2} = -a \cdot \vec{x}_2 + b \cdot \vec{y}_2 + x_{G_2} \cdot \vec{x}_2 + y_{G_2} \cdot \vec{y}_2 = (x_{G_2} - a) \cdot \vec{x}_2 + (y_{G_2} + b) \cdot \vec{y}_2$$

$$\overrightarrow{V_{F,2/0}} = \overrightarrow{V_{F/0}} = \left(\frac{d\overrightarrow{DF}}{dt} \right)_0 = \left(\frac{d(a \cdot \vec{x}_2 - b \cdot \vec{y}_2)}{dt} \right)_0 = a \cdot \omega_{20z} \cdot \vec{y}_2 + b \cdot \omega_{20z} \cdot \vec{x}_2 \text{ car } F \text{ appartient physiquement à 2.}$$

$$\overrightarrow{FG_2} \wedge \overrightarrow{V_{F,2/0}} = \begin{pmatrix} x_{G_2} - a \\ y_{G_2} + b \\ 0 \end{pmatrix}_{B_1} \wedge \begin{pmatrix} b \cdot \omega_{20z} \\ a \cdot \omega_{20z} \\ 0 \end{pmatrix}_{B_1} = ((x_{G_2} - a) \cdot a \cdot \omega_{20z} - (y_{G_2} + b) \cdot b \cdot \omega_{20z}) \cdot \vec{z}_0$$

$$[I]_{F,2} \cdot \overrightarrow{\Omega_{2/0}} = \begin{bmatrix} A & -F & -E \\ -F & B & -D \\ -E & -D & J_2 \end{bmatrix}_{B_2} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega_{20z} \end{pmatrix}_{B_2} = \begin{pmatrix} -E \cdot \omega_{20z} \\ -D \cdot \omega_{20z} \\ J_2 \cdot \omega_{20z} \end{pmatrix}_{B_2}$$

$$\overrightarrow{\sigma_{F,2/0}} = \begin{pmatrix} -E \cdot \omega_{20z} \\ -D \cdot \omega_{20z} \\ J_2 \cdot \omega_{20z} + m_2 \cdot ((x_{G_2} - a) \cdot a \cdot \omega_{20z} - (y_{G_2} + b) \cdot b \cdot \omega_{20z}) \end{pmatrix}_{B_2}$$

$$\text{Donc : } \overrightarrow{\delta_{F,2/0}} \cdot \vec{z}_0 = \left(\left(\frac{d\overrightarrow{\sigma_{F,2/0}}}{dt} \right)_0 + m_2 \cdot \overrightarrow{V_{F/0}} \wedge \overrightarrow{V_{G_2,2/0}} \right) \cdot \vec{z}_0 = \left(\frac{d\overrightarrow{\sigma_{F,2/0}}}{dt} \right)_0 \cdot \vec{z}_0 + (m_2 \cdot \overrightarrow{V_{F/0}} \wedge \overrightarrow{V_{G_2,2/0}}) \cdot \vec{z}_0 \text{ et } \vec{z}_0 = \vec{z}_2.$$

$$\left(\frac{d\overrightarrow{\sigma_{F,2/0}}}{dt} \right)_0 \cdot \vec{z}_0 = J_2 \cdot \frac{d\omega_{20z}}{dt} + m_2 \cdot (x_{G_2} - a) \cdot a \cdot \frac{d\omega_{20z}}{dt} - m_2 \cdot (y_{G_2} + b) \cdot b \cdot \frac{d\omega_{20z}}{dt}$$

$$\overrightarrow{V_{F/0}} \wedge \overrightarrow{V_{G_2,2/0}} = \begin{pmatrix} b \cdot \omega_{20z} \\ a \cdot \omega_{20z} \\ 0 \end{pmatrix}_{B_1} \wedge \begin{pmatrix} -y_{G_2} \cdot \omega_{20z} \\ x_{G_2} \cdot \omega_{20z} \\ 0 \end{pmatrix}_{B_1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ (b \cdot x_{G_2} + a \cdot y_{G_2}) \cdot \omega_{20z}^2 \end{pmatrix}_{B_1}$$

$$\text{Enfin, il vient : } \overrightarrow{\delta_{F,2/0}} \cdot \vec{z}_0 = J_2 \cdot \frac{d\omega_{20z}}{dt} + m_2 \cdot \left((x_{G_2} - a) \cdot a \cdot \frac{d\omega_{20z}}{dt} - (y_{G_2} + b) \cdot b \cdot \frac{d\omega_{20z}}{dt} + (b \cdot x_{G_2} + a \cdot y_{G_2}) \cdot \omega_{20z}^2 \right)$$

Q29. En déduire les éléments de réduction du torseur dynamique simplifié de $\{D_{2/0}\}$ au point F dans la base B_0 .

Montrer qu'il peut s'écrire sous la forme $\{D_{2/0}\} = \begin{Bmatrix} 0 & Le \\ 0 & Me \\ 0 & J_{eq} \cdot \frac{d\omega_{20z}}{dt} \end{Bmatrix}_{F, B_0}$ et préciser l'expression de J_{eq2} .

Les expressions de Le et Me ne sont pas demandées.

Comme $x_{G_1} = y_{G_1} = 0$, $\vec{R}_{a,2/0} = \vec{0}$ et $\vec{\delta}_{F,2/0} \cdot \vec{z}_0 = J_2 \cdot \frac{d\omega_{20z}}{dt} - m_2 \cdot (a^2 + b^2) \cdot \frac{d\omega_{20z}}{dt}$

Ainsi, $\{D_{2/0}\} = \begin{Bmatrix} 0 & Le \\ 0 & Me \\ 0 & (J_2 - m_2 \cdot (a^2 + b^2)) \cdot \frac{d\omega_{20z}}{dt} \end{Bmatrix}_{F, B_0}$ qui peut s'écrire : $\{D_{2/0}\} = \begin{Bmatrix} 0 & Le \\ 0 & Me \\ 0 & J_{eq2} \cdot \frac{d\omega_{20z}}{dt} \end{Bmatrix}_{F, B_0}$

en posant $J_{eq2} = J_2 - m_2 \cdot (a^2 + b^2)$.

Q30. Après avoir isolé la pièce 2 et fait le bilan des actions mécaniques extérieures, déterminer le système de 6 équations issu du principe fondamental de la dynamique, au point D , projeté dans la base B_0 .

J'isole la pièce 2.

Elle est soumise à :

Action de la pièce 0 sur 2 en D : $\{T_{0 \rightarrow 2}\} = \begin{Bmatrix} X_{02} & L_{02} \\ Y_{02} & M_{02} \\ Z_{02} & 0 \end{Bmatrix}_{D, B_0}$

Action de la pesanteur sur 2 en D : $\{T_{ps \rightarrow 2}\} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ -m_2 \cdot g & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{D, B_0}$

Action du moteur entre 3 et 2 en F : $\{T_{Mot \rightarrow 2}\} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & C_m \end{Bmatrix}_{F, B_0} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & C_m \end{Bmatrix}_{D, B_0}$ car c'est un torseur Couple.

Action de la pièce 3 sur 2 en F : $\{T_{3 \rightarrow 2}\} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ -P - m \cdot \frac{dv_y}{dt} & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{F, B_0}$

Ecrivons ce torseur au point D .

$$\vec{M}_{D,3 \rightarrow 2} = \vec{M}_{F,3 \rightarrow 2} + D\vec{F} \wedge \vec{R}_{3 \rightarrow 2}$$

En reprenant les résultats de la Q3 avec $-\theta_2 = \theta$:

$$\overrightarrow{M}_{D,3 \rightarrow 2} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}_{B_0} + \begin{Bmatrix} -a \cdot \cos(\theta) + b \cdot \sin(\theta) \\ a \cdot \sin(\theta) + b \cdot \cos(\theta) \\ 0 \end{Bmatrix}_{B_0} \wedge \begin{Bmatrix} 0 \\ -P - m \cdot \frac{dv_y}{dt} \\ 0 \end{Bmatrix}_{B_0} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ (a \cdot \cos(\theta) - b \cdot \sin(\theta)) \cdot \left(P + m \cdot \frac{dv_y}{dt} \right) \end{Bmatrix}_{B_0}$$

Donc : Action de la pièce 3 sur 2 en $F : \{T_{3 \rightarrow 2}\} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ -P - m \cdot \frac{dv_y}{dt} & 0 \\ 0 & (a \cdot \cos(\theta) - b \cdot \sin(\theta)) \cdot \left(P + m \cdot \frac{dv_y}{dt} \right) \end{Bmatrix}_{D, B_0}$.

$\{D_{2/0}\} = \begin{Bmatrix} 0 & Le \\ 0 & Me \\ 0 & J_{eq2} \cdot \frac{d\omega_{20z}}{dt} \end{Bmatrix}_{F, B_0} = \begin{Bmatrix} 0 & Le \\ 0 & Me \\ 0 & J_{eq2} \cdot \frac{d\omega_{20z}}{dt} \end{Bmatrix}_{D, B_0}$ car c'est un torseur Couple.

J'applique le Principe Fondamental de la Dynamique à 2, en D dans R_0 supposé galiléen.

$$\begin{cases} X_{02} + 0 + 0 + 0 = 0 & (1) \\ Y_{02} + -m_2 \cdot g + 0 - P - m \cdot \frac{dv_y}{dt} = 0 & (2) \\ Z_{02} + 0 + 0 + 0 = 0 & (3) \\ L_{02} + 0 + 0 + 0 = Le & (4) \\ M_{02} + 0 + 0 + 0 = Me & (5) \\ 0 + 0 + C_m + (a \cdot \cos(\theta) - b \cdot \sin(\theta)) \cdot \left(P + m \cdot \frac{dv_y}{dt} \right) = J_{eq2} \cdot \frac{d\omega_{20z}}{dt} & (6) \end{cases}$$

Q31. Démontrer que l'on peut alors écrire :

$$C_m + (a \cdot \cos(\theta) - b \cdot \sin(\theta)) \cdot \left(m \cdot a \cdot \frac{d\omega_{20z}}{dt} + P \right) = J_{eq2} \cdot \frac{d\omega_{20z}}{dt} \quad (1)$$

L'équation 6 nous donne : $C_m + (a \cdot \cos(\theta) - b \cdot \sin(\theta)) \cdot \left(P + m \cdot \frac{dv_y}{dt} \right) = J_{eq2} \cdot \frac{d\omega_{20z}}{dt}$.

Or $v_y = a \cdot \omega_{20z}$, donc $\frac{dv_y}{dt} = a \cdot \frac{d\omega_{20z}}{dt}$. Ainsi, $C_m + (a \cdot \cos(\theta) - b \cdot \sin(\theta)) \cdot \left(m \cdot a \cdot \frac{d\omega_{20z}}{dt} + P \right) = J_{eq2} \cdot \frac{d\omega_{20z}}{dt}$.

Q32. Donner les développements limités à l'ordre 1 des fonctions $\cos$ et $\sin$ en 0.

$\cos(\theta) = 1 + o(\theta)$ et $\sin(\theta) = \theta + o(\theta)$ en 0.

Q33. En déduire que l'équation linéarisée à résoudre est alors :

$$\left((b \cdot \theta - a) \cdot m \cdot a + J_{eq2}\right) \cdot \frac{d^2\theta}{dt^2} + (a - b \cdot \theta) \cdot P + Cm = 0. \quad (2)$$

$$Cm + (a \cdot \cos(\theta) - b \cdot \sin(\theta)) \cdot \left(m \cdot a \cdot \frac{d\omega_{20z}}{dt} + P\right) = J_{eq2} \cdot \frac{d\omega_{20z}}{dt}.$$

Avec les résultats de la question précédente, et sachant que $\theta_2 = -\theta$ et $\omega_{20z} = \frac{d\theta_2}{dt}$, l'équation devient :

$$Cm + (a - b \cdot \theta) \cdot \left(-m \cdot a \cdot \frac{d^2\theta}{dt^2} + P\right) = -J_{eq2} \cdot \frac{d^2\theta}{dt^2}$$

$$\text{Soit } Cm - (a - b \cdot \theta) \cdot m \cdot a \cdot \frac{d^2\theta}{dt^2} + J_{eq2} \cdot \frac{d^2\theta}{dt^2} + (a - b \cdot \theta) \cdot P = 0.$$

$$\text{Ainsi : } \left((b \cdot \theta - a) \cdot m \cdot a + J_{eq2}\right) \cdot \frac{d^2\theta}{dt^2} + (a - b \cdot \theta) \cdot P + Cm = 0$$

Q34. Montrer qu'on peut écrire $(b \cdot \theta - a) \cdot m \cdot a + J_{eq2} \approx J_{eq2} - m \cdot a^2$ mais pas $a - b \cdot \theta \approx a$.

L'énoncé nous dit qu'on peut négliger une grandeur dans une somme à condition que la valeur à négliger soit inférieure à 5% du reste.

De plus, $J_{eq2} - m \cdot a^2 = 9 \cdot 10^{-4} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$, $m = 0.25 \text{ kg}$, $a = 0.05 \text{ m}$ et $b = 0.02 \text{ m}$.

Ainsi, $(b \cdot \theta - a) \cdot m \cdot a + J_{eq2} = b \cdot \theta \cdot m \cdot a + J_{eq2} - m \cdot a^2$.

$$\text{Or } b \cdot \theta \cdot m \cdot a = 0.02 \cdot \frac{\pi}{18} \cdot 0.25 \cdot 0.05 = \frac{\pi}{9} \cdot 0.000125 = \frac{\pi}{9} \cdot 125 \cdot 10^{-6} \approx \frac{1}{3} \cdot 125 \cdot 10^{-6} \approx 4.17 \cdot 10^{-5}.$$

$$\text{De plus : } 5\% \cdot (J_{eq2} - m \cdot a^2) = 0.05 \cdot 9 \cdot 10^{-4} = 4.5 \cdot 10^{-5}.$$

On peut négliger $b \cdot \theta \cdot m \cdot a$ devant $J_{eq2} - m \cdot a^2$ et on peut donc écrire $(b \cdot \theta - a) \cdot m \cdot a + J_{eq2} \approx J_{eq2} - m \cdot a^2$

$$\text{Par contre, } b \cdot \theta = 0.02 \cdot \frac{\pi}{18} = \frac{\pi}{9} \cdot 0.01 = \frac{\pi}{9} \cdot 10^{-2} \approx \frac{1}{3} \cdot 10^{-2} \approx 3.33 \cdot 10^{-3}.$$

Comme $5\% \cdot a = 0.05 \cdot 0.05 = 0.0025 = 2.5 \cdot 10^{-3}$, on ne peut pas négliger $b \cdot \theta$ devant a , et on ne peut donc pas écrire $a - b \cdot \theta \approx a$

Q35. Simplifier en conséquence l'équation (2) et vérifier que l'on obtient le système de Cauchy suivant :

$$\begin{cases} J_{eq} \cdot \frac{d^2\theta}{dt^2} - b \cdot \theta \cdot P = -a \cdot P - Cm \\ \dot{\theta}(0) = 0^\circ \cdot s^{-1} \\ \theta(0) = -10^\circ = -\frac{\pi}{18} rad \end{cases} \quad (C)$$

$$(-m \cdot \alpha^2 + J_{eq2}) \cdot \frac{d^2\theta}{dt^2} + a \cdot P - b \cdot \theta \cdot P = -Cm \text{ soit : } J_{eq} \cdot \frac{d^2\theta}{dt^2} - b \cdot \theta \cdot P = -a \cdot P - Cm.$$

De plus, on veut réaliser l'ascension d'une paroi en imitant le mouvement du léopard. La partie II.2 nous a permis de déterminer que le léopard impose, au début de son mouvement, $\theta = -10^\circ$ et une vitesse nulle.

Ainsi, on peut définir le système de Cauchy suivant :

$$\begin{cases} J_{eq} \cdot \frac{d^2\theta}{dt^2} - b \cdot \theta \cdot P = -a \cdot P - Cm \\ \dot{\theta}(0) = 0^\circ \cdot s^{-1} \\ \theta(0) = -10^\circ = -\frac{\pi}{18} rad \end{cases}$$

Q36. Résoudre le problème de Cauchy (C). En posant $\alpha = \sqrt{\frac{b \cdot P}{J_{eq}}}$ et $K = \frac{Cm + a \cdot P}{b \cdot P}$, on écrira la solution

de (C) sous la forme de l'équation (3). On précisera les expressions de k_1 et k_2 en fonction de K .

$$\theta(t) = k_1 \cdot e^{\alpha t} + k_2 \cdot e^{-\alpha t} + K \quad (3)$$

L'équation différentielle est $J_{eq} \cdot \frac{d^2\theta}{dt^2} - b \cdot \theta \cdot P = -a \cdot P - Cm$, ou $\frac{d^2\theta}{dt^2} - \frac{b \cdot P}{J_{eq}} \cdot \theta = -\frac{a \cdot P + Cm}{J_{eq}}$

L'équation homogène est $\frac{d^2\theta}{dt^2} - \frac{b \cdot P}{J_{eq}} \cdot \theta = 0$ ou $\frac{d^2\theta}{dt^2} - \alpha^2 \cdot \theta = 0$

L'équation caractéristique est donc $r^2 - \alpha^2 = 0$ et ses solutions $r_1 = \alpha$ et $r_2 = -\alpha$ réelles.

Les solutions de l'équation homogène sont donc de la forme : $\theta(t) = k_1 \cdot e^{\alpha t} + k_2 \cdot e^{-\alpha t}$, avec $(k_1, k_2) \in \mathbb{R}^2$

Le second membre est constant, on cherche donc la solution particulière sous la forme d'une constante :

$$\theta_p(t) = \gamma \text{ et } -\frac{b \cdot P}{J_{eq}} \cdot \gamma = -\frac{a \cdot P + Cm}{J_{eq}} \text{ donc } \gamma = \frac{a \cdot P + Cm}{b \cdot P} = K$$

Les solutions de l'équation différentielle sont donc $\theta(t) = k_1 \cdot e^{\alpha t} + k_2 \cdot e^{-\alpha t} + K$, $(k_1, k_2) \in \mathbb{R}^2$

De plus : $\dot{\theta}(0) = 0^\circ \cdot s^{-1}$ or $\dot{\theta}(t) = k_1 \cdot \alpha \cdot e^{\alpha t} - k_2 \cdot \alpha \cdot e^{-\alpha t}$ et $\dot{\theta}(0) = k_1 \cdot \alpha - k_2 \cdot \alpha$, donc $(k_1 - k_2) \cdot \alpha = 0$

$$\theta(0) = -10^\circ = -\frac{\pi}{18} rad \text{ or } \theta(0) = k_1 + k_2 + K$$

$$\alpha \neq 0, \text{ donc on a } \begin{cases} k_1 = k_2 \\ -\frac{\pi}{18} = k_1 + k_2 + K \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k_1 = k_2 \\ -\frac{\pi}{18} = 2k_1 + K \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k_1 = k_2 \\ k_1 = -\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\pi}{18} + K \right) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k_1 = -\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\pi}{18} + K \right) \\ k_2 = -\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\pi}{18} + K \right) \end{cases}$$

La solution du problème de Cauchy (C) est donc : $\theta(t) = -\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\pi}{18} + K \right) \cdot (e^{\alpha t} + e^{-\alpha t}) + K$.

Q37. Vérifier que $\theta(t) = \frac{\pi}{18}$ est équivalent à l'équation (4).

$$-\frac{1}{2}\left(K + \frac{\pi}{18}\right) \cdot e^{2at} + \left(K - \frac{\pi}{18}\right)e^{at} - \frac{1}{2}\left(K + \frac{\pi}{18}\right) = 0 \quad (4)$$

$$\theta(t) = -\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\pi}{18} + K\right) \cdot (e^{at} + e^{-at}) + K$$

$$\begin{aligned} \text{Donc } \theta(t) = \frac{\pi}{18} &\Leftrightarrow -\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\pi}{18} + K\right) \cdot (e^{at} + e^{-at}) + K = \frac{\pi}{18} \\ &\Leftrightarrow -\left(\frac{\pi}{18} + K\right) \cdot (e^{at} + e^{-at}) + 2K - \frac{2\pi}{18} = 0 \\ &\Leftrightarrow -\left(\frac{\pi}{18} + K\right) \cdot e^{at} - \left(\frac{\pi}{18} + K\right) \cdot e^{-at} + 2 \cdot \left(K - \frac{\pi}{18}\right) = 0 \\ &\Leftrightarrow -\left(\frac{\pi}{18} + K\right) \cdot (e^{2at} \cdot e^{-at}) - \left(\frac{\pi}{18} + K\right) \cdot e^{-at} + 2 \cdot \left(K - \frac{\pi}{18}\right) (e^{at} \cdot e^{-at}) = 0 \\ &\Leftrightarrow e^{-at} \left(-\left(\frac{\pi}{18} + K\right) \cdot e^{2at} - \left(\frac{\pi}{18} + K\right) + 2 \cdot \left(K - \frac{\pi}{18}\right) e^{at} \right) = 0 \end{aligned}$$

$$e^{-at} \neq 0, \text{ donc } \theta(t) = \frac{\pi}{18} \Leftrightarrow -\frac{1}{2}\left(K + \frac{\pi}{18}\right) \cdot e^{2at} + \left(K - \frac{\pi}{18}\right)e^{at} - \frac{1}{2}\left(K + \frac{\pi}{18}\right) = 0$$

Q38. Justifier que l'équation (4) obtenue admet des solutions réelles si et seulement si $Cm \leq -a \cdot P$.

On pourra poser $X = e^{at}$

Posons $X = e^{at}$. L'équation (4) devient : $-\frac{1}{2}\left(K + \frac{\pi}{18}\right) \cdot X^2 + \left(K - \frac{\pi}{18}\right)X - \frac{1}{2}\left(K + \frac{\pi}{18}\right) = 0$

Calculons Δ :

$$\begin{aligned} \Delta &= \left(K - \frac{\pi}{18}\right)^2 - 4 \cdot \left(\frac{1}{2}\left(K + \frac{\pi}{18}\right)\right)^2 \\ &= \left(K - \frac{\pi}{18}\right)^2 - \left(K + \frac{\pi}{18}\right)^2 \\ &= \left(K^2 - 2K \cdot \frac{\pi}{18} + \frac{\pi^2}{18^2}\right) - \left(K^2 + 2K \cdot \frac{\pi}{18} + \frac{\pi^2}{18^2}\right) \end{aligned}$$

$$\Delta = -4K \cdot \frac{\pi}{18}$$

$$\begin{aligned} \text{L'équation (4) admet des solutions réelles si et seulement si } \Delta \geq 0 &\Leftrightarrow K \leq 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{a \cdot P + Cm}{b \cdot P} \leq 0 \\ &\Leftrightarrow a \cdot P + Cm \leq 0 \text{ car } b > 0 \text{ et } P > 0 \end{aligned}$$

Ainsi, l'équation (4) admet des solutions réelles si et seulement si $Cm \leq -a \cdot P$.

Q39. Cette condition étant vérifiée, exprimer les deux solutions X_1 et X_2 en fonction de K .

$$\Delta \geq 0 \text{ donc } X_1 = \frac{-\left(K - \frac{\pi}{18}\right) + \sqrt{-2K \cdot \frac{\pi}{9}}}{-\left(K + \frac{\pi}{18}\right)} \text{ et } X_2 = \frac{-\left(K - \frac{\pi}{18}\right) - \sqrt{-2K \cdot \frac{\pi}{9}}}{-\left(K + \frac{\pi}{18}\right)}$$

Q40. En faisant une application numérique, montrer qu'une seule des deux solutions peut correspondre à l'étude.

De grandes approximations peuvent être effectuées. On donne $\ln(2) \approx 0.7$. Les moteurs choisis ont un couple maximal $|C_m| = 0.2 N.m$

$$K = \frac{a \cdot P + C_m}{b \cdot P} \text{ avec } C_m \leq -a \cdot P. \quad a > 0 \text{ et } P > 0, \text{ donc } C_m = -0.2 N.m$$

$$\text{Application Numérique : } K = \frac{0.05 \cdot 0.25 \cdot 10 - 0.2}{0.02 \cdot 0.25 \cdot 10} = \frac{0.5 \cdot 0.25 - 0.2}{0.2 \cdot 0.25} = \frac{0.125 - 0.2}{0.05} = \frac{-0.075}{0.05} = \frac{-7.5}{5} = -1.5$$

$$\frac{\pi}{18} \approx \frac{3}{18} \approx \frac{1}{6} \approx 0.167$$

$$K + \frac{\pi}{18} \approx -1.5 + 0.167 \approx -1.343$$

$$K - \frac{\pi}{18} \approx -1.5 - 0.167 \approx -1.667$$

$$\sqrt{-2K \cdot \frac{\pi}{9}} \approx \sqrt{2 \cdot 1.5 \cdot \frac{3}{9}} \approx \sqrt{2 \cdot 0.5} \approx \sqrt{1} \approx 1$$

$$\text{Ainsi : } X_1 \approx \frac{1.667 + 1}{1.343} \approx \frac{2.667}{1.343} \approx 2 \text{ et } X_2 \approx \frac{1.667 - 1}{1.343} \approx \frac{0.667}{1.343} \approx 0.5.$$

Or $X = e^{\alpha t}$ avec $\alpha > 0$ et $t \geq 0$ donc $e^{\alpha t} \geq 1$ donc $X \geq 1$.

On en déduit que $X_1 \approx 2$ est la seule solution correspondant à l'étude.

$$e^{\alpha t} = 2 \text{ donc } \alpha \cdot t = \ln(2) \text{ donc } t = \frac{\ln(2)}{\alpha}$$

$$\alpha = \sqrt{\frac{b \cdot P}{J_{eq}}}. \text{ Application Numérique : } \alpha = \sqrt{\frac{0.02 \cdot 0.25 \cdot 10}{9 \cdot 10^{-4}}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 25 \cdot 10}{9}} = \frac{10}{3} \sqrt{5} \approx \frac{10 \cdot 2.25}{3} \approx 10 \cdot 0.75 \approx 7.5$$

$$t \approx \frac{0.7}{7.5} \text{ donc } t \approx 0.1s.$$

Q41. Les moteurs choisis permettent-ils de respecter le cahier des charges ?

L'exigence impose que l'instant t à partir duquel $\theta(t) = 10^\circ = \frac{\pi}{18} \text{ rad}$ doit être inférieur à 0.5s.

$t \approx 0.1s$ donc l'exigence est respectée.