

Proposition de corrigé

Concours : Concours Commun INP

Année : 2024

Filière : TSI

Épreuve : Sciences Industrielles pour l'Ingénieur

Ceci est une proposition de corrigé des concours de CPGE, réalisée bénévolement par des enseignants de Sciences Industrielles de l'Ingénieur et d'Informatique, membres de l'[UPSTI](https://www.upsti.fr) (Union des Professeurs de Sciences et Techniques Industrielles), et publiée sur le site de l'association :

<https://www.upsti.fr/espace-etudiants/annales-de-concours>

A l'attention des étudiants

Ce document vous apportera des éléments de corrections pour le sujet traité, mais n'est ni un corrigé officiel du concours, ni un corrigé détaillé ou exhaustif de l'épreuve en question.

L'UPSTI ne répondra pas directement aux questions que peuvent soulever ces corrigés : nous vous invitons à vous rapprocher de vos enseignants si vous souhaitez des compléments d'information, et à vous adresser à eux pour nous faire remonter vos éventuelles remarques.

Licence et Copyright

Toute représentation ou reproduction (même partielle) de ce document faite sans l'accord de l'UPSTI est **interdite**. Seuls le téléchargement et la copie privée à usage personnel sont autorisés (protection au titre des [droits d'auteur](#)).

En cas de doute, n'hésitez pas à nous contacter à : corrigesconcours@upsti.fr.

Informez-vous !

Retrouvez plus d'information sur les [Sciences de l'Ingénieur](#), l'[orientation](#), les [Grandes Ecoles](#) ainsi que sur les [Olympiades de Sciences de l'Ingénieur](#) et sur les [Sciences de l'Ingénieur au Féminin](#) sur notre site : www.upsti.fr

L'équipe UPSTI

Étude d'un buggy radiocommandé

Corrigé UPSTI

I - Exigence 1 : diriger la voiture

Objectif : étudier la cinématique de la direction de la voiture afin de valider les exigences 1.2 « Orienter les roues » et 1.3 « Se positionner rapidement ».

I.2 - Étude de la cinématique de direction

Question 1 Vu la géométrie du mécanisme, quel est le mouvement possible de la barre de direction S_3 par rapport au châssis S_0 ?

En déduire une relation entre φ et ψ .

Le quadrilatère $OADC$ a ses côtés opposés de même longueur ($OA = CD = K$ et $OC = AD = L$) : c'est donc un parallélogramme, et ses côtés opposés sont toujours parallèles. On a donc :

- $\bar{x}_3 = \bar{x}_0$: la barre de direction S_3 a un mouvement de translation circulaire de rayon L par rapport au châssis S_0 ;
- $\bar{y}_1 = \bar{y}_2$, et donc $\varphi = \psi$.

Question 2 En déduire la trajectoire du point E . On pourra poser tout point géométrique qui semblerait utile en précisant ses coordonnées.

La trajectoire du point E (appartenant à S_3 dans son mouvement par rapport à S_0) est donc un cercle, de rayon L et de centre P tel que $\bar{EP} = \bar{CO} = L\bar{y}_1$.

Question 3 Sachant que la distance $L_b = 16 \text{ mm}$, déterminer la valeur numérique maximale de l'angle φ , notée φ_{max} , lorsque $\bar{OF} \cdot \bar{x}_0 = \Delta_{Fmax}$.

L'abaque (figure 38 de l'annexe 3) montre l'évolution des courbes sinus et cosinus.

$$\sin(\varphi) = \frac{\bar{OF} \cdot \bar{x}_0}{\|\bar{OF}\|} = \frac{\Delta_{Fmax}}{L_b} = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad \varphi = 30^\circ$$

Question 4 Écrire une fermeture géométrique faisant intervenir les solides S_0, S_2, S_4 et S_5 .

$$\begin{aligned} \bar{0} &= \bar{A}'\bar{H} + \bar{H}\bar{G} + \bar{G}\bar{E} + \bar{E}\bar{A}' \\ &= M\bar{x}_0 + N\bar{y}_0 - Q_x\bar{x}_5 - Q_y\bar{y}_5 - P\bar{x}_4 + L\bar{y}_2 \end{aligned}$$

Question 5 Montrer que :

$$P^2 = (M + Q_y \sin(\theta_R) - Q_x \cos(\theta_R) - L \sin(\alpha))^2 + (N - Q_y \cos(\theta_R) - Q_x \sin(\theta_R) + L \cos(\alpha))^2$$

Projetons l'équation obtenue à la question précédente sur les vecteurs du repère $\mathcal{R}_0$:

$$\text{Sur } \bar{x}_0^- : 0 = M - Q_x \cos(\theta_R) + Q_y \sin(\theta_R) - P \cos(\delta) - L \sin(\alpha)$$

$$\text{Sur } \bar{y}_0^- : 0 = N - Q_x \sin(\theta_R) - Q_y \cos(\theta_R) - P \sin(\delta) + L \cos(\alpha)$$

D'où :

$$\begin{cases} P \cos(\delta) = M - Q_x \cos(\theta_R) + Q_y \sin(\theta_R) - L \sin(\alpha) \\ P \sin(\delta) = N - Q_x \sin(\theta_R) - Q_y \cos(\theta_R) + L \cos(\alpha) \end{cases}$$

En élevant au carré chacune de ces équations, puis en les sommant, puisque $\cos(\delta)^2 + \sin(\delta)^2 = 1$, on obtient alors bien :

$$P^2 = (M + Q_y \sin(\theta_R) - Q_x \cos(\theta_R) - L \sin(\alpha))^2 + (N - Q_y \cos(\theta_R) - Q_x \sin(\theta_R) + L \cos(\alpha))^2$$

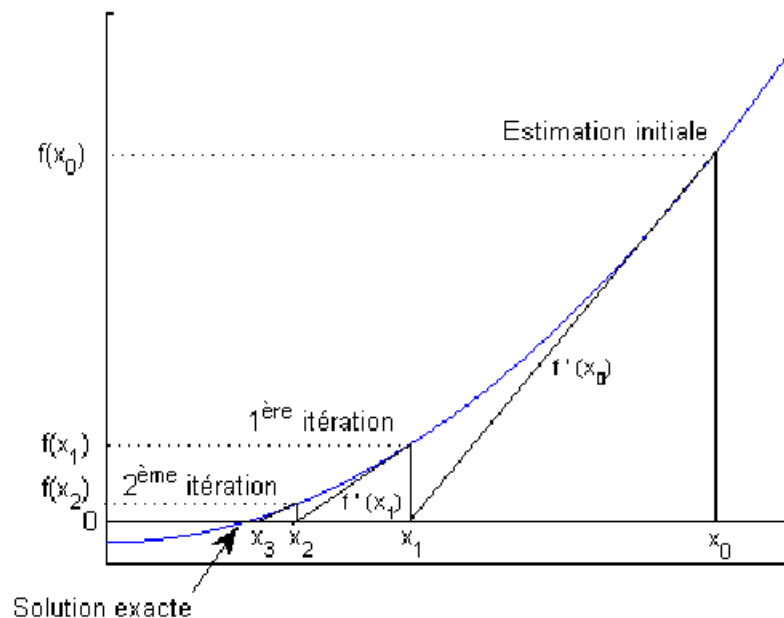
Question 6 Citer une méthode numérique permettant de déterminer cette valeur.

Expliciter son fonctionnement à l'aide d'un schéma.

Trouver l'angle θ_{Rmax} pour $\alpha = -30^\circ$ consiste à trouver le zéro de la fonction f telle que :

$$f(\theta_R) = (M + Q_y \sin(\theta_R) - Q_x \cos(\theta_R) - L \sin(\alpha))^2 + (N - Q_y \cos(\theta_R) - Q_x \sin(\theta_R) + L \cos(\alpha))^2 - P^2$$

Une méthode numérique permettant de trouver ce zéro est la méthode de Newton, illustrée par le schéma suivant :



Question 7 Compléter le script Python, ébauché sur le DR, qui a pour objectif de déterminer la valeur de θ_{Rmax} .

L'annexe 4 présente les documentations de fonctions utiles Python.

Comme expliqué en annexe 4, la bibliothèque SciPy implémente déjà les algorithmes de recherche de zéro les plus courants. La méthode de Newton est ainsi accessible à l'aide de la fonction `scipy.optimize.newton`.

```
def fonctionRechercheTheta(theta):
    y = (M + Qy*sin(theta) - Qx*cos(theta) - L*sin(alpha))**2 \
        + (N - Qy*cos(theta) - Qx*sin(theta) + L*cos(alpha))**2 \
        - P**2
    return y

# Valeur de theta calculée (Compléter la ligne)
valThetaCalc = scipy.optimize.newton(fonctionRechercheTheta, alpha)

# Affichage sur la console de theta en degré (A écrire)
print(f'θ = {valThetaCalc * 180 / pi}°')
```

Note : l'exécution du code donne pour résultat 27,1°.

Question 8 Réaliser un schéma permettant de définir l'angle de braquage interne.

Déterminer l'expression littérale et la valeur numérique du rayon de braquage interne R_i du buggy.

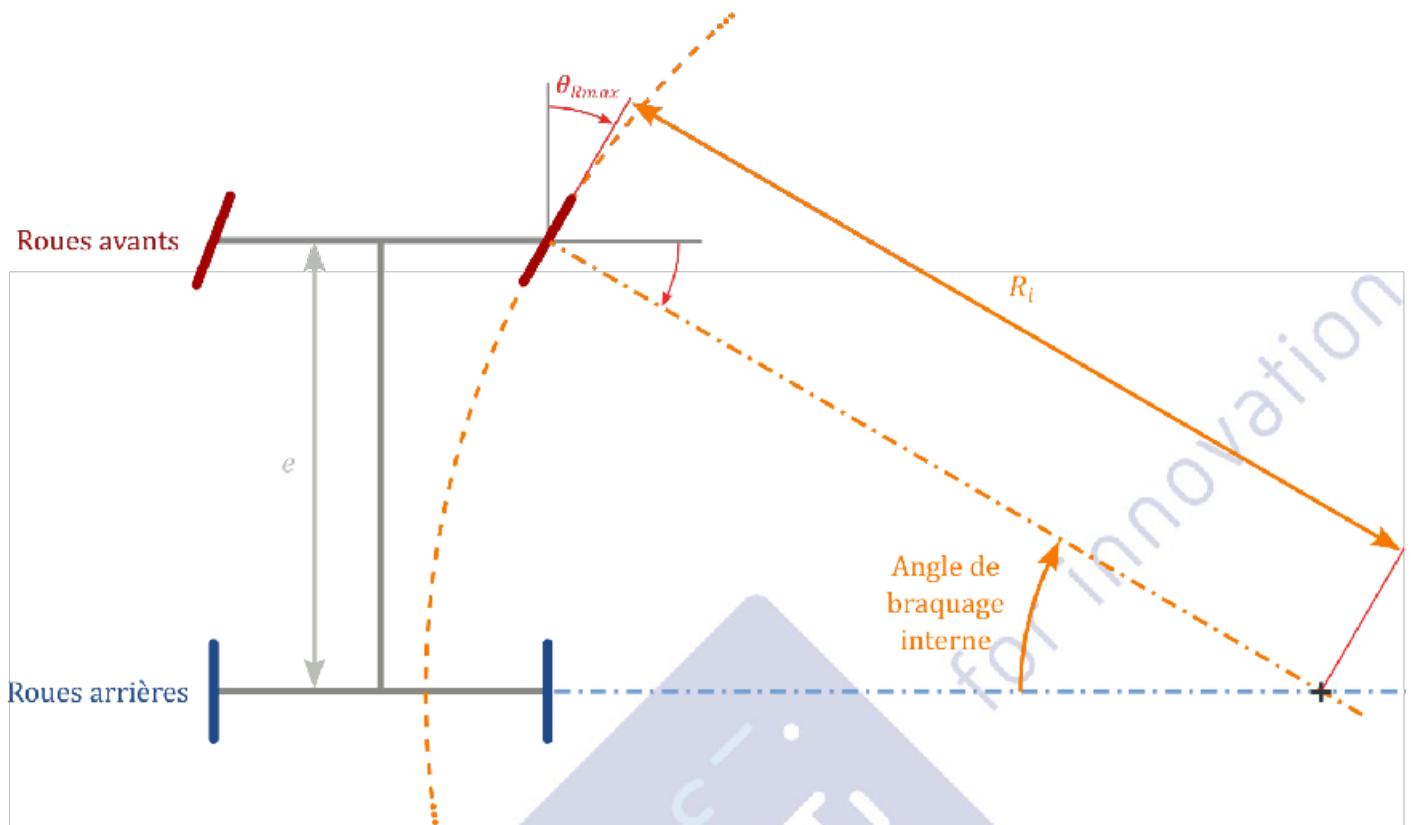
Est-ce compatible avec l'exigence 1 ?

On supposera que la voie avant (c'est-à-dire la distance entre les deux roues avants) et la voie arrière sont les mêmes, ce qui semble probable d'après la photographie en annexe 1.

On constate que l'angle de braquage interne est égal à l'angle maximum de braquage (angles alternes-internes), et on a dès lors, en constatant que $\sin(\theta_{Rmax}) = \sin(42^\circ) \approx \frac{2}{3}$:

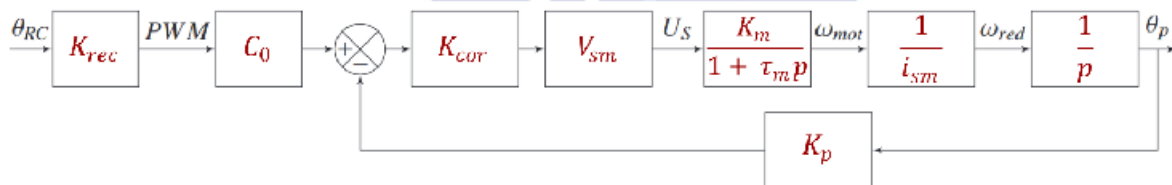
$$R_i = \frac{e}{\sin(\theta_{Rmax})} = 420 \text{ mm}$$

Cela est bien compatible avec l'exigence 1, qui impose de pouvoir diriger la voiture sur des pistes de 3 m de large avec des virages en épingle. Dans un tel virage, le rayon de courbure est maximal à l'extérieur du virage et vaut 3 m, auquel il faut soustraire la largeur du buggy, mais dont le résultat reste largement supérieur à R_i .



I.3 - Étude de l'asservissement du servomoteur

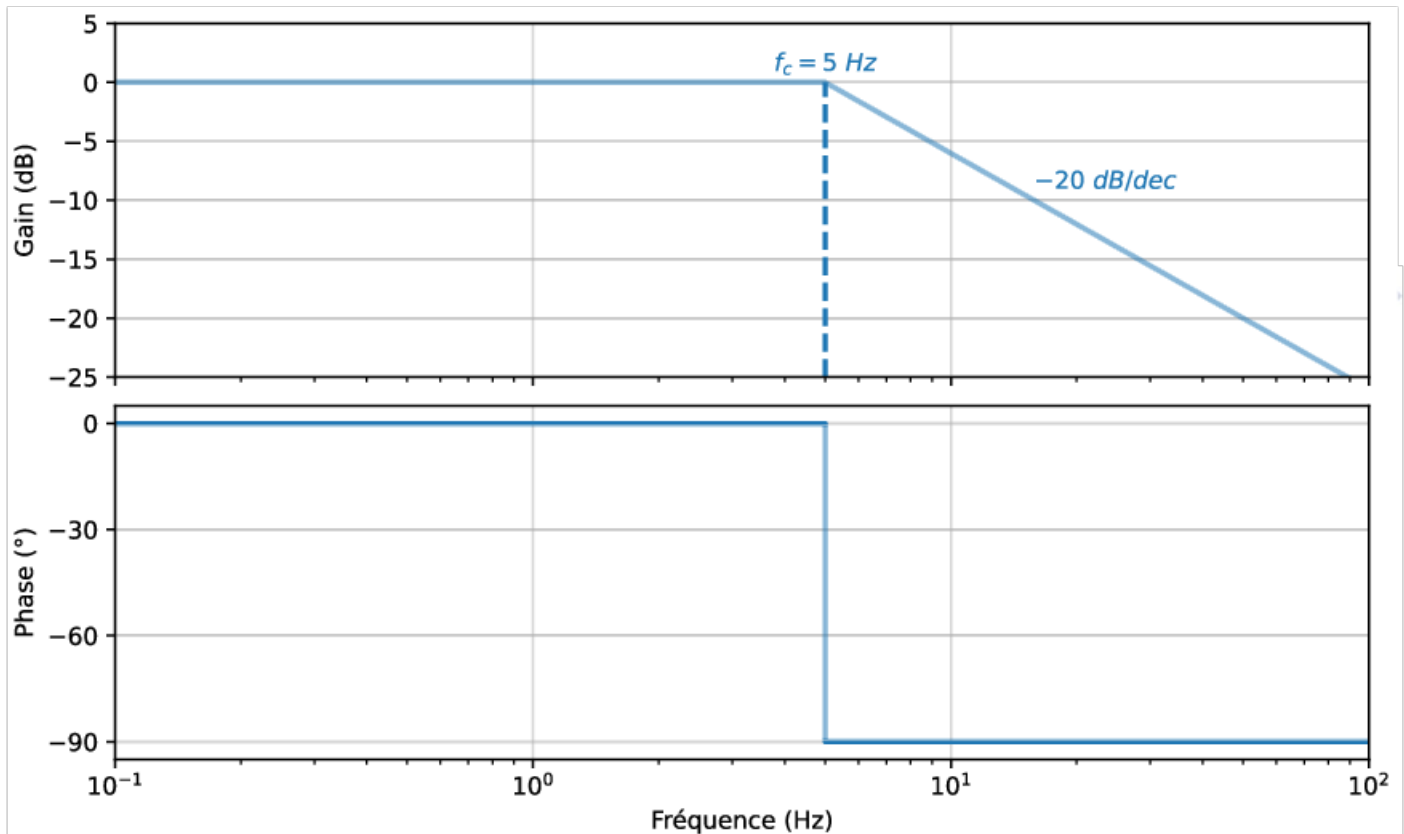
Question 9 Compléter le schéma bloc de cet asservissement en position angulaire.



Question 10 Donner le nom de ce filtre.

Tracer son allure asymptotique dans le plan de Bode. Les grandeurs pertinentes seront précisées.

Il s'agit d'un filtre passe-bas.



Question 11 De combien de décibels (dB) est atténué un bruit de fréquence de 20 Hz.

On lit graphiquement sur le tracé précédent, à une fréquence de 20 Hz, un gain $G_{dB} = -12$ dB.

Question 12 Quel est l'ordre de la fonction de transfert dont la réponse à un échelon de 30° est tracée sur la figure 10 ?

Déterminer le temps de réponse à 5 %, noté $T_{r5\%}$.

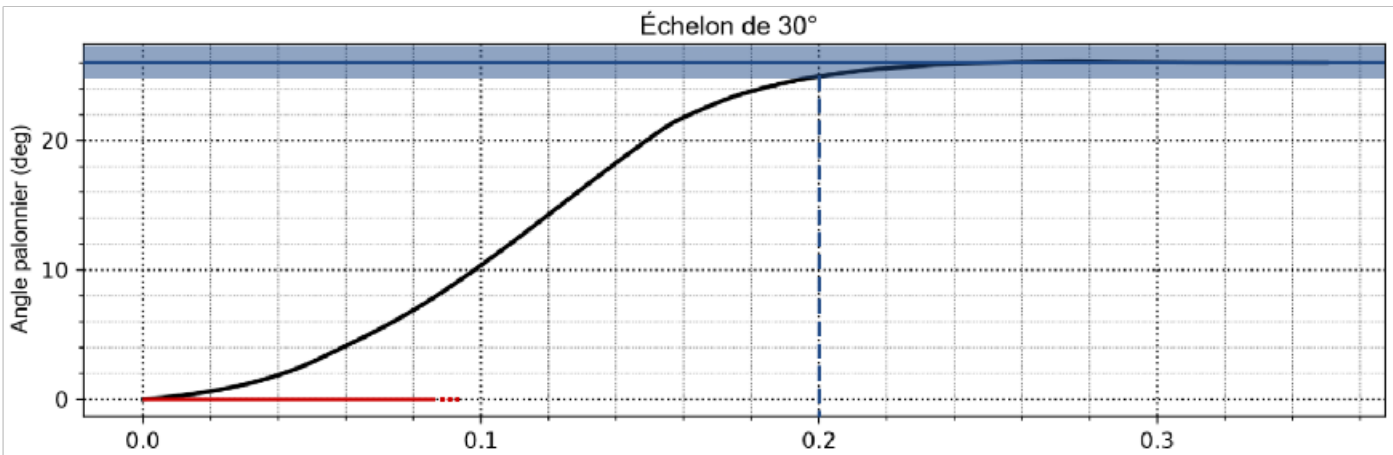
Conclure vis-à-vis du cahier des charges.

On constate, sur la première courbe de la figure 10, que la réponse du système à un échelon possède une tangente horizontale à l'origine. La fonction de transfert associée est donc au moins d'ordre 2.

La réponse tend vers 26° . On détermine donc graphiquement le temps de réponse à 5 %, c'est-à-dire le temps pour que la réponse entre dans l'intervalle $[24,7 ; 27,3]$ sans en ressortir : $T_{r5\%} = 0,2$ s.

L'exigence 1.3.1 est donc respectée, puisque $T_{r5\%} = 0,2$ s $<$ 0,3 s, mais pas l'exigence 1.2, puisque l'écart statique n'est pas nul : le système est suffisamment rapide mais trop peu précis.

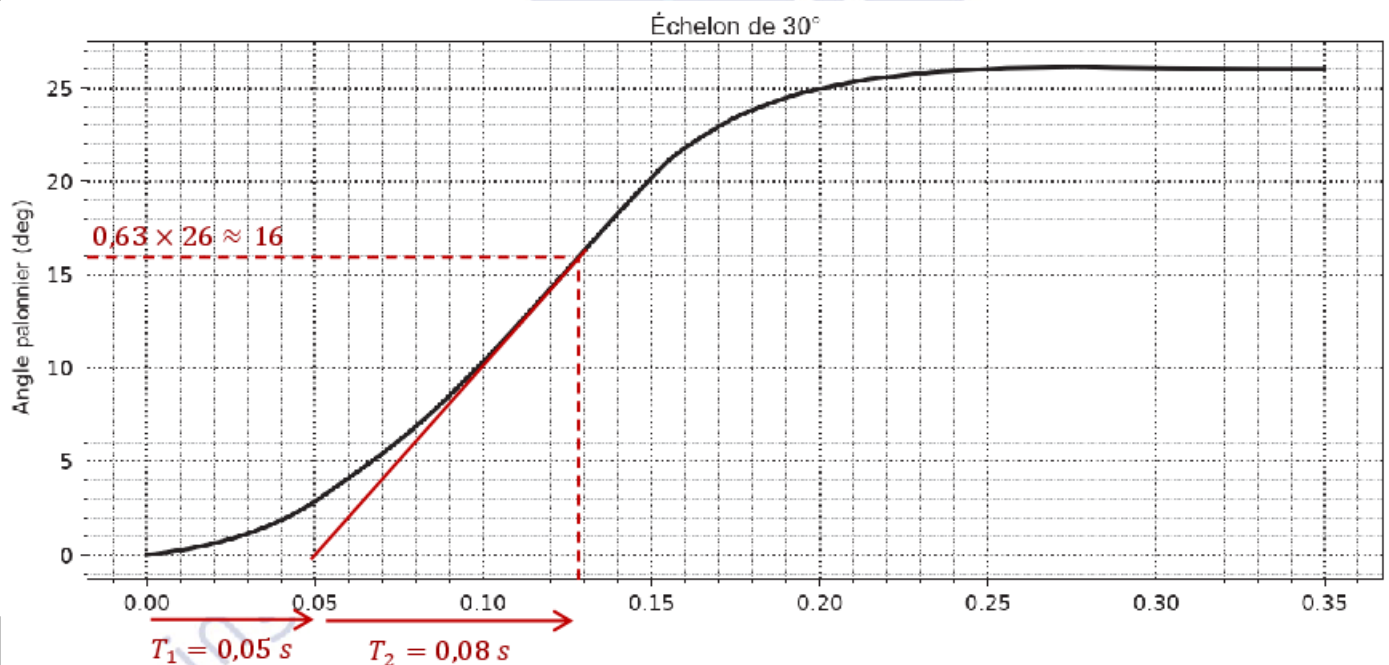
Note : on peut donc envisager d'ajouter un correcteur proportionnel-intégral pour annuler l'erreur.



Question 13 Identifier la fonction de transfert de la figure 10 (échelon de 30°) en boucle fermée $H_{nc}(p) = \frac{\theta_p(p)}{\theta_{Rc}(p)}$ associée à la réponse temporelle de l'essai à 30°.

Le gain statique de la boucle fermée est $K = \frac{26}{30} = 0,87$.

Pour l'étude du régime transitoire, on suppose qu'il s'agit d'un second ordre. On reconnaît une réponse apériodique ($m > 1$), on peut identifier ses deux constantes de temps, T_1 et T_2 .



On obtient ainsi :

$$H_{nc}(p) = \frac{0,87}{(1 + 0,05p)(1 + 0,08p)}$$

Remarque n°1 : les constantes de temps trouvées sont très proches l'une de l'autre. La méthode d'identification utilisée ici (modélisant le système comme une constante de temps + retard) n'est donc en réalité que bien trop peu précise dans cette situation. Une méthode d'identification numérique serait plus pertinente. L'ordre de grandeur des constantes de temps reste le bon ($\sim 0,05$ s)

Remarque n°2 : les constantes de temps trouvées sont très proches de la constante de temps du filtre $\tau = \frac{1}{2\pi f} \approx 0,03 \text{ s}$. Ce dernier a donc eu une influence certaine sur la fonction identifiée... l'un des deux pôles identifiés (de manière approximative) correspond très probablement à la constante de temps du filtre. Ainsi seule le pôle dominant du système a été identifié...

Question 14 Déterminer l'expression de la fonction de transfert corrigée en boucle fermée $H_c(p) = \frac{\theta_p(p)}{\theta_{Rc}(p)}$ sous forme canonique.

On a :

$$FTBO_c(p) = \frac{K_{cor}K_{BO}}{1 + \frac{2m_{BO}}{\omega_{BO}}p + \frac{1}{\omega_{BO}^2}p^2}$$

Donc :

$$H_c(p) = \frac{FTBO_c(p)}{1 + FTBO_c(p)} = \frac{K_{cor}K_{BO}}{K_{cor}K_{BO} + 1 + \frac{2m_{BO}}{\omega_{BO}}p + \frac{1}{\omega_{BO}^2}p^2} = \frac{\frac{K_{cor}K_{BO}}{1 + K_{cor}K_{BO}}}{1 + \frac{2m_{BO}}{\omega_{BO}(1 + K_{cor}K_{BO})}p + \frac{1}{\omega_{BO}^2(1 + K_{cor}K_{BO})}p^2}$$

Question 15 Donner l'ordre de $H_c(p)$ ainsi que l'expression de son gain statique, noté G_c .

$H_c(p)$ est donc une fonction d'ordre 2 et $G_c = \frac{K_{cor}K_{BO}}{1 + K_{cor}K_{BO}}$.

Question 16 Déterminer l'expression de K_{corr} pour obtenir le système le plus rapide possible sans dépassement. Faire l'application numérique.

Pour un système d'ordre 2, la réponse la plus rapide possible sans dépassement est obtenue pour un facteur d'amortissement égal à 1. Or :

$$\begin{aligned} \frac{1}{\omega_{BF}^2} &= \frac{1}{\omega_{BO}^2(1 + K_{cor}K_{BO})} & \Leftrightarrow & \quad \omega_{BF} = \omega_{BO}\sqrt{1 + K_{cor}K_{BO}} \\ \frac{2m_{BF}}{\omega_{BF}} &= \frac{2m_{BO}}{\omega_{BO}(1 + K_{cor}K_{BO})} & \Leftrightarrow & \quad m_{BF} = \frac{\omega_{BF}}{\omega_{BO}} \cdot \frac{m_{BO}}{1 + K_{cor}K_{BO}} = \frac{m_{BO}}{\sqrt{1 + K_{cor}K_{BO}}} \end{aligned}$$

Donc :

$$\begin{aligned} m_{BF} &= \frac{m_{BO}}{\sqrt{1 + K_{cor}K_{BO}}} = 1 \quad \Rightarrow \quad 1 + K_{cor}K_{BO} = m_{BO}^2 \\ \Leftrightarrow \quad K_{cor} &= \frac{m_{BO}^2 - 1}{K_{BO}} = \frac{9 - 1}{6} = 1,33 \end{aligned}$$

Question 17 En faisant l'hypothèse que le système ne sature pas, déterminer le temps de réponse à 5 %, noté $T_{r5\%}$, pour un débattement de 60° .

Conclure vis-à-vis des exigences du cahier des charges.

Puisqu'on ne prend pas en compte de saturation, le système est linéaire, continu et invariant donc le temps de réponse ne dépend alors pas de l'amplitude de la consigne : $T_{r60} = T_{r5\%} = 0,1 \text{ s}$.

L'exigence 1.3.1 est donc respectée, puisque $T_{r5\%} = 0,1 \text{ s} < 0,3 \text{ s}$, mais pas l'exigence 1.2 : la FTBO étant de classe 0, l'écart statique reste non nul. Ainsi, le système est suffisamment rapide mais trop peu précis.

Note : on peut envisager de remplacer le correcteur par un correcteur proportionnel-intégral pour annuler l'écart statique.

II - Exigence 3 : mettre en mouvement la voiture

Objectif : analyser les différentes parties du train arrière permettant de propulser la voiture.

II.2 - Étude la motorisation

Question 18 Déterminer la valeur numérique de la tension nominale U_{nom} de cette batterie, ainsi que l'énergie stockée E_{bat} .

On a $U_{nom} = 7,6 \text{ V}$ et $E_{bat} = C_{bat} \cdot U_{nom} \approx 33 \text{ Wh}$.

Question 19 Déterminer la durée d'utilisation T_{Pmax} en minute de la batterie lorsque le moteur est utilisé à sa puissance maximale.

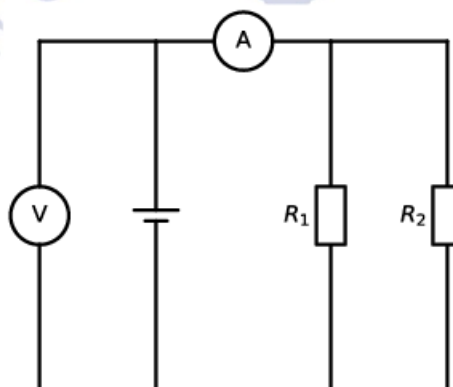
L'exigence 5 (figure 37, annexe 2) est-elle vérifiée ?

Sous le courant I_{max} , la batterie est utilisable pendant :

$$T_{Pmax} = \frac{C_{bat}}{I_{max}} = \frac{4,4 \text{ Ah} \cdot 60 \text{ min/h}}{60 \text{ A}} = 4,4 \text{ min}$$

L'exigence 5, qui impose à la voiture de rouler pendant 5 min en utilisant la puissance maximale du moteur, n'est donc pas vérifiée : $T_{Pmax} < 5 \text{ min}$.

Question 20 Réaliser un schéma électrique montrant les composants et instruments de mesure décrits dans l'expérience ci-dessus. Deux résistances de charge sont utilisées. L'annexe 5 présente les symboles électriques utiles.



Question 21 À partir de la figure 14 reportée sur le DR, déterminer la résistance interne r_i de la batterie ainsi que son courant de court-circuit I_{CC} .

La batterie ayant une résistance interne, la tension qu'elle peut fournir est de la forme $U = U_0 - r_i \cdot I$.

On mesure sur la figure 14 :

$$U_0 = 8,68 \text{ V} \quad r_i = -\frac{\Delta U}{\Delta I} = -\frac{8,68 - 7,92}{0 - 25,5} \approx \frac{0,75}{\frac{100}{4}} = 30 \text{ m}\Omega$$

En court circuit, $U = 0$ et $I = I_{CC}$. On en déduit donc :

$$I_{CC} = \frac{U_0}{r_i} \approx \frac{9}{0,03} = 300 \text{ A}$$

Question 22 En déduire la puissance dissipée par effet Joule par la batterie, notée P_{JB} , lorsque le moteur est utilisé à sa puissance maximale.

$$P_{JB} = r_i I_{max}^2 = 0,03 \cdot 60^2 = 108 \text{ W}$$

Question 23 Lorsque le moteur est utilisé à sa puissance maximale, déterminer sa puissance absorbée, notée P_{AM} , sa puissance dissipée par effet Joule, notée P_{JM} , ainsi que son rendement, noté η_M .

Nous supposons que les pertes dans l'onduleur sont négligeables. On a alors :

$$P_{AM} = P_{bat} - P_{JB} = 60 \times 7,6 - 108 = 348 \text{ W}$$

On en déduit le rendement :

$$\eta_M = \frac{P_{max}}{P_{AM}} = \frac{240}{348} \approx \frac{250}{350} \approx 70 \%$$

Pour les pertes joules, deux approches sont possibles :

1^{ère} approche : Le moteur observe des pertes à vide P_0 (pertes fer + frottements) et des pertes joules. On calcule d'abord P_0 puis un bilan de puissance permet d'obtenir les pertes par effet joule :

$$P_0 = I_0 \cdot \frac{P_{AM}}{I_{max}} = 4 \times \frac{348}{60} \approx 23 \text{ W}$$

$$P_{JM} = P_{AM} - P_0 - P_{max} = 348 - 23 - 240 = 85 \text{ W}$$

2^{de} approche : à chaque instant, d'après les figures 15 et 16, la tension de la batterie est appliquée entre deux des phases du moteur. En supposant que l'amplitude du courant est constante, on a alors les pertes joules suivantes sur ces deux phases :

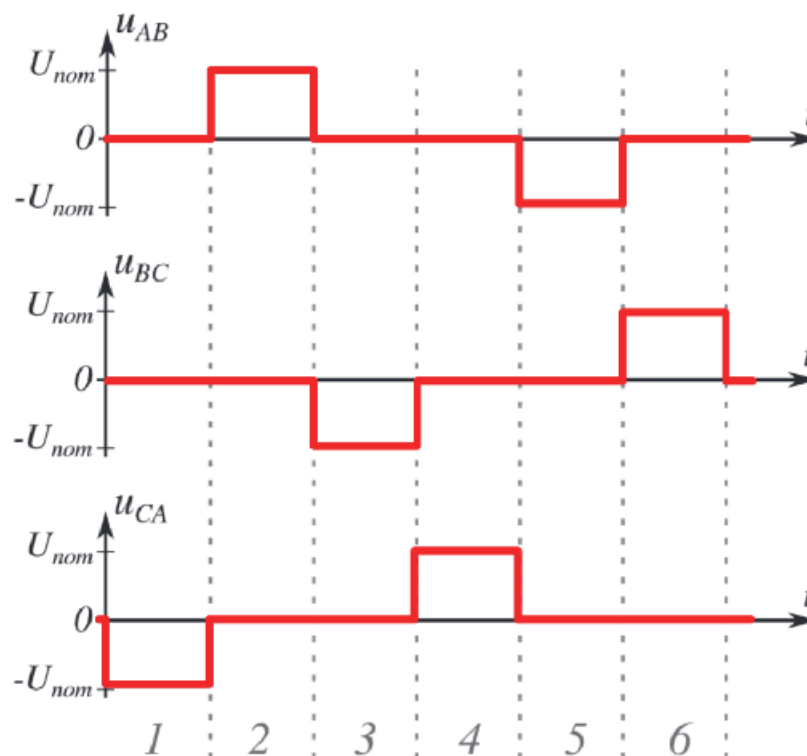
$$P_{JM} = R_p \cdot I_{max}^2 = 0,025 \times 60^2 = 90 \text{ W}$$

Question 24 Compléter le tableau sur le DR en indiquant, pour chaque phase de fonctionnement du variateur, les potentiels v_A , v_B et v_C , associés aux points A, B et C respectivement. On indiquera « libre » si le potentiel n'est pas imposé.

Phase de fonctionnement	v_A	v_B	v_C
1	U_{nom}	Libre	0
2	U_{nom}	0	Libre

3	Libre	0	U_{nom}
4	0	Libre	U_{nom}
5	0	U_{nom}	Libre
6	Libre	U_{nom}	0

Question 25 Compléter sur le chronogramme du DR l'évolution des tensions u_{AB} , u_{BC} et u_{CA} . On fixera la tension à 0 si un potentiel est laissé à l'état libre sur une phase de fonctionnement.



Question 26 Calculer la valeur numérique de la fréquence de commutation des interrupteurs électroniques, notée f_{com} , lorsque le moteur tourne à une vitesse $N_{mot} = 27\,000 \text{ tr} \cdot \text{min}^{-1}$.

Quelle technologie d'interrupteur peut remplir ce rôle ?

Les moteurs brushless sont des machines synchrones. On a donc :

$$N_{mot} = \frac{60 \cdot f_{com}}{p} \Leftrightarrow f_{com} = \frac{p \cdot N_{mot}}{60} = 450 \text{ Hz}$$

Au vu de la faible fréquence et de la faible puissance, des MOSFET ou des IGBT pourraient être utilisés.

Question 27 Écrire la loi des mailles et la loi des nœuds en N du circuit.

$$U_{nom} = 2Ri + 2L \frac{di}{dt} + e_A - e_B$$

$$i = i_A = -i_B$$

Question 28 Donner une relation liant la force contre-électromotrice e_i à la constante de vitesse k^i et à la pulsation de rotation du rotor ω .

$$e_i = k^i \omega$$

Note : en lisant la suite, on comprend que la « constante » de vitesse définie dans le sujet n'est en réalité pas une constante mais une fonction du temps. On a ainsi $e_i(t) = k^i(t) \times \omega$ où e_i n'est donc pas la valeur efficace mais la valeur instantanée de la fcm. Par ailleurs, on remarque que la notation ω usuellement utilisée pour la pulsation électrique sert ici à noter la vitesse de rotation du rotor.

Question 29 En déduire alors l'équation électrique reliant U_{nom} , R , L , i , k et ω .

Lorsque l'angle du moteur est compris entre 300° et 360° , on constate que $k^A = +k$ et $k^B = -k$. En réutilisant les équations des deux questions précédentes, on obtient donc :

$$\begin{aligned} U_{nom} &= 2Ri + 2L \frac{di}{dt} + k^A \omega - k^B \omega \\ \Leftrightarrow U_{nom} &= 2Ri + 2L \frac{di}{dt} + 2k\omega \end{aligned}$$

Question 30 Déterminer le couple magnétique global C_m dans la phase de fonctionnement étudiée.

Dans la phase de fonctionnement étudiée, on a :

$$\begin{aligned} C_m &= C_A + C_B + C_C \\ &= k^A i_A + k^B i_B + k^C i_C \\ &= ki + (-k) \cdot (-i) + 0 \\ &= 2ki \end{aligned}$$

Question 31 En déduire alors l'équation mécanique reliant J , C_r , f , i , k et ω .

D'après l'équation du principe fondamental de la dynamique, on a donc :

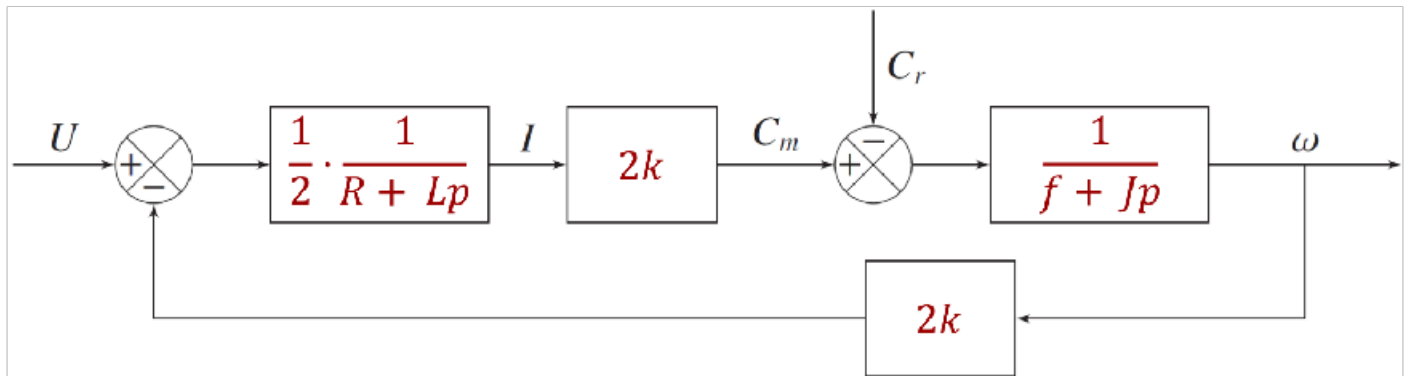
$$J \frac{d\omega}{dt} = 2ki - C_r - f\omega$$

Question 32 Compléter le schéma bloc modélisant le moteur brushless commandé par commutation.

En passant les équations précédentes dans le domaine de Laplace, en supposant les conditions initiales nulles, on obtient :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{E(p)}{\omega(p)} = 2k & (\text{question 29}) \\ \frac{I(p)}{U(p) - E(p)} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{R + Lp} & (\text{question 29}) \\ \frac{C_m(p)}{I(p)} = 2k & (\text{question 30}) \\ \frac{\omega(p)}{C_m(p) - C_r(p)} = \frac{1}{f + Jp} & (\text{question 31}) \end{array} \right.$$

D'où le schéma bloc suivant :



II.3 - Étude de la boîte de transmission

Question 33 Déterminer le rapport de transmission $r = \frac{\omega_{70}}{\omega_{40}}$ en fonction des nombres de dents Z_4, Z_5, Z_{61}, Z_{62} et Z_7 , avec ω_{70} la vitesse de rotation du pignon moteur S_7 par rapport au châssis 0 et ω_{40} la vitesse de rotation du différentiel S_4 par rapport au châssis 0.

Les axes de rotations des différentes roues sont tous fixes par rapport au châssis 0. Il s'agit donc d'un train d'engrenages simple, avec 3 contacts extérieurs, et donc (en remarquant que, tel que le rapport est défini, « l'entrée » du système est le différentiel S_4) :

$$r = \frac{\omega_{70}}{\omega_{40}} = (-1)^3 \frac{Z_4 Z_5 Z_{62}}{Z_5 Z_{61} Z_7} = -\frac{Z_4 Z_{62}}{Z_{61} Z_7}$$

Note : Z_5 n'intervient pas.

Question 34 Faire l'application numérique et indiquer si la boîte de transmission fonctionne en réducteur ou en multiplicateur.

$$r = -\frac{52}{20} \times \frac{75}{25} = -2,6 \times 3 = -7,8$$

Donc $|r| = \frac{|\omega_{70}|}{|\omega_{40}|} > 1$ et $|\omega_{70}| > |\omega_{40}|$: la boîte de transmission fonctionne en réducteur.

Question 35 Quelle est l'utilité du pignon S_5 ?

Le pignon change le sens de rotation cependant, celui-ci peut aussi être changé par l'onduleur, ce n'est donc pas la raison.

Le pignon S_5 permet d'éloigner l'axe du différentiel de celui du moteur, probablement pour des raisons d'encombrement.

Question 36 Déterminer la vitesse de rotation du moteur, N_{mot} .

Déterminer la vitesse de rotation des roues, N_{roue} .

On suppose que les roues et l'entrée du différentiel S_4 tournent à la même vitesse. Le différentiel se trouve entre les deux, mais celui-ci, étudié en partie II.5, a un rapport de transmission de 1.

$$N_{mot} = K_v \cdot U_{nom} \approx 27\,000 \text{ tr} \cdot \text{min}^{-1}$$

$$N_{roue} = \frac{N_{mot}}{r} \approx 3\,500 \text{ tr} \cdot \text{min}^{-1}$$

Question 37 Le diamètre des roues arrière de la voiture étant de $D_{AR} = 85 \text{ mm}$, déterminer la vitesse maximale de la voiture, V_{voit} , en $\text{km} \cdot \text{h}^{-1}$.

$$V_{voit} = \frac{D_{AR}}{2} \cdot \Omega_{roue} = \frac{85 \cdot 10^{-3}}{2} \cdot 3500 \cdot \frac{2\pi}{60} \cdot \frac{3600}{1000} = 85 \cdot 10^{-3} \cdot \underbrace{3,5 \cdot \pi}_{10} \cdot 60 \text{ m} \cdot \text{h}^{-1} \approx 50 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$$

$$V_{voit} \approx 50 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$$

Question 38 L'exigence 3.3 « Garantir des performances en vitesse et accélération » (voir figure 37, annexe 2) est-elle validée ?

La voiture est bien capable de dépasser $40 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$ et valide donc l'exigence de vitesse : $V_{voit} > 40 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$.

On ne peut cependant conclure quant au respect de l'exigence 3.3 car les performances d'accélération n'ont pas été étudiées.

II.4 - Étude du « slipper »

Question 39 En vous appuyant sur la figure 24, proposer un modèle local de l'action mécanique $\bar{d}F_{M,1 \rightarrow 2}$ au point M entre S_1 et S_2 , en fonction de p , f_0 et des données géométriques.

La composante normale de cette action mécanique, dirigée suivant $\bar{z}_2^-$, est due à la pression exercée par S_1 sur S_2 :

$$\bar{d}N_{M,1 \rightarrow 2} = -p \cdot dS \cdot \bar{z}_2^- = -p \cdot \rho d\rho d\theta \cdot \bar{z}_2^-$$

Puisqu'on est à la limite de l'adhérence, la composante tangentielle de cette action mécanique est :

- de norme égale à $f_0 \cdot \|\bar{d}N_{M,1 \rightarrow 2}\| = f_0 \cdot p \cdot \rho d\rho d\theta$;
- de même direction et sens que la tendance au glissement de S_1 sur S_2 . Or :

$$\bar{v}_{M \in S_1/S_2} = \underbrace{\bar{v}_{O \in S_1/S_2}}_{=0} + \bar{M}\bar{O} \wedge \bar{\Omega}_{S_1/S_2} = (-\rho \bar{x}_M) \wedge (-\omega_{21} \bar{z}_0) = -\rho \omega_{21} \bar{y}_M$$

Comme ω_{21} est négatif, la composante tangentielle est donc dirigée suivant $+\bar{y}_M^-$. D'où :

$$\bar{d}F_{M,1 \rightarrow 2} = -p \cdot dS \bar{z}_2^- + f_0 \cdot p \cdot dS \bar{y}_M^- \quad \text{avec } dS = \rho d\rho d\theta$$

Question 40 Donner la modélisation globale du torseur d'action mécanique de S_1 sur S_2 en O , $\{\mathcal{T}_{1 \rightarrow 2}\}$.

Par symétrie du problème autour de l'axe $(O, \bar{z}_2^-)$, on a :

$$\{\mathcal{T}_{1 \rightarrow 2}\} = \begin{Bmatrix} F_{z_{12}} \cdot \bar{z}_2^- \\ C_T \cdot \bar{z}_2^- \end{Bmatrix}_O$$

Question 41 Calculer la résultante $\bar{F}_{1 \rightarrow 2} = F_{z_{12}} \bar{z}_2^-$ de ce torseur, en fonction de p et des données géométriques.

La pression est constante, on a donc directement :

$$F_{z_{12}} = -p \cdot S = -p \cdot \pi (R_e^2 - R_i^2)$$

Question 42 Calculer le moment $\bar{M}_{O,1 \rightarrow 2} \cdot \bar{z}_2^- = C_T$ en O de ce torseur, en fonction de p et f_0 et des données géométriques.

L'action locale au point M crée un moment au point O d'expression :

$$\bar{d}m_{O,1 \rightarrow 2} = \underbrace{\bar{d}m_{M,1 \rightarrow 2}}_{=0} + \bar{O}M \wedge \bar{d}F_{M,1 \rightarrow 2} = \rho \bar{x}_M \wedge (p \cdot \rho d\rho d\theta \cdot (-\bar{z}_2 + f_0 \cdot \bar{y}_M)) = p \cdot \rho^2 d\rho d\theta \cdot (\bar{y}_M + f_0 \cdot \bar{z}_2)$$

Par intégration de chacune des actions locales :

$$\begin{aligned} C_T = \bar{M}_{O,1 \rightarrow 2} \cdot \bar{z}_2 &= \int_{\rho=R_i}^{\rho=R_e} \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} \bar{d}m_{O,1 \rightarrow 2} \cdot \bar{z}_2 = \int_{\rho=R_i}^{\rho=R_e} \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} p \cdot \rho^2 d\rho d\theta \cdot f_0 = p f_0 \cdot \int_{\rho=R_i}^{\rho=R_e} \rho^2 d\rho \cdot \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} d\theta \\ &= p f_0 \left[\frac{\rho^3}{3} \right]_{\rho=R_i}^{\rho=R_e} [\theta]_{\theta=0}^{\theta=2\pi} \\ &= p f_0 \frac{R_e^3 - R_i^3}{3} 2\pi \\ &= \frac{2}{3} \pi p f_0 (R_e^3 - R_i^3) \end{aligned}$$

Question 43 En déduire l'expression du couple transmissible C_T par les deux surfaces frottantes, en fonction de F_{z12} , f_0 et des données géométriques.

On exprime la pression (d'après Q41) :

$$p = - \frac{F_{z12}}{\pi(R_e^2 - R_i^2)}$$

Remarque : on notera ici C_{2T} le couple transmis par les deux surfaces (Q43), par opposition au couple C_T transmis par une seule surface (Q42).

On réinjecte alors cette expression dans celle du couple :

$$\begin{aligned} C_{2T} = 2 \cdot C_T &= 2 \times \frac{2}{3} \pi f_0 (R_e^3 - R_i^3) \times - \frac{F_{z12}}{\pi(R_e^2 - R_i^2)} \\ \Leftrightarrow C_{2T} &= - \frac{4}{3} f_0 \frac{R_e^3 - R_i^3}{R_e^2 - R_i^2} F_{z12} \end{aligned}$$

Question 44 Sachant que le couple maximal transmissible C_T est fixé à $0,4 \text{ N} \cdot \text{m}$, que le pas de la vis p_{vis} est de $0,5 \text{ mm}$ et que la raideur du ressort k_r est de $25 \text{ N} \cdot \text{mm}^{-1}$, en déduire l'expression du nombre de tours N_e à réaliser sur l'écrou de serrage pour régler le couple à la valeur limite.

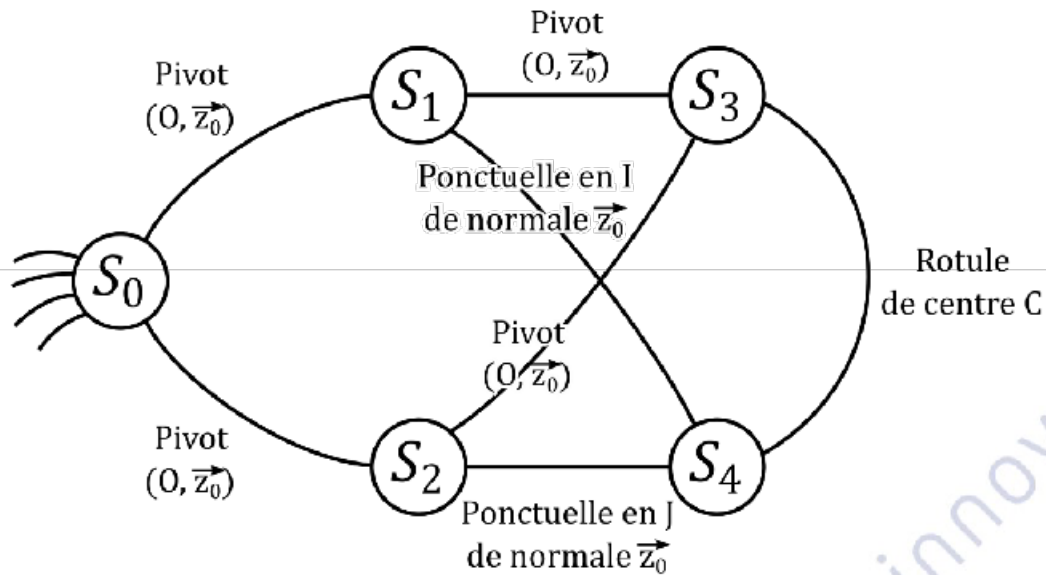
En nommant $\Delta \ell$ le déplacement de l'écrou de serrage, on a :

$$N_e = \frac{|\Delta \ell|}{p_{vis}} = \frac{|F_{z12}|}{k_r \cdot p_{vis}} = \frac{C_{2T}}{\frac{4}{3} f_0 \frac{R_e^3 - R_i^3}{R_e^2 - R_i^2} \cdot k_r \cdot p_{vis}} = \frac{3}{4 f_0 k_r p_{vis}} \cdot \frac{R_e^2 - R_i^2}{R_e^3 - R_i^3} \cdot C_{2T}$$

AN (non demandée) : $N_e = 3,0 \text{ tr}$

II.5 - Étude du différentiel à billes

Question 45 Réaliser le graphe des liaisons du mécanisme.



Question 46 Établir une relation entre $\bar{V}_{J,4/3}$ et $\bar{V}_{I,4/3}$ en écrivant une égalité de vitesses au point C.

Le point C étant le centre de la liaison rotule entre la couronne S_3 et la bille S_4 , on a :

$$\bar{V}_{C,4/3} = \bar{0}$$

Or, d'une part :

$$\bar{V}_{I,4/3} = \bar{V}_{C,4/3} + \bar{IC} \wedge \bar{\Omega}_{4/3} = \bar{IC} \wedge \bar{\Omega}_{4/3}$$

Et, d'autre part, puisque $\bar{JC} = -\bar{IC}$:

$$\bar{V}_{J,4/3} = \bar{V}_{C,4/3} + \bar{JC} \wedge \bar{\Omega}_{4/3} = -\bar{IC} \wedge \bar{\Omega}_{4/3}$$

D'où :

$$\bar{V}_{I,4/3} = -\bar{V}_{J,4/3}$$

Question 47 Écrire la relation de roulement sans glissement en I et en déduire une expression de $\bar{V}_{I,4/3}$ en fonction de ω_{31} et de R.

La bille S_4 roulant sans glisser sur le plateau S_1 , on a :

$$\bar{V}_{I,4/1} = \bar{0}$$

Or, $\bar{V}_{I,4/1} = \bar{V}_{I,4/3} + \bar{V}_{I,3/1}$ et :

$$\begin{aligned} \bar{V}_{I,3/1} &= \bar{V}_{O,3/1} + \bar{IO} \wedge \bar{\Omega}_{3/1} \\ &= \bar{0} + (-R\bar{z}_0 - R\bar{x}_3) \wedge (\omega_{31}\bar{z}_0) \\ &= R\omega_{31}\bar{y}_3 \end{aligned}$$

Donc :

$$\bar{V}_{I,4/3} = -R\omega_{31}\bar{y}_3$$

Question 48 Écrire la relation de roulement sans glissement en J et en déduire une expression de $\bar{V}_{J,4/3}$ en fonction de ω_{32} et de R .

La bille S_4 roulant sans glisser sur le plateau S_2 , on a :

$$\bar{V}_{J,4/2} = \bar{0}$$

Or, $\bar{V}_{J,4/2} = \bar{V}_{J,4/3} + \bar{V}_{J,3/2}$, et :

$$\begin{aligned}\bar{V}_{J,3/2} &= \bar{V}_{O,3/2} + \bar{J}\bar{O} \wedge \bar{\Omega}_{3/2} \\ &= \bar{0} + (r\bar{z}_0 - R\bar{x}_3) \wedge (\omega_{32}\bar{z}_0) \\ &= R\omega_{32}\bar{y}_3\end{aligned}$$

Donc :

$$\bar{V}_{J,4/3} = -R\omega_{32}\bar{y}_3$$

Question 49 Dans le cas où la couronne centrale S_3 est bloquée, c'est-à-dire avec $\omega_{30} = 0$, déterminer la relation entre les vitesses de rotation ω_{10} du plateau gauche S_1 et ω_{20} du plateau gauche S_2 par rapport au bâti S_0 .

D'après les trois questions précédentes, on a :

$$\bar{V}_{I,4/3} = -\bar{V}_{J,4/3} \quad \Leftrightarrow \quad -R\omega_{31}\bar{y}_3 = R\omega_{32}\bar{y}_3 \quad \Leftrightarrow \quad \omega_{31} = -\omega_{32} \quad \Leftrightarrow \quad \omega_{31} + \omega_{32} = 0$$

$$\Leftrightarrow \omega_{30} - \omega_{10} + \omega_{30} - \omega_{20} = 0$$

On obtient ainsi la relation générale $2\omega_{30} - \omega_{10} - \omega_{20} = 0$

Dans le cas où la couronne centrale est bloquée, $\omega_{30} = 0$ on a alors $\omega_{10} = -\omega_{20}$. Les deux roues tournent alors à la même vitesse, mais en sens opposés.

Question 50 En faisant l'hypothèse que la roue droite tourne deux fois moins vite que la roue gauche, $\omega_{10} = 2 \cdot \omega_{20}$, déterminer la relation entre les vitesses de rotation ω_{10} du plateau gauche S_1 et ω_{30} de la couronne centrale S_3 par rapport au bâti S_0 .

On a $\omega_{20} = \frac{1}{2}\omega_{10}$, l'équation obtenue à la question précédente devient alors :

$$2\omega_{30} - \omega_{10} - \frac{1}{2}\omega_{10} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 2\omega_{30} - \frac{3}{2}\omega_{10} = 0$$

$$\Leftrightarrow 4\omega_{30} = 3\omega_{10}$$

Question 51 Quel est l'intérêt d'utiliser un différentiel sur les roues motrices d'une voiture ?

Quelle est l'exigence satisfaite par ce composant ?

Le différentiel permet aux roues motrices d'une voiture de se partager le couple fourni par le moteur, tout en leur permettant de tourner à des vitesses différentes, ce qui est notamment le cas lors des virages.

Ce composant permet ainsi de satisfaire l'exigence 3.2 « Répartir la puissance moteur » du cahier des charges.

III - Pilotage du buggy en vol

Objectif : analyser le comportement dynamique de la voiture en phase de vol.

III.2 - Recherche de la masse et du centre de gravité du buggy

Question 52 Donner l'expression littérale de la masse m_c du buggy.

En déduire sa valeur numérique.

$$m_c = m_{AVG} + m_{AVD} + m_{ARG} + m_{ARD} = 1\,560\text{ g}$$

Question 53 Soit G_{xy} le centre de gravité du châssis dans le plan $(O_c, \bar{x}_c, \bar{y}_c)$.

Soit le vecteur $\bar{O}_c G_{xy} = X_G \bar{x}_c + Y_G \bar{y}_c$. Déterminer l'expression littérale de X_G et de Y_G .

En déduire la valeur numérique de X_G et de Y_G .

Par définition, le centre de gravité vérifie :

$$m_c \bar{O}_c G_{xy} = \sum m_i \bar{O}_c G_i$$

$$\Leftrightarrow \bar{O}_c G_{xy} = X_G \bar{x}_c + Y_G \bar{y}_c = \frac{\sum m_i \bar{O}_c G_i}{m_c}$$

On projette et on obtient :

$$\begin{cases} X_G = \frac{m_{AVG}L_h - m_{AVD}L_h + m_{ARG}L_h - m_{ARD}L_h}{m_c} = 0 \\ Y_G = \frac{m_{AVG}H + m_{AVD}H}{m_c} \approx \frac{640}{1600} 280 \approx 112\text{ mm} \end{cases}$$

Question 54 À partir de la figure 30, déterminer la valeur particulière γ_{eq} de l'angle γ de telle sorte que le châssis soit en équilibre statique.

L'abaque (figure 38 de l'annexe 3) fournit l'évolution des courbes sinus et cosinus.

À partir d'une lecture graphique de la photographie en figure 30, on mesure $\gamma_{eq} = -6,5^\circ$.

Question 55 Déterminer l'expression littérale de Z_G en fonction de γ_{eq} et des grandeurs géométriques.

En déduire la valeur numérique de Z_G .

À l'équilibre, le centre de gravité G_c est sur l'axe $(O_c \vec{y})$. On a alors :

$$\tan(-\gamma_{eq}) = \frac{Z_G}{Y_G} \quad \Leftrightarrow \quad Z_G = \tan(-\gamma_{eq}) Y_G$$

AN :

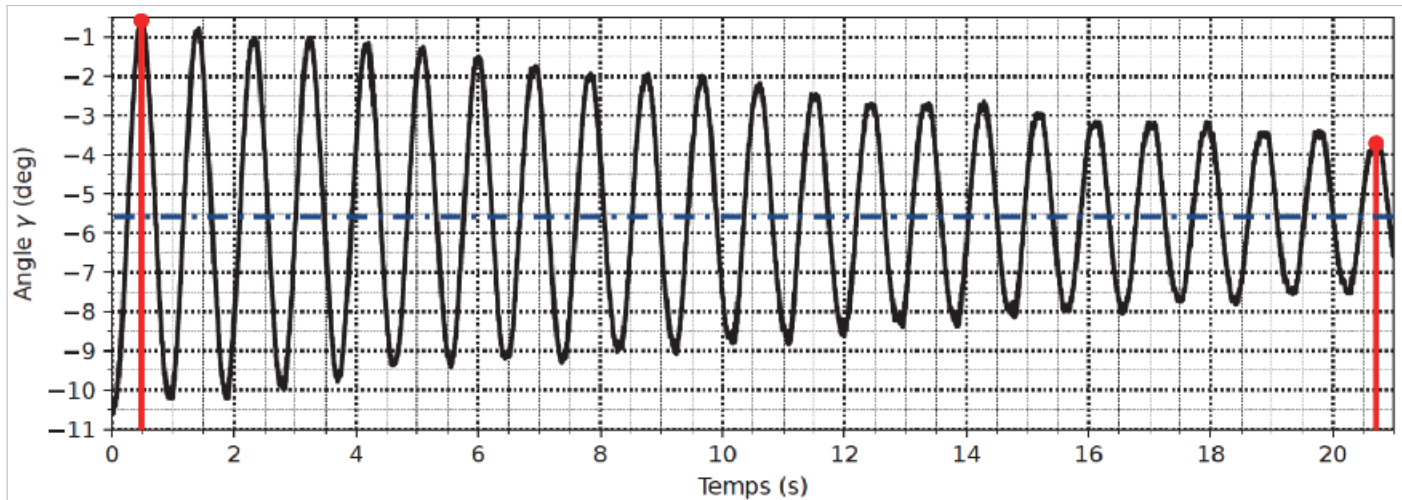
$$Z_G = \tan\left(6 \cdot \frac{\pi}{180}\right) \times 112 \approx \tan(0,1) \times 112 \approx 0,1 \times 112 \approx 11,2\text{ mm}$$



III.3 - Recherche de l'inertie du châssis hors transmission

Question 56 À partir du graphique du DR Q56, donner la période T des oscillations.

Le châssis reste-t-il dans le domaine des petits angles ? Justifier.



On lit sur le graphique, entre le premier et le dernier maximum locaux, 22 périodes en $20,7 \text{ s} - 0,5 \text{ s} = 20,2 \text{ s}$.
Donc $T = \frac{20,2 \text{ s}}{22} \approx 0,9 \text{ s}$.

On constate que $|\gamma|$ reste faible (inférieur à 11°), on peut donc considérer que le châssis reste dans le domaine des petits angles, on pourra alors écrire : $\sin \gamma = \gamma$ et $\cos \gamma = 1$.

Question 57 Réaliser le bilan des actions mécaniques sur le châssis S_c .

Écrire leurs torseurs d'actions mécaniques.

Les actions mécaniques extérieures s'appliquant sur le châssis S_c sont :

- la liaison pivot entre S_r et S_c : $\{\mathcal{T}_{r \rightarrow c}^{pivot}\} = \begin{Bmatrix} X_{rc}\vec{x} + Y_{rc}\vec{y} + Z_{rc}\vec{z} \\ M_{rc}\vec{y} + N_{rc}\vec{z} \end{Bmatrix}_{O_c}$;
- la pesanteur : $\{\mathcal{T}_{ext \rightarrow c}^{pes}\} = \begin{Bmatrix} m_c g \vec{y} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_{G_c}$.

Question 58 Donner l'expression du théorème du moment dynamique sur S_c en O_c par rapport à $\mathcal{R}$ autour de l'axe $(O_c, \vec{x}_c)$.

Simplifier son expression dans le cas où le châssis demeure dans le domaine des petits angles.

D'après le théorème du moment dynamique sur S_c en O_c par rapport à $\mathcal{R}$, projeté sur $\vec{x} = \vec{x}_c$:

$$\bar{M}_{O_c, r \rightarrow c}^{pivot} \cdot \bar{x}_c + \bar{M}_{O_c, ext \rightarrow c}^{pes} \cdot \bar{x}_c = \bar{\delta}_{O_c, S_c / \mathcal{R}} \cdot \bar{x}_c$$

Où :

$$\begin{aligned} \bar{M}_{O_c, r \rightarrow c}^{pivot} &= M_{rc}\vec{y} + N_{rc}\vec{z} \\ \bar{M}_{O_c, ext \rightarrow c}^{pes} &= \cancel{\bar{M}_{G_c, ext \rightarrow c}^{pes}} + \bar{O}_c G_c \wedge m_c g \vec{y} = (+Y_G \vec{y}_c + Z_G \vec{z}_c) \wedge m_c g \vec{y} = (-Y_G \sin(\gamma) - Z_G \cos(\gamma)) m_c g \vec{x} \end{aligned}$$

Donc :

$$(-Y_G \sin \gamma - Z_G \cos \gamma) m_c g = I_{O_c} \ddot{\gamma}$$

Dans le domaine des petits angles, on a alors :

$$\boxed{(-Y_G \gamma - Z_G) m_c g = I_{O_c} \ddot{\gamma}}$$

Question 59 Un modèle de l'angle γ_s en fonction du temps est présenté ci-dessous :

$$\gamma_s = A_s \cos(\omega t) + B_s \sin(\omega t)$$

Préciser les expressions de A_s , B_s et de ω en fonction de γ_0 , I_{O_c} , m_c , Y_G et de g .

Puisque $\gamma(t) = \gamma_s(t) + \gamma_{eq}$, on a :

$$\dot{\gamma}(t) = \dot{\gamma}_s(t) = -A_s \omega \sin(\omega t) + B_s \omega \cos(\omega t)$$

$$\ddot{\gamma}(t) = \ddot{\gamma}_s(t) = -A_s \omega^2 \cos(\omega t) - B_s \omega^2 \sin(\omega t) = -\omega^2 \gamma_s(t)$$

Les conditions initiales imposent :

$$\gamma_s(0) = \gamma_{s_0} = A_s \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{A_s = \gamma_{s_0}}$$

$$\dot{\gamma}_s(0) = 0 = B_s \omega \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{B_s = 0} \quad (\text{le buggy ayant été relâché sans vitesse initiale})$$

Dès lors, d'après la question précédente :

$$-Y_G (\gamma_s(t) + \gamma_{eq}) m_c g - Z_G m_c g = -I_{O_c} \omega^2 \gamma_s(t)$$

$$\Leftrightarrow (Y_G \cdot m_c g) \cdot \gamma_s(t) + \underbrace{Y_G \gamma_{eq} m_c g + Z_G m_c g}_{\text{cste}} = (I_{O_c} \omega^2) \cdot \gamma_s(t)$$

Cette équation étant valable pour tout t , par identification on en déduit :

$$Y_G m_c g = I_{O_c} \omega^2$$

$$\Leftrightarrow \omega = \sqrt{\frac{Y_G m_c g}{I_{O_c}}}$$

Question 60 En déduire l'expression de I_{O_c} en fonction de T , m_c , Y_G et de g .

Donner sa valeur numérique.

On a :

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \sqrt{\frac{Y_G m_c g}{I_{O_c}}}$$

Donc :

$$\begin{aligned} I_{O_c} &= Y_G m_c g \left(\frac{T}{2\pi} \right)^2 = 0,110 \cdot 1,5 \cdot 9,8 \cdot \left(\frac{0,9}{2\pi} \right)^2 \\ &\approx 0,1 \cdot 1,5 \cdot 10 \cdot \left(\frac{1}{10} \cdot \frac{3}{2} \right)^2 \\ &= 0,033 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-2} \end{aligned}$$

III.4 - Étude de l'effet de la variation de vitesse des roues en vol sur la trajectoire du buggy

Question 61 Exprimer l'énergie cinétique de S_c par rapport à $\mathcal{R}_0$, notée $E_{c(c/0)}$, ainsi que l'énergie cinétique de S_r par rapport à $\mathcal{R}_0$, notée $E_{c(r/0)}$.

Menons le calcul au centre d'inertie de chacun des ensembles. Le problème étant plan, on a :

$$E_{c(c/0)} = \frac{1}{2} m_c \|\bar{V}_{G_c, c/0}\|^2 + \frac{1}{2} I_{G_c} \|\bar{\Omega}_{c/0}\|^2$$

Or :

$$\bar{V}_{G_c, c/0} = \left(\frac{d\bar{O}G_c}{dt} \right)_{\mathcal{R}_0} = \dot{y}\vec{y} + \dot{z}\vec{z} \quad \Rightarrow \quad \|\bar{V}_{G_c, c/0}\|^2 = \dot{y}^2 + \dot{z}^2$$

$$\bar{\Omega}_{c/0} = \dot{\theta}_c \vec{x} \quad \Rightarrow \quad \|\bar{\Omega}_{c/0}\|^2 = \dot{\theta}_c^2$$

Et, d'après le théorème de Huygens, d étant la distance entre les axes $(O_c, \vec{x})$ et $(G_c, \vec{x})$:

$$I_{O_c} = I_{G_c} + m_c d^2 = I_{G_c} + m_c \|\bar{O}_c G_c\|^2 = I_{G_c} + m_c (Y_G^2 + Z_G^2) \quad \Rightarrow \quad I_{G_c} = I_{O_c} - m_c (Y_G^2 + Z_G^2)$$

Donc :

$$E_{c(c/0)} = \frac{1}{2} m_c (\dot{y}^2 + \dot{z}^2) + \frac{1}{2} (I_{O_c} - m_c (Y_G^2 + Z_G^2)) \dot{\theta}_c^2$$

De même, on a :

$$E_{c(r/0)} = \frac{1}{2} m_r \bar{V}_{O_c, r/0}^2 + \frac{1}{2} I_r \bar{\Omega}_{r/0}^2$$

Or :

$$\begin{aligned} \bar{V}_{O_c, r/0} &= \left(\frac{d\bar{O}O_c}{dt} \right)_{\mathcal{R}_0} = \frac{d}{dt} (\bar{O}G_c + \bar{G}_c O_c)_{\mathcal{R}_0} = \dot{y}\vec{y} + \dot{z}\vec{z} - \dot{\theta}_c Y_G \vec{z} + \dot{\theta}_c Z_G \vec{y} \\ &= [\dot{y} + \dot{\theta}_c Y_G \sin(\theta_c) + \dot{\theta}_c Z_G \cos(\theta_c)] \vec{y} \\ &\quad + [\dot{z} - \dot{\theta}_c Y_G \cos(\theta_c) + \dot{\theta}_c Z_G \sin(\theta_c)] \vec{z} \\ \Rightarrow \quad \|\bar{V}_{O_c, r/0}\|^2 &= [\dot{y} + \dot{\theta}_c Y_G \sin(\theta_c) + \dot{\theta}_c Z_G \cos(\theta_c)]^2 + [\dot{z} - \dot{\theta}_c Y_G \cos(\theta_c) + \dot{\theta}_c Z_G \sin(\theta_c)]^2 \\ \bar{\Omega}_{r/0} &= \bar{\Omega}_{r/c} + \bar{\Omega}_{c/0} = (\dot{\delta} + \dot{\theta}_c) \vec{x} \quad \Rightarrow \quad \|\bar{\Omega}_{r/0}\|^2 = (\dot{\delta} + \dot{\theta}_c)^2 \end{aligned}$$

Donc :

$$E_{c(r/0)} = \frac{1}{2} m_r \left([\dot{y} + \dot{\theta}_c Y_G \sin(\theta_c) + \dot{\theta}_c Z_G \cos(\theta_c)]^2 + [\dot{z} - \dot{\theta}_c Y_G \cos(\theta_c) + \dot{\theta}_c Z_G \sin(\theta_c)]^2 \right) + \frac{1}{2} I_r (\dot{\delta} + \dot{\theta}_c)^2$$

Note : En faisant l'approximation raisonnable que $\bar{V}_{O_c, r/0} \approx \bar{V}_{G_c, c/0}$ (on suppose là que le véhicule ne fait pas plusieurs tours sur lui-même en vol...), on obtient l'expression simplifiée suivante :

$$E_{c(r/0)} \approx \frac{1}{2} m_r (\dot{y}^2 + \dot{z}^2) + \frac{1}{2} I_r (\dot{\delta} + \dot{\theta}_c)^2$$

Question 62 Donner l'expression des puissances extérieures $P_{ext \rightarrow (c+r)/0}$ de l'extérieur sur l'ensemble $\{S_c + S_r\}$ par rapport au repère $\mathcal{R}_0$.

Donner l'expression de la puissance intérieure P_{int} entre S_c et S_r .

La seule action mécanique extérieure est la pesanteur. Celle-ci étant un torseur glisseur au centre d'inertie de chacun des ensembles, et les vecteurs vitesses ayant été déterminés à la question précédente, on a :

$$\begin{aligned}P_{ext \rightarrow c/0} &= (-m_c g \vec{z}) \cdot \vec{V}_{G_c, c/0} = -m_c g \dot{z} \\P_{ext \rightarrow r/0} &= (-m_r g \vec{z}) \cdot \vec{V}_{O_c, r/0} = -m_r g (\dot{z} - \dot{\theta}_c Y_G \cos(\theta_c) + \dot{\theta}_c Z_G \sin(\theta_c)) \\P_{ext \rightarrow (c+r)/0} &= -m_c g \dot{z} - m_r g (\dot{z} - \dot{\theta}_c Y_G \cos(\theta_c) + \dot{\theta}_c Z_G \sin(\theta_c))\end{aligned}$$

Note : En refaisant l'approximation $\vec{V}_{O_c, r/0} \approx \vec{V}_{G_c, c/0}$, on obtient l'expression simplifiée suivante :

$$P_{ext \rightarrow (c+r)/0} \approx -(m_c + m_r) g \dot{z}$$

La liaison entre S_c et S_r étant supposée parfaite, la puissance intérieure associée est nulle. La puissance intérieure est donc uniquement celle de la motorisation. Appelons C_m le couple moteur exercé par le châssis S_c sur les roues S_r . On a alors :

$$P_{int} = \{\mathcal{F}_{c \rightarrow r}^m\} \otimes \{\mathcal{V}_{r/c}\} = \left\{ \begin{array}{c} \vec{0} \\ C_m \vec{x} \end{array} \right\}_{O_c} \otimes \left\{ \begin{array}{c} \vec{\Omega}_{r/c} = \dot{\delta} \vec{x} \\ \vec{0} \end{array} \right\}_{O_c} = C_m \dot{\delta}$$

Remarque : l'application du principe fondamental de la dynamique aux roues S_r , en moment, au point O_c , projeté sur l'axe $\vec{x}$, nous donne $C_m = I_r \ddot{\delta}$, puisque O_c est le centre d'inertie de S_r et que la pesanteur et la liaison pivot ne créent pas de couple autour de l'axe $(O_c, \vec{x})$; par conséquent, $P_{int} = I_r \dot{\delta} \ddot{\delta}$.

Question 63 Le théorème de l'énergie cinétique permet-il d'établir une relation directe entre $\ddot{\delta}$ et $\ddot{\theta}_c$ en ne faisant intervenir que des constantes ?

Si oui, appliquer ce théorème pour en déduire cette relation.

Le théorème de l'énergie cinétique permet d'obtenir une **unique** équation :

$$\frac{d}{dt} (E_{c(c/0)} + E_{c(r/0)}) = P_{ext \rightarrow (c+r)/0} + P_{int}$$

Or, nous avons trois variables inconnues : les angles δ, θ et la hauteur z (et leurs dérivées). Il faudrait donc une seconde équation pour « éliminer » z et obtenir une équation différentielle (non linéaire) reliant δ et θ . Le théorème de l'énergie cinétique ne permet donc pas d'obtenir la relation cherchée.

Une relation directe (sans résoudre d'équation différentielle) entre $\ddot{\delta}$ et $\ddot{\theta}_c$ semble dans tous les cas impossibles.

Question 64 D'après la figure 32, pour que le buggy retombe sur ses quatre roues en même temps, faut-il que l'accélération des roues soit positive, négative ou nulle ? Justifier.

Pour que le buggy retombe sur ses quatre roues, en supposant que la zone d'atterrissage soit horizontale, on souhaite que θ_c atteigne 0° . Cela correspond à la courbe en tiret, c'est-à-dire qu'il faut que l'accélération des roues $\ddot{\delta}$ soit positives : il faut donc freiner pour remettre à plat le véhicule.