

Proposition de corrigé

Concours : e3a - Polytech

Année : 2016

Filière : MP

Épreuve : Sciences Industrielles pour l'Ingénieur

Ceci est une proposition de corrigé des concours de CPGE, réalisée bénévolement par des enseignants de Sciences Industrielles de l'Ingénieur et d'Informatique, membres de l'[UPSTI](http://www.upsti.fr) (Union des Professeurs de Sciences et Techniques Industrielles), et publiée sur le site de l'association :

<https://www.upsti.fr/espace-etudiants/annales-de-concours>

A l'attention des étudiants

Ce document vous apportera des éléments de corrections pour le sujet traité, mais n'est ni un corrigé officiel du concours, ni un corrigé détaillé ou exhaustif de l'épreuve en question.

L'UPSTI ne répondra pas directement aux questions que peuvent soulever ces corrigés : nous vous invitons à vous rapprocher de vos enseignants si vous souhaitez des compléments d'information, et à vous adresser à eux pour nous faire remonter vos éventuelles remarques.

Licence et Copyright

Toute représentation ou reproduction (même partielle) de ce document faite sans l'accord de l'UPSTI est **interdite**. Seuls le téléchargement et la copie privée à usage personnel sont autorisés (protection au titre des [droits d'auteur](#)).

En cas de doute, n'hésitez pas à nous contacter à : corrigesconcours@upsti.fr.

Informez-vous !

Retrouvez plus d'information sur les [Sciences de l'Ingénieur](#), l'[orientation](#), les [Grandes Ecoles](#) ainsi que sur les [Olympiades de Sciences de l'Ingénieur](#) et sur les [Sciences de l'Ingénieur au Féminin](#) sur notre site : www.upsti.fr

L'équipe UPSTI



CONCOURS ARTS ET MÉTIERS ParisTech - ESTP - POLYTECH

Correction — Épreuve de Sciences Industrielles MP

À la lecture de l'introduction je suis surpris d'apprendre que la batterie délivre une puissance de 1,2 kW/h !

Vérification de la vitesse de la moto

Question-1

$$v = \frac{Z_{p1}}{Z_{p2}} \cdot \frac{Z_{S1}}{Z_{S2}} \cdot \frac{\pi N_{max}}{30} \cdot R_1$$
$$v \simeq \frac{20}{44} \times \frac{9}{57} \times \frac{\pi \times 4200}{30} \times 0,345 \simeq 10,9 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} \quad (39,2 \text{ km/h})$$

Le diagramme des exigences précise que la moto doit atteindre au moins 25 km/h à cette fréquence de rotation du moteur, donc cette exigence est satisfaite.

Vérification des performances de la suspension

Modélisation

Question-2 On suppose classiquement que les conditions initiales sont nulles. Plus précisément :

$$y(0) = 0 ; x(0) = 0 \text{ et } \dot{x}(0) = 0$$

$$\begin{aligned} Mp^2 X(p) &= -k(X(p) - Y(p)) - \mu p(X(p) - Y(p)) \\ (Mp^2 + \mu p + k) X(p) &= (\mu p + k) Y(p) \end{aligned}$$

$$H(p) = \frac{1 + \frac{\mu}{k}p}{1 + \frac{\mu}{k}p + \frac{M}{k}p^2}$$

Pour la suite on conservera donc :

$$H(p) = \frac{1}{1 + \frac{\mu}{k}p + \frac{M}{k}p^2} \quad (1)$$

Question-3 Par identification on extrait de (1) :

$$K_a = 1; \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{M}} \text{ et } z = \frac{\mu}{2\sqrt{kM}}$$

Question-4 Avec ce modèle de second ordre le temps de réponse minimal est obtenu pour $z = \frac{\sqrt{2}}{2}$ soit :

$$\mu = \sqrt{2kM} = \sqrt{2 \times 70\,000 \times 70} \simeq 3130,5 \text{ kg} \cdot \text{s}^{-1}$$

Réponse de la suspension à un obstacle

Question-5 Je ne comprends pas bien ce que souhaite ici l'auteur du sujet... L'équation différentielle du haut de la page 7 est soudainement modifiée et apparait un terme $k \cdot y_0$? D'où sort-il ? En prévision d'une résolution numérique et en partant de l'équation différentielle initiale nous avons :

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \ddot{x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{M} & -\frac{\mu}{M} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ \dot{x} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{k}{M}y(t) + \frac{\mu}{M}\dot{y}(t) \end{pmatrix}$$

Pour évacuer la difficulté de modélisation liée au terme dérivé « $\frac{\mu}{M}\dot{y}(t)$ » l'auteur suggère à la question 2 de purement le supprimer — « on néglige le terme en p du numérateur ». Il reste alors :

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \ddot{x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{M} & -\frac{\mu}{M} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ \dot{x} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{k}{M}y_0 \end{pmatrix}$$

Soit :

$$\ddot{x}(t) = \underbrace{-\frac{\mu}{M}}_a \cdot \dot{x}(t) - \underbrace{\frac{k}{M}}_b \cdot x(t) + \underbrace{\frac{k}{M}y_0}_c$$

$$a \simeq -42,857; b = 1000; c = 3500$$

Question-6 On peut alors proposer le programme basique suivant :

```

from scipy.integrate import odeint
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np
M=70
mu=3000
k=70000
y0=0.05
def f1(Xv,t):
    return [Xv[1],1/M*(k*(y0-Xv[0])-mu*Xv[1])]

cond_ini=[0,0]
t=np.linspace(0.,1,500)
sol=odeint(f1,cond_ini,t)
plt.grid()
plt.plot(t,sol[:,0])
plt.show()

```

Voici les courbes obtenues...

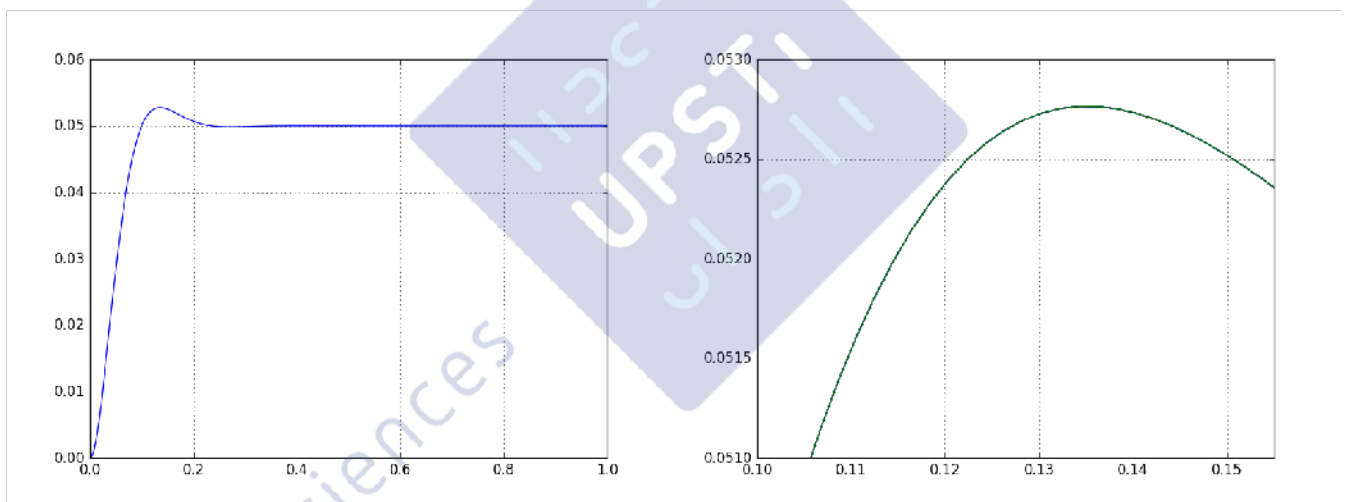


FIGURE 1 – Solution $x(t)$

On peut faire observer que la solution « exacte¹ » de l'équation différentielle initialement posée est accessible... Et par curiosité nous pourrions comparer avec la version simplifiée du sujet :

¹J'ai mis des guillemets !

$$X(p) = \frac{1 + \frac{\mu}{k}p}{1 + \frac{\mu}{k}p + \frac{M}{k}p^2} \cdot \frac{y_0}{p} = \underbrace{\frac{1}{1 + \frac{\mu}{k}p + \frac{M}{k}p^2} \cdot \frac{y_0}{p}}_{F(p)} + \frac{\mu}{k}p \cdot \frac{1}{1 + \frac{\mu}{k}p + \frac{M}{k}p^2} \cdot \frac{y_0}{p}$$

$$\Rightarrow x(t) = f(t) + \frac{\mu}{k}f'(t)$$

Avec les données numériques du texte on obtient (...) :

$$x(t) = \frac{1}{20} \left[1 + e^{-\frac{150}{7}t} \left(\frac{15}{\sqrt{265}} \sin \left(\frac{10}{7} \sqrt{265}t \right) - \cos \left(\frac{10}{7} \sqrt{265}t \right) \right) \right]$$

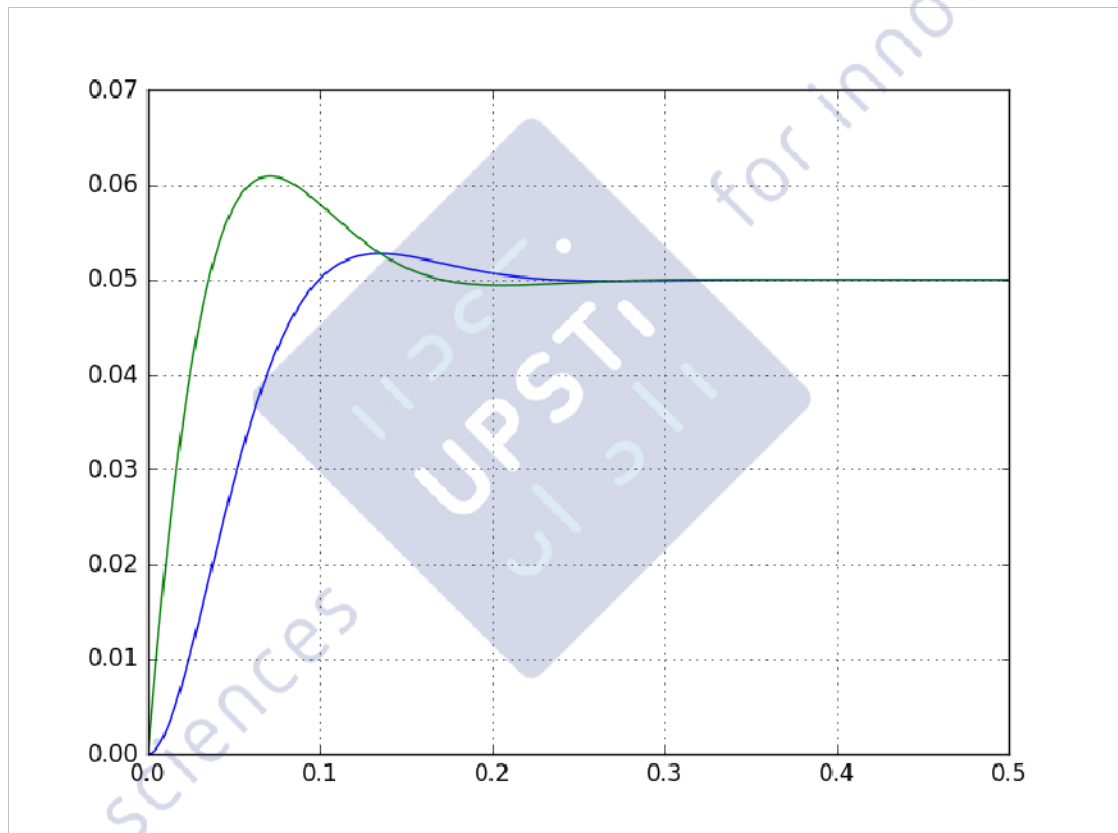


FIGURE 2 – Solution « exacte » / solution suggérée

Question-7 Le temps de réponse à 5% est obtenu approximativement par lecture directe de la courbe « zoomée »... La courbe replonge sous la barre des $1,05 \times 0,05 \simeq 0,0525$ pour t voisin de 0,15 s ce qui est inférieur au 0,5 s imposé dans le diagramme des exigences.

Limite au basculement de la moto

Question-8 Le système Σ est supposé en équilibre statique sous l'effet de trois actions mécaniques :

$$\{F_{sol \rightarrow roue_{AR}}\} : \begin{cases} \vec{R}_1 = T_1 \vec{x}_m + N_1 \vec{y}_m \\ \vec{M}_{A_1, sol \rightarrow roue_{AR}} = \vec{0} \end{cases}$$

$$\{F_{sol \rightarrow roue_{AV}}\} : \begin{cases} \vec{R}_2 = T_2 \vec{x}_m + N_2 \vec{y}_m \\ \vec{M}_{A_2, sol \rightarrow roue_{AV}} = \vec{0} \end{cases}$$

$$\{F_{pes \rightarrow \Sigma}\} : \begin{cases} \vec{P} = -Mg \vec{y}_0 \\ \vec{M}_{G, pes \rightarrow \Sigma} = \vec{0} \end{cases}$$

Question-9

$$T_1 + T_2 - Mg \sin \alpha = 0 \quad (2)$$

$$N_1 + N_2 - Mg \cos \alpha = 0 \quad (3)$$

$$\vec{A_1 A_2} \wedge \vec{R_2} + \vec{A_1 G} \wedge \vec{P} = \vec{0}$$

$$\Rightarrow LN_2 + Mg(d \sin \alpha - c \cos \alpha) = 0 \quad (4)$$

Question-10 À la limite du basculement $N_2 = 0$ soit :

$$(4) \rightsquigarrow d \sin \alpha - c \cos \alpha = 0 \Rightarrow \tan \alpha = \frac{c}{d}$$

Question-11

$$\vec{A_1 G} \cdot \vec{x}_0 = (c \vec{x}_m + d \vec{y}_m) \cdot \vec{x}_0 = c \cos \alpha - d \sin \alpha = d \tan \alpha \cdot \cos \alpha - d \sin \alpha = 0$$

Et en effet Σ est alors en équilibre statique sous l'effet de deux simple forces partageant la même ligne d'action verticale... Le point G est à l'aplomb du point A_1 ².

Question-12 Pour que cette position corresponde à une situation de pleine adhérence il faut que :

$$\begin{aligned} \frac{T_1}{N_1} &= \tan \alpha < \tan \varphi \\ \Rightarrow \varphi &> \alpha \end{aligned}$$

Question-13 Toute chose étant égale par ailleurs — notamment c — plus le centre d'inertie G est bas et plus cette situation d'équilibre sur roue arrière — G à l'aplomb de A_1 — est atteinte pour un fort angle α . Et chacun sait que l'amateur de trial ne souhaite rien tant que lever le plus haut possible sa roue avant...

²Étonnant non ?!

Vérification du couple transmissible par le moteur

Question-14

$$\overrightarrow{V_{A1 \in S1/S3}} = \overrightarrow{V_{G1 \in S1/S3}} + \overrightarrow{A_1 G_1} \wedge \overrightarrow{\Omega_{S1/S3}} = R\dot{\theta}_1 \cdot \vec{x}_0$$

Question-15

$$\overrightarrow{V_{A1 \in S3/R0}} = \dot{x}(t) \cdot \vec{x}_0$$

Question-16 L'hypothèse de roulement sans glissement entraîne :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{V_{A1 \in S1/R0}} &= \vec{0} \\ \overrightarrow{V_{A1 \in S1/S3}} + \overrightarrow{V_{A1 \in S3/R0}} &= \vec{0} \\ \dot{x} + R\dot{\theta}_1 &= 0 \\ \Rightarrow \dot{x} &= -R\dot{\theta}_1 \\ \Rightarrow \ddot{x} &= -R\ddot{\theta}_1 \end{aligned}$$

Question-17 Ces trois vecteurs accélération sont égaux...

$$\overrightarrow{A_{Gi \in Si/R0}} = \frac{d\overrightarrow{V_{Gi \in Si/R0}}}{dt} = \ddot{x}(t) \cdot \vec{x}_0$$

Question-18

$$\overrightarrow{\delta_{G1 \in S1/R0}} = J_1 \cdot \ddot{\theta}_1 \cdot \vec{z}_0$$

Question-19

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\delta_{G3 \in S1/R0}} &= J_1 \cdot \ddot{\theta}_1 \cdot \vec{z}_0 + \underbrace{\overrightarrow{G_3 G_1} \wedge m_1 \overrightarrow{A_{G1 \in S1/R0}}}_{(-ax_0 - by_0) \wedge m_1 \ddot{x} \vec{x}_0} \\ &= (J_1 \ddot{\theta}_1 + m_1 b \ddot{x}) \vec{z}_0 \end{aligned}$$

Question-20 De même³...

$$\overrightarrow{\delta_{G2 \in S2/R0}} = J_2 \cdot \ddot{\theta}_2 \cdot \vec{z}_0$$

$$\overrightarrow{\delta_{G3 \in S2/R0}} = (J_2 \ddot{\theta}_2 + m_2 b \ddot{x}) \vec{z}_0$$

Question-21

$$\overrightarrow{\delta_{G3 \in S3/R0}} = \vec{0}$$

$$\{\mathcal{D}_{\Sigma/R0}\} : \begin{cases} \overrightarrow{\mathcal{D}_{\Sigma/R0}} = \Sigma \overrightarrow{\mathcal{D}_{Si/R0}} = (m_1 + m_2 + m_3) \ddot{x} \cdot \vec{x}_0 \\ \overrightarrow{\delta_{G3 \in \Sigma/R0}} = \Sigma \overrightarrow{\delta_{G3 \in Si/R0}} = (J_1 \ddot{\theta}_1 + J_2 \cdot \ddot{\theta}_2 + b(m_1 + m_2) \ddot{x}) \vec{z}_0 \end{cases}$$

³Pourquoi ne pas avoir formulé le PFD en A_1 !?

Question-22 On modélise l'action de la pesanteur sur chaque solide S_i et les réactions du sol sur chacune des roues soit cinq actions mécaniques :

$$\{F_{\text{sol} \rightarrow \text{roue} i}\} : \begin{cases} \overrightarrow{R_{\text{sol} \rightarrow \text{roue} i}} = T_i \overrightarrow{x_0} + N_i \overrightarrow{y_0} \\ \overrightarrow{M_{A_i, \text{sol} \rightarrow \text{roue} i}} = \overrightarrow{0} \end{cases} \quad i \in \{1; 2\}$$

$$\{F_{\text{pes} \rightarrow S_i}\} : \begin{cases} \overrightarrow{P_{\text{pes} \rightarrow S_i}} = -m_i \cdot g \cdot \overrightarrow{y_0} \\ \overrightarrow{M_{G_i, \text{pes} \rightarrow S_i}} = \overrightarrow{0} \end{cases} \quad i \in \{1; 2; 3\}$$

Question-23 Après simplifications, puisque à la limite du décollement $N_2 = T_2 = 0$:

$$\begin{aligned} (m_1 + m_2 + m_3) \ddot{x} &= T_1 \\ N_1 - (m_1 + m_2 + m_3) g &= 0 \\ J_1 \ddot{\theta}_1 + b \ddot{x} (m_1 + m_2) &= g [a m_1 + (a - L) m_2] + (b + R) T_1 - a N_1 \end{aligned}$$

Question-24

$$\ddot{x} \left(b(m_1 + m_2) - \frac{J_1}{R} \right) = g [a m_1 + (a - L) m_2] + (b + R) (m_1 + m_2 + m_3) \ddot{x} - a (m_1 + m_2 + m_3) g$$

$$\ddot{x} = \frac{g [a m_1 + (a - L) m_2 - a (m_1 + m_2 + m_3)]}{b(m_1 + m_2) - \frac{J_1}{R} - (b + R) (m_1 + m_2 + m_3)} = \frac{g (L m_2 + a m_3)}{\frac{J_1}{R} + (b + R) m_3}$$

$$\ddot{x} \simeq \frac{9,81 (1,3 \times 7 + 0,65 \times 54)}{9 \times 0,34 + 54 (0,325 + 0,34)} \simeq 11 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$$

Question-25

$$f_{\min} = \frac{T_1}{N_1} = \frac{\ddot{x}}{g}$$

Question-26 L'application du moment dynamique à S_1 soumise au couple au niveau de la roue C_{m1} et à la réaction du sol donne — puisque la liaison pivot roue-cadre est supposée sans frottement :

$$J_1 \ddot{\theta}_1 = C_{m1} + R T_1$$

Question-27 soit :

$$C_{m1} = - \left[R (m_1 + m_2 + m_3) + \frac{J_1}{R} \right] \ddot{x}$$

$$C_{m1} \simeq -10 \times [0,34 (9 + 7 + 54) + 9 \times 0,34] \simeq -27 \text{ daN} \cdot \text{m}$$

La somme des masses est ici de 70 kg ! Où est passé le pilote ? Il est donc supposé ici que son placement sur la moto est tel que sa masse est sans effet... (?)

Question-28 En supposant que la transmission de puissance a un rendement énergétique parfait alors :

$$C_m = C \cdot \frac{Z_{p1}}{Z_{p2}} \cdot \frac{Z_{S1}}{Z_{S2}}$$

$|C_m| \simeq 270 \times \frac{20 \times 9}{44 \times 57} \simeq 2 \text{ daN} \cdot \text{m}$ Or ce moteur est capable de délivrer $2,4 \text{ daN} \cdot \text{m}$ de manière ponctuelle... Le wheeling est possible sans effort (ou sans pilote)! C'est plus du sport!

Influence de la pente sur la vitesse maxi de la moto

Question-29 L'énergie cinétique totale⁴ :

$$E_c(\Sigma/R_0) = E_{croue AV} + E_{croue AR} + E_{crotor} + E_{cint} + E_{cMmu}$$

$$\begin{aligned} E_c(\Sigma/R_0) &= \frac{1}{2} J_1 \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} J_2 \dot{\theta}_2^2 + \frac{1}{2} J_r \dot{\theta}_r^2 + \frac{1}{2} J_{int} \dot{\theta}_{int}^2 + \frac{1}{2} M_{mu} v^2 \\ &= \frac{1}{2} [(J_1 + J_2 + M_{mu} R^2) K_1^2 K_2^2 + J_r + J_{int} K_1^2] \omega_m^2 \end{aligned}$$

le moment d'inertie ramené à l'axe du moteur est donc :

$$J_{eq} = (J_1 + J_2 + M_{mu} R^2) K_1^2 K_2^2 + J_r + J_{int} K_1^2$$

Question-30 Il y a roulement sans glissement des roues sur le sol — sans résistance au roulement — donc les puissances développées par les actions du sol sur les roues sont nulles.

Le problème est formulé de telle façon que C_r modélise l'action résistante de la pesanteur ramenée à l'axe de rotation de la roue arrière donc :

$$P_{pes \rightarrow \Sigma/R_0} = C_r K_1 K_2 \omega_m \text{ (avec } P_{pes \rightarrow \Sigma/R_0} < 0 \text{ en phase de montée)}$$

Enfin il reste à exprimer la puissance interne développées par le moteur :

$$P_{rotor \leftrightarrow stator} = C_m \omega_m \text{ (} > 0 \text{ en phase de montée)}$$

Pas de liaison dissipatives...

Question-31 En appliquant le théorème de l'énergie cinétique nous obtenons :

$$J_{eq} \dot{\omega}_m = C_r K_1 K_2 + C_m$$

⁴Pourquoi avoir soudainement modifié les notations — J_1 devient « J_{AV} » etc. — dans le tableau de la page 13?

Question-32

$$H_1(p) = -K_1 K_2 ; H_4(p) = \frac{1}{J_{eq} \cdot p}$$

Question-33

$$H_5(p) = H_3(p) = K ; H_2(p) = \frac{1}{R_m + p \cdot L_m}$$

Question-34 On applique ici le théorème de superposition :

$$\Omega_m(p) = \frac{\Omega_m(p)}{U_c(p)} \Big|_{C_r(p)=0} U_c(p) + \frac{\Omega_m(p)}{C_r(p)} \Big|_{U_c(p)=0} C_r(p)$$

$$H_U(p) = \frac{\Omega_m(p)}{U_c(p)} \Big|_{C_r(p)=0} = \frac{H_2 H_3 H_4}{1 + H_2 H_3 H_4 H_5}$$

$$H_{C_r}(p) = - \frac{\Omega_m(p)}{C_r(p)} \Big|_{U_c(p)=0} = \frac{H_1 H_4}{1 + H_2 H_3 H_4 H_5}$$

Question-35

$$H_U(p) = \frac{\Omega_m(p)}{U_c(p)} \Big|_{C_r(p)=0} = \frac{\frac{K}{R_m + pL_m} \cdot \frac{1}{J_{eq} \cdot p}}{1 + \frac{K^2}{R_m + pL_m} \cdot \frac{1}{J_{eq} \cdot p}} = \frac{K}{K^2 + (R_m + pL_m) J_{eq} \cdot p}$$

$$H_U(p) = \frac{\frac{1}{K}}{1 + \frac{R_m J_{eq}}{K^2} \cdot p + \frac{J_{eq} L_m}{K^2} \cdot p^2}$$

Question-36

$$K_v = \frac{1}{K} ; \omega_0 = \frac{K}{\sqrt{J_{eq} L_m}} ; z = \frac{R_m}{2K} \sqrt{\frac{J_{eq}}{L_m}}$$

$$K_v \simeq \frac{1}{0,12} \simeq 8,3 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1} \cdot \text{V}^{-1}$$

$$\omega_0 \simeq \frac{0,12}{\sqrt{0,1 \times 60 \cdot 10^{-3}}} \simeq 1,6 \text{ rad/s}$$

$$z \simeq \frac{0,15}{2 \times 0,12} \sqrt{\frac{0,1}{60 \cdot 10^{-3}}} \simeq 0,8$$

Question-37 Pour ce modèle de deuxième ordre nous pouvons estimer le temps de réponse à 5% à l'aide de l'abaque fourni :

$$\omega_0 \text{tr}_{5\%} \simeq 3,5 \Rightarrow \text{tr}_{5\%} \simeq \frac{3,5}{1,55} \simeq 2,3 \text{ s}$$

$$D_{1\%}(z = 0,8) \simeq 1,5\%$$

Le $tr_{5\%}$ estimé ici est inférieur au 3 s indiqué dans le diagramme des exigences.

Question-38 Le temps du 1^{er} dépassement : $\frac{T}{2} \simeq \frac{\pi}{1,55\sqrt{1-0,8^2}} \simeq 3,4$ s ainsi que l'amplitude de ce premier dépassement : $D_{1\%}(z = 0,8) \simeq \frac{1,5}{100} \times 3850 \simeq 58$ tr/min nous permet de placer un point... Le temps de réponse à 5% ($0,95 \times 3850 \simeq 3660$ tr/min) permet de poser un second point. Le respect d'une tangente nulle à l'origine...

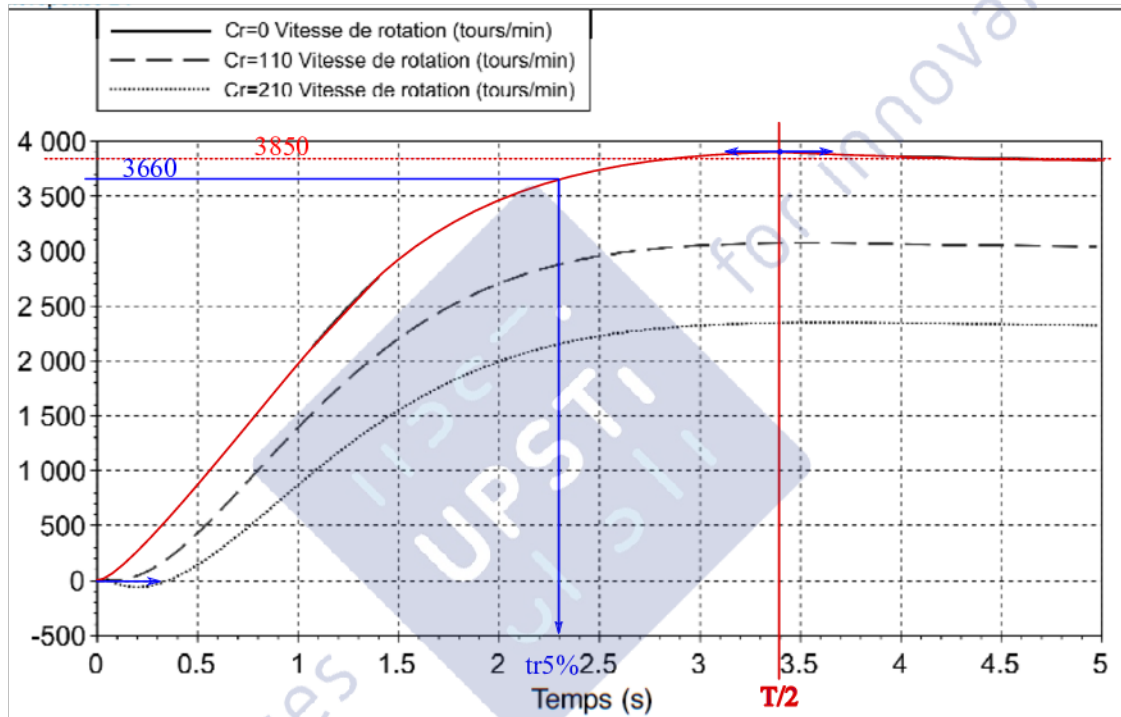


FIGURE 3 – Réponse à un échelon de tension

Question-39 Le temps d'accélération — que j'interprète comme le temps du premier dépassement — ne semble pas modifié. Naturellement la vitesse maximale dépend fortement de la pente. La vitesse maximale pour une pente de 40% est d'environ 2350 tr/min ce qui, conformément au diagramme des exigences, reste supérieur au 50% de la vitesse maximale de 3850 tr/min atteint sur sol horizontal.