teaching sciences for innovation

Proposition de corrigé

Concours : X-ENS

Année : 2022

Filière : PSI

Épreuve : Modélisation

Ceci est une proposition de corrigé des concours de CPGE, réalisée bénévolement par des enseignants de Sciences Industrielles de l'Ingénieur et d'Informatique, membres de l'UPSTI (Union des Professeurs de Sciences et Techniques Industrielles), et publiée sur le site de l'association :

https://www.upsti.fr/espace-etudiants/annales-de-concours

A l'attention des étudiants

Ce document vous apportera des éléments de corrections pour le sujet traité, mais n'est ni un corrigé officiel du concours, ni un corrigé détaillé ou exhaustif de l'épreuve en question.

L'UPSTI ne répondra pas directement aux questions que peuvent soulever ces corrigés : nous vous invitons à vous rapprocher de vos enseignants si vous souhaitez des compléments d'information, et à vous adresser à eux pour nous faire remonter vos éventuelles remarques.

Licence et Copyright

Toute représentation ou reproduction (même partielle) de ce document faite sans l'accord de l'UPSTI est **interdite**. Seuls le téléchargement et la copie privée à usage personnel sont autorisés (protection au titre des droits d'auteur).

En cas de doute, n'hésitez pas à nous contacter à : corrigesconcours@upsti.fr.

Informez-vous !

Retrouvez plus d'information sur les Sciences de l'Ingénieur, l'orientation, les Grandes Ecoles ainsi que sur les Olympiades de Sciences de l'Ingénieur et sur les Sciences de l'Ingénieur au Féminin sur notre site : www.upsti.fr

L'équipe UPSTI

Le cœur

Corrigé UPSTI

Modélisation

1 Présentation de l'étude

1.1 Histoire et épistémiologie du cœur

Question 1 Citer deux exemples de l'intérêt médical de développer un modèle numérique complet du cœur.

Développer un modèle numérique du cœur permet de simuler plus précisément son fonctionnement. On pourra ainsi mieux le comprendre afin de le réparer.

D'autre part, on connaîtra mieux les flux sanguins (débit, pression, température, etc...) qui vont partir du cœur vers d'autres organes (foie, reins, poumons, etc...). la compréhension du comportement des autres organes sera aussi améliorée.

1.2 Le cœur juste une pompe ?

Question 2 On considère dans l'ensemble du sujet que le rythme cardiaque humain est compris entre 40 et 180 battements par minutes. Déterminer les plages de fréquence cardiaque et de pulsation cardiaque correspondantes. On donnera un résultat avec 3 chiffres significatifs.

La fréquence cardiaque est comprise entre $40/60 = 0.667Hz$ et $180/60 = 3Hz$ (battements par seconde). La pulsation cardiaque est comprise entre $2 * \pi * 0.667 = 4.19rad.s^{-1}$ et $2 * \pi * 3 = 18.8rad.s^{-1}$.

2 La modélisation du myocarde

2.1 Physiologie du muscle

Question 3 Déterminer la longueur l_c de l'élément contractile ainsi que sa déformation, notée ϵ_c en fonction de s, s_0 et N.

Si on néglige le décalage dû aux lignes "Z", on a : $l_c = N * s$ et $l_{c0} = N * s_0$

$\epsilon_c = \frac{l_c - l_{c0}}{l_{c0}} = \frac{s - s_0}{s_0}$

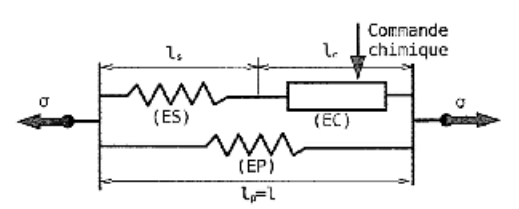
2.2 Modèles unidirectionnels à l'échelle macroscopique

Question 4 A partir des constations expérimentales, déterminer le type des contractions pour les phases (4) et (5).

Lors de la phase 4, la contraction est "isométrique" (le muscle ne change pas de longueur)

Lors de la phase 5, la contraction est "isotonique" (le muscle se raccourcit et la force est quasiment constante car le déplacement de la masse A est lent)

© UPSTI - Toute reproduction interdite sans l'autorisation de l'UPSTI



Question 5 Déterminer les forces surfaciques σ_s et σ en fonction des forces surfaciques σ_c et σ_p.

Les forces surfaciques ne sont pas bien définies dans l'énoncé. On définira chaque force surfacique comme étant la contrainte subie par l'élément. L'élément (EC) ne peut subir qu'une contrainte positive ($\sigma_c \geq 0$). De plus, on supposera que la section de chacun des éléments reste constante.

Equilibre du nœud entre les éléments (ES) et (EC) : $\boxed{\sigma_s = \sigma_c}$

Equilibre du nœud de droite : $\boxed{\sigma = \sigma_c + \sigma_p}$

Question 6 Déterminer les déformations ϵ_s et ϵ en fonction de ϵ_c, ϵ_p et du rapport $a = \frac{l_{c0}}{l_{p0}}$.

Tout d'abord, le muscle se déforme de la même façon que l'élément (EP). Donc : $\boxed{\epsilon = \epsilon_p}$

D'autre part :

$$\begin{cases} \epsilon_s = \frac{l_s - l_{s0}}{l_{s0}} \\ \epsilon_c = \frac{l_c - l_{c0}}{l_{c0}} \\ \epsilon_p = \frac{l_p - l_{p0}}{l_{p0}} \end{cases} \text{ avec } l_s + l_c = l_p \text{ et } l_{s0} + l_{c0} = l_{p0}$$

$$\epsilon_p = \frac{l_s + l_c - (l_{s0} + l_{c0})}{l_{s0} + l_{c0}} = \frac{\epsilon_s * l_{s0} + \epsilon_c * l_{c0}}{l_{s0} + l_{c0}} = \frac{\epsilon_s * (l_{p0} - l_{c0}) + \epsilon_c * l_{c0}}{l_{p0}}$$

$$\epsilon_p = \epsilon_s * (1 - a) + \epsilon_c * a$$

$$\boxed{\epsilon_s = \frac{\epsilon_p - \epsilon_c * a}{1 - a}}$$

Question 7 En considérant les éléments (ES) et (EP) comme des ressorts, comment évoluent qualitativement la force surfacique σ_c et la longueur l_c de l'élément contractile lors d'une contraction isométrique et lors d'une contraction isotonique ?

Lors d'une contraction *isométrique*, le muscle ne change pas de longueur ($\epsilon = \epsilon_p = 0$). Ainsi (ES) qui est passif s'allonge, et (EC) qui est actif se raccourci (l_c diminue). Si on suppose que la section de fibre S_f reste constante, la force surfacique $\sigma_c = \frac{F_c}{S_f}$ va donc augmenter.

Lors d'une contraction *isotonique*, le muscle fournit une force constante ($\sigma = cte$). Si le muscle se contracte à force constante, l_p va diminuer, ce qui va diminuer la force surfacique σ_p dans l'élément (EP). La force surfacique σ_c va augmenter en contrepartie ($\sigma = \sigma_c + \sigma_p$). La longueur l_c va diminuer.

Question 8 Pour une contraction isométrique, déterminer un encadrement du taux de déformation $|\dot{\epsilon}_c| = \left|\frac{\epsilon_c}{dt}\right|$ en fonction de la fonction d'activation u et de la force surfacique σ_c. Exprimer alors le taux de déformation maximal pour cette phase.

Lors d'une contraction isométrique, l'élément contractile se contracte (σ_c augmente) sans que la longueur l_p ne bouge. Donc ϵ_c diminue : $\frac{d\epsilon_c}{dt} < 0$. Ainsi, d'après la relation donnée dans l'énoncé :

$$\frac{d\sigma_c}{dt} = \lambda_c \sigma_c \frac{d\epsilon_c}{dt} + \nu_c \frac{d\epsilon_c}{dt} + k_c.u$$

$$\frac{d\epsilon_c}{dt} = \frac{\frac{d\sigma_c}{dt} - k_c.u}{\nu_c + \lambda_c \sigma_c}$$

$$\left|\frac{d\epsilon_c}{dt}\right| = \frac{k_c.u - \frac{d\sigma_c}{dt}}{\nu_c + \lambda_c \sigma_c}$$

© UPSTI - Toute reproduction interdite sans l'autorisation de l'UPSTI

Comme σ_c augmente (en partant de 0), on a : $\boxed{\left|\frac{d\epsilon_c}{dt}\right|_{max} = \frac{k_c.u_{max}}{\nu_c}}$

Remarque : Nous ne voyons pas comment avoir le minimum ici ...

Question 9 Pour une relaxation isotonique du muscle, déterminer la valeur minimale de la force surfacique σ_c développée par l'élément contractile. Le résultat trouvé devant être positif, déterminer une contrainte sur les paramètres de la fonction d'activation.

Lors d'une relaxation isotonique, le muscle fournit une force surfacique σ constante alors que sa longueur l_p augmente. L'élément contractile va s'allonger : $\frac{d\epsilon_c}{dt} > 0$.

$\sigma_c = \sigma - \sigma_p$

On dérive par rapport au temps (avec $\sigma = cte$) :

$-\lambda_c\sigma_c\left|\frac{d\epsilon_c}{dt}\right| + \nu_c\frac{d\epsilon_c}{dt} + k_c.u = -\frac{d\sigma_p}{dt}$

$(-\lambda_c\sigma_c + \nu_c)\frac{d\epsilon_c}{dt} + k_c.u = -\frac{d\sigma_p}{dt}$

$\lambda_c\sigma_c = \frac{\left(k_c.u + \frac{d\sigma_p}{dt}\right)}{\frac{d\epsilon_c}{dt}} + \nu_c$

Lors de la relaxation isotonique, le ressort (Ep) va s'allonger donc σ_p va augmenter : $\frac{d\sigma_p}{dt} > 0$

Au final :

$\sigma_{c,min} = \frac{\left(-k_c.u_{min} + \frac{d\sigma_p}{dt}\right)}{\lambda_c.\frac{d\epsilon_c}{dt}} + \frac{\nu_c}{\lambda_c}$

Remarque : Nous ne voyons pas comment déterminer les paramètres de la fonction d'activation.

Question 10 Montrer que la force surfacique σ développée par le muscle peut se mettre sous la forme : $\sigma = K.\epsilon + K_c.\epsilon_c$ où K etK_c s'écrivent en fonction de E_s, E_p et la fraction a.

$\sigma = \sigma_p + \sigma_c = \sigma_p + \sigma_s = E_p.\epsilon_p + E_s.\epsilon_s = E_p.\epsilon + E_s.\frac{\epsilon - a.\epsilon_c}{1-a}$

$\boxed{\sigma = \frac{E_p(1-a)+E_s}{1-a}\epsilon - \frac{a.E_s}{1-a}.\epsilon_c}$

Donc

$K = \frac{E_p(1-a)+E_s}{1-a}$ et $K_c = -\frac{a.E_s}{1-a}$

Question 11 En supposant que l'action mécanique σ_p est nulle pour une déformation nulle, déterminer la nouvelle expression de la force surfacique σ_p en fonction de ϵ_p, λ_p et E_p. Puis déterminer à nouveau la force surfacique du muscle σ en fonction de ϵ et de σ_c.

En intégrant l'équation différentielle donnée, on trouve :

$\sigma_p = \frac{-E_p}{\lambda_p} + K.e^{\lambda_p.\epsilon_p}$

On doit avoir $\sigma_p = 0$ pour une déformation nulle. on trouve alors la constante K :

$\sigma_p = \frac{-E_p}{\lambda_p}(1 - e^{\lambda_p.\epsilon_p})$

Au final :

$\boxed{\sigma = \frac{-E_p}{\lambda_p}(1 - e^{\lambda_p.\epsilon}) - \sigma_c}$

2.3 Prise en compte des effets inertiels

Question 12 Faire l'inventaire des actions mécaniques s'exerçant sur la masse de fibre musculaire.

La fibre musculaire est soumise à :

© UPSTI - Toute reproduction interdite sans l'autorisation de l'UPSTI

- l'action de l'élément (ES),
- l'action de l'élément (EC),
- l'action du sang (de type frottement fluide).

Question 13 Appliquer le principe fondamental de la dynamique à la masse et déterminer l'équation différentielle reliant $\ddot{\epsilon}_c$, $\dot{\epsilon}_c$ et $\sigma_s - \sigma_c$.

PFD sur la masse m projeté dans la direction $+\vec{x}$:

$\sigma_s.S_f - \sigma_c.S_f - \eta.\dot{x} = m.\ddot{x}$

Or $x = l_c$, et $\epsilon_c = \frac{x - l_{c0}}{l_{c0}}$.

Ainsi, on peut écrire :

$$\boxed{(\sigma_s - \sigma_c).S_f = \eta.l_{c0}.\dot{\epsilon}_c + m.l_{c0}.\ddot{\epsilon}_c}$$

Question 14 A partir de cette équation différentielle, montrer qu'on peut écrire : $\ddot{\epsilon}_c + 2\xi\omega\dot{\epsilon}_c + \omega^2\epsilon_c = \omega^2.\alpha.\epsilon + \beta.\sigma_c$ où les constantes ξ, ω, α et β sont à exprimer en fonction de a, E_s, ρ_m, l_{c0} et η.

Nous venons de démontrer :

$(\sigma_s - \sigma_c).S_f = \eta.l_{c0}.\dot{\epsilon}_c + m.l_{c0}.\ddot{\epsilon}_c$

Or

$\sigma_s = E_s.\epsilon_s = E_s.\frac{\epsilon_p - a.\epsilon_c}{1-a} = \frac{E_s}{1-a}.(\epsilon - a.\epsilon_c)$

Donc :

$\left(\frac{E_s}{1-a}.(\epsilon - a.\epsilon_c) - \sigma_c\right).S_f = \eta.l_{c0}.\dot{\epsilon}_c + m.l_{c0}.\ddot{\epsilon}_c$

$\ddot{\epsilon}_c + \frac{\eta}{m}\dot{\epsilon}_c + \frac{a.S_f.E_s}{l_{c0}.m(1-a)}\epsilon_c = \frac{E_s.S_f}{l_{c0}.m(1-a)}.\epsilon - \frac{S_f}{l_{c0}.m}.\sigma_c$

On identifie les constantes :

$$\begin{cases} 2\xi\omega = \frac{\eta}{m} \\ \omega^2 = \frac{a.S_f.E_s}{l_{c0}.m(1-a)} \\ \omega^2.\alpha = \frac{E_s.S_f}{l_{c0}.m(1-a)} \\ \beta = -\frac{S_f}{l_{c0}.m} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \xi = \frac{\eta.\sqrt{l_{c0}(1-a)}}{2\sqrt{m.a.S_f.E_s}} \\ \omega = \sqrt{\frac{a.S_f.E_s}{l_{c0}.m(1-a)}} \\ \alpha = \frac{1}{a} \\ \beta = -\frac{S_f}{l_{c0}.m} \end{cases}$$

Or $\rho_m = \frac{m}{S_f.l_{p0}} = \frac{m.a}{S_f.l_{c0}}$

On en déduit : $\begin{cases} \xi = \frac{\eta.\sqrt{1-a}}{2\sqrt{\rho_m.S_f^2.E_s}} \\ \omega = \sqrt{\frac{a^2.E_s}{\rho_m.l_{c0}^2(1-a)}} \\ \alpha = \frac{1}{a} \\ \beta = -\frac{a}{\rho_m.l_{c0}^2} \end{cases}$

Remarque : il reste encore S_f dans ξ

2.4 Modèle volumique du cœur

Question 15 Exprimer le volume V_m des fibres musculaires en fonction du rayon R_g, de la hauteur H_g et de l'épaisseur e, puis exprimer le volume V_g du sang à l'intérieur du ventricule gauche.

L'épaisseur e étant faible devant le rayon R_g, on a facilement :

$V_m = 2\pi.R_g.e.H_g$

© UPSTI - Toute reproduction interdite sans l'autorisation de l'UPSTI

Le volume du sang V_g vaut :

$V_g = \pi.R_g^2.H_g$

Question 16 Sachant que le muscle reste incompressible durant la déformation, exprimer une relation entre l'épaisseur e et le rayon R_g.

Le volume du muscle doit rester constant et égal au volume au repos.

$V_m = V_{m0} \Rightarrow 2\pi.R_g.e.H_g = 2\pi.R_{g0}.e_0.H_g$

$\boxed{R_g.e = R_{g0}.e_0}$

Question 17 Exprimer la déformation de la fibre musculaire ϵ en fonction du rayon R_g puis exprimer le volume intérieur V_g en fonction de la déformation de la fibre. Calculer alors le débit Q_g du ventricule gauche en fonction de la déformation de la fibre ϵ.

Chaque fibre s'allonge dans la direction orthoradiale :

$\epsilon = \frac{2\pi.R_g - 2\pi.R_{g0}}{2\pi.R_{g0}} = \frac{R_g - R_{g0}}{R_{g0}}$

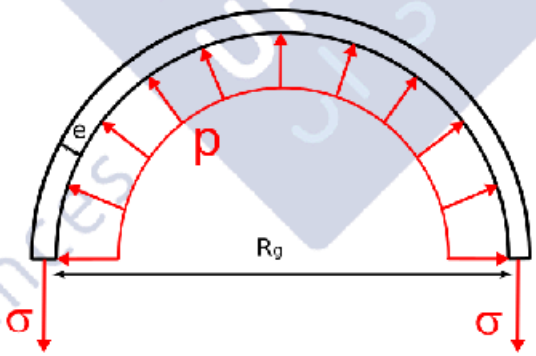
Le volume intérieur du ventricule s'écrit alors :

$V_g = \pi.R_g^2.H_g = \pi.(\epsilon.R_{g0} + R_{g0})^2.H_g = \pi.(\epsilon+1)^2.R_{g0}^2.H_g$

Le débit volumique Q_g vaut donc :

$Q_g = \frac{dV_g}{dt} = 2\pi.\left(\frac{d\epsilon}{dt}\right)(\epsilon+1).R_{g0}^2.H_g$

Question 18 En raisonnant sur l'équilibre d'un demi-cylindre, montrer que la pression sanguine p dans le ventricule gauche vérifie la relation suivante $\sigma = K_\sigma p$ où K_σ est à exprimer en fonction de ϵ et des grandeurs au repos.



On isole un demi cylindre. Il est soumis à 2 contraintes σ dans l'épaisseur e, ainsi qu'à la pression sanguine à l'intérieur du demi-cylindre.

L'application du PFS en projection sur l'axe vertical donne :

$2\sigma.e.H_g = p.2.R_g.H_g$

$\sigma = \frac{p.R_g}{e} = \frac{p.R_g^2}{R_{g0}.e_0}$

Ainsi : $K_\sigma = \frac{R_g^2}{R_{g0}.e_0}$

$\boxed{K_\sigma = \frac{R_{g0}(1+\epsilon)^2}{e_0}}$

Question 19 Ecrire le système d'équations permettant de relier la fonction d'activation u, l'entrée du modèle de myocarde, aux grandeurs de sortie qui sont le débit sanguin Q_g et la pression sanguine p. Vous justifierez les choix des équations.

© UPSTI - Toute reproduction interdite sans l'autorisation de l'UPSTI

Il faut reprendre toutes les équations établies dans les questions précédentes pour en déduire Q_g et p. Nous ne voyons pas d'équations à choisir car elles sont toutes reliées.

3 La circulation sanguine

3.1 L'écoulement sanguin

Question 20 Estimer le débit sanguin ainsi que la vitesse de l'écoulement à travers l'artère aortique, puis estimer le débit et la vitesse d'écoulement à travers un capillaire.

Le cœur peut pomper environ $5,7l$ de sang par minute. La totalité de ce débit passe par l'artère aortique $Q_{aorte} \approx 5,7l.min^{-1}$.

$V_{aorte} = \frac{Q_{aorte}}{S_{aorte}} = \frac{5,7/60000}{\pi * 0,005^2} = 1,2m.s^{-1}$

Le réseau sanguin humain comporte environ 1 milliard de capillaires. On suppose que le débit total de sang va se répartir équitablement dans ces capillaires :

$Q_{capillaires} = \frac{Q_{aorte}}{10^9} = 5,7.10^{-9}\ l.min^{-1}$

$V_{capillaires} = \frac{Q_{capillaires}}{S_{capillaires}} = \frac{5,7.10^{-9}/60000}{\pi * (4.10^{-6})^2} = 1,9\ mm.s^{-1}$

Question 21 Calculer le nombre de Reynolds dans un tube capillaire. Conclure sur le type d'écoulement et la prédominance des effets.

Définition du nombre de Reynolds :

$R_e = \frac{\rho_s.V.D}{\mu_s}$

AN : $R_e = \frac{10^3 * 1,9.10^{-3} * 4.10^{-6}}{10^{-3}} = 7.6.10^{-3}$

Le nombre de Reynolds est très inférieur à 1. Le sang s'écoule selon le régime de Stokes (les forces d'inertie sont négligeables devant les forces visqueuses et de pression).

Question 22 Justifier la forme du champ de vitesses dans un capillaire $\overrightarrow{V(r,\theta,x,t)} = v(r).\overrightarrow{x}$.

Dans un écoulement à faible nombre de Reynolds, le mouvement est laminaire. Ici des cylindres coaxiaux de particules glissent les uns dans les autres, ce qui correspond bien au champ de vitesses donné.

Question 23 Faire l'inventaire des forces s'exerçant sur le cylindre de rayon r.

On isole un cylindre de rayon $r < r_c$.

Il est soumis à :

- l'action de frottement visqueux $\overrightarrow{F_{visqueux}}$,
- l'action de pression amont p_a,
- l'action de pression avale p_v.

Question 24 Appliquer le principe fondamental de la dynamique au tube de rayon r et en déduire une équation différentielle de la forme : $\frac{dv}{dr} = \lambda(p_a - p_v)r$ où λ s'exprime en fonction de L_c et μ_s.

$-2\pi r\mu_s L_c \left|\frac{dv}{dr}\right| + (p_a - p_v)\pi r^2 = \int_{r=0}^{r} \rho_s.2.\pi.r.L_c.\frac{dv}{dt}dr$

La vitesse $v(r)$ ne dépend pas du temps, de plus elle décroit avec le rayon r. Ainsi $\frac{dv}{dr} < 0$.

$2\pi r\mu_s L_c \left(\frac{dv}{dr}\right) + (p_a - p_v)\pi r^2 = 0$

$\left(\frac{dv}{dr}\right) = -\frac{(p_a - p_v)}{2\mu_s.L_c}.r$

On a donc : $\boxed{\lambda = -\frac{1}{2\mu_s.L_c}}$

© UPSTI - Toute reproduction interdite sans l'autorisation de l'UPSTI

Question 25 Déterminer le débit volumique Q de la conduite puis déterminer le coefficient de perte de charge $R_c = \frac{p_a - p_v}{Q}$ en fonction de L_c, μ_s et r_c.

En intégrant l'équation trouvée à la question précédente entre r et r_c, on trouve :

$v(r_c) - v(r) = \frac{1}{2}\lambda(p_a - p_v)(r_c^2 - r^2)$

Or $v(r_c) = 0$ car le sang frotte sur la conduite,

$$\boxed{v(r) = \frac{1}{2}\lambda(p_a - p_v)(r^2 - r_c^2)}$$

On calcule le débit Q :

$Q = \int_{r=0}^{r_c} v(r).2\pi.r.dr = 2\pi.\frac{1}{2}\lambda(p_a - p_v)\left(\frac{r_c^4}{4} - r_c^2 * \frac{r_c^2}{2}\right) = -\pi.\lambda(p_a - p_v)\left(\frac{r_c^4}{4}\right) = \pi.(p_a - p_v)\left(\frac{r_c^4}{8.\mu_s.L_c}\right)$

Coefficient de perte de charge :

$$\boxed{R_c = \frac{p_a - p_v}{Q} = \frac{8.\mu_s.L_c}{\pi.r_c^4}}$$

Question 26 Déterminer la puissance de transport P_t et d'entretien P_m pour un capillaire. En déduire la puissance totale P.

La puissance nécessaire au transport du sang P_t correspond à la puissance de poussée initiée par les pressions p_a et p_v :

$P_t = \int_{r=0}^{r_c}(p_a - p_v).2\pi.r.v(r)dr = \int_{r=0}^{r_c}(p_a - p_v).2\pi.r.\frac{1}{2}\lambda(p_a - p_v)(r^2 - r_c^2)dr$

$P_t = 2\pi.\frac{1}{2}\lambda(p_a - p_v)^2(\frac{r_c^4}{4} - r_c^2 * \frac{r_c^2}{2})$

$P_t = \pi.(p_a - p_v)^2(\frac{r_c^4}{8.\mu_s.L_c})$ ou encore $P_t = Q.(p_a - p_v)$

La puissance nécessaire pour maintenir le flux sanguin s'exprime par :

$P_m = \lambda_m.\pi.r_c^2.L_c$

Au final :

$P = Q.(p_a - p_v) + \lambda_m.\pi.r_c^2.L_c$

Ou en fonction du débit Q :

$$\boxed{P = Q^2.\frac{8.\mu_s.L_c}{\pi.r_c^4} + \lambda_m.\pi.r_c^2.L_c}$$

Question 27 Le rayon r_c minimise la puissance de transport et d'entretien pour débit imposé par le cœur. Montrer alors qu'il existe une relation $Q = K_Q.r_c^3$ où K_Q est une grandeur à exprimer en fonction de μ_s et de λ_m.

On cherche le rayon r_c qui minimise la puissance P :

$\frac{dP}{dr_c} = 0 \Leftrightarrow Q^2.\frac{-4*8.\mu_s.L_c}{\pi.r_c^5} + 2\lambda_m.\pi.r_c.L_c = 0 \Leftrightarrow Q^2 = \frac{2\lambda_m.\pi^2.r_c^6.L_c}{32.\mu_s.L_c}$

$Q = \sqrt{\frac{\lambda_m.\pi^2.r_c^6.L_c}{16.\mu_s.L_c}}$

$$\boxed{Q = \frac{\pi}{4}\sqrt{\frac{\lambda_m}{\mu_s}}.r_c^3}$$

La constante K_Q vaut : $\boxed{K_Q = \frac{\pi}{4}\sqrt{\frac{\lambda_m}{\mu_s}}}$

Question 28 Dans le réseau sanguin, on considère que chaque vaisseau minimise la puissance de transport et d'entretien. Lors d'une bifurcation, quelle relation doit vérifier le rayon de la branche mère par rapport aux rayons de la branche fille ? Cette loi était-elle vérifiée pour l'aorte et les grandes artères ?

Le débit se conserve entre les branches mère et filles. Si on a 1 branche mère qui se sépare en k branches filles,

© UPSTI - Toute reproduction interdite sans l'autorisation de l'UPSTI

on doit avoir :

$Q_{mere} = Q_{filles} \Leftrightarrow r_{c,mere}^3 = k * r_{c,filles}^3$

$\frac{r_{c,mere}}{r_{c,filles}} = \sqrt[3]{k}$

Pour la bifurcation entre l'aorte et les grandes artères, k vaut 40. On doit donc avoir :

$\frac{r_{c,aorte}}{r_{c,grandes\ arteres}} = \sqrt[3]{k}$

AN : $\frac{r_{c,aorte}}{r_{c,grandes\ arteres}} = \frac{5}{1,5} \approx 3,33$

$\sqrt[3]{40} \approx 3,42$

On peut dire que la loi minimisant la puissance de transport est vérifiée. L'erreur est de moins de 3%.

3.2 Prise en compte de l'élasticité des vaisseaux sanguins

Question 29 Durant la phase systolique (clapet ouvert), déterminer une relation entre Q_e, Q_s et $\frac{dv}{dt}$.

La relation sur les débit s'écrit :

$Q_s - Q_e = \frac{dv}{dt}$

Question 30 Durant la phase systolique (clapet ouvert), déterminer l'équation différentielle vérifiée par la pression p^* au sein de la chambre élastique en fonction des grandeurs Q_e et p_s.

Entre la chambre élastique et la sortie, la pression passe de p^* à p_s. La résistance hydraulique R_a vaut donc :

$R_a = \frac{p_s - p^*}{Q_s} = \frac{p_s - p^*}{Q_e + \frac{dv}{dt}}$

$R_a(Q_e + \frac{dv}{dp^*}.\frac{dp^*}{dt}) = p_s - p^*$

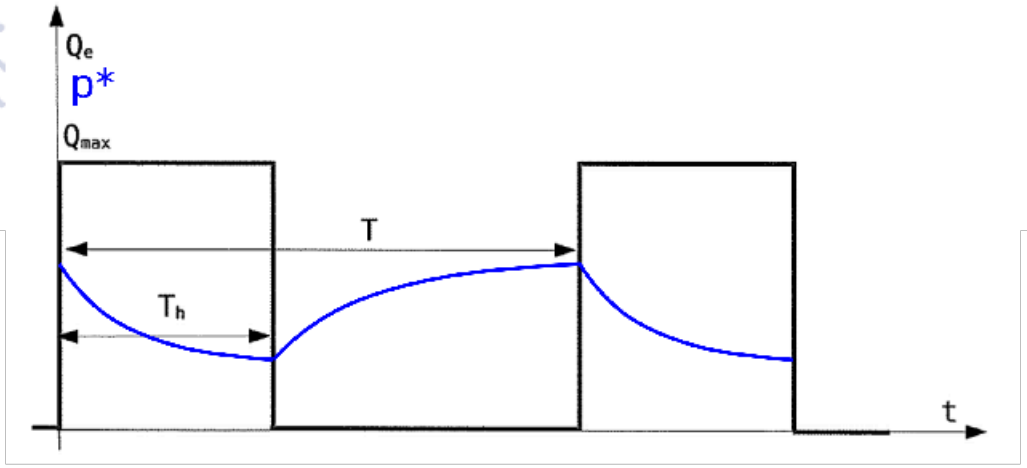
$\boxed{R_a.C_a.\frac{dp^*}{dt} + p^* = p_s - R_a.Q_e}$

Question 31 A partir du graphique donné sur la figure 17, déterminer le débit moyen Q_{moy} entrant en fonction de Q_{max}, T et T_h. Tracer l'allure de la pression p^* pour les deux pulsations $\omega_1 = \frac{10}{\tau_a}$ et $\omega_2 = \frac{1}{10\tau_a}$ avec $\tau_a = R_a.C_a$.

Pour trouver le débit entrant moyen, on calcule l'aire sous la courbe, puis on divise par la période :

$\boxed{Q_{moy} = Q_{max}.\frac{T_h}{T}}$

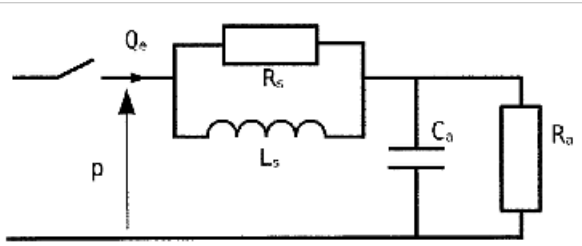
L'équation différentielle en p^* est du premier ordre. La pression p^* va évoluer en exponentielle (décroissante si Q_e est positif à cause du signe - devant Q_e).



© UPSTI - Toute reproduction interdite sans l'autorisation de l'UPSTI

A quoi correspondent ces pulsations ω_1 et ω_2 ?

Question 32 Déterminer l'impédance $\underline{Z}$ du schéma électrique du modèle de windkessel à quatre éléments reliant le débit volumique du sang Q_e à la pression p telle que : $p = \underline{Z}.Q_e$.



Pour éviter de confondre avec la pression, nous utiliserons s comme variable de Laplace.

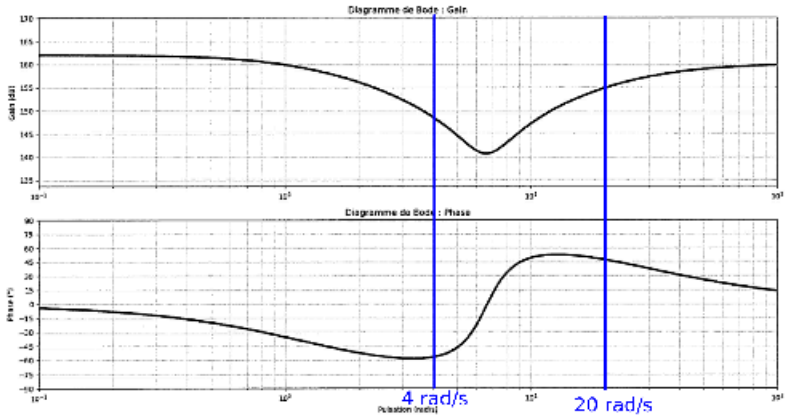
L'impédance équivalente vaut :

$$\underline{Z} = \frac{1}{\frac{1}{R_s}+\frac{1}{L_s.s}} + \frac{1}{\frac{1}{R_a}+C_a.s}$$

$$\boxed{\underline{Z} = \frac{R_s.L_s.s}{R_s+L_s.s} + \frac{R_a}{1+R_a.C_a.s}}$$

Question 33 A partir des diagrammes de Bode donnés, et en se référant à la plage de pulsation cardiaque considérée, comment la prise en compte des effets inertiels dans le modèle de Windkessel influencera l'évolution temporelle de la pression ?

On considère ici que la pulsation cardiaque varie entre 4 et 20 $rad.s^{-1}$.



Avant de prendre en compte les effets inertiels, le modèle était du premier ordre. Le déphasage se rapprochait de -90° pour les pulsations cardiaques (entre 4 et 20 $rad.s^{-1}$). Dans le même temps, le gain chutait fortement.

La prise en compte des effets inertiels permet de répondre plus rapidement, notamment pour les fortes pulsations cardiaques (proches de 20 $rad.s^{-1}$).

4 Le système nerveux autonome

4.1 Echantillonnage numérique et principe de discrétisation

Question 34 Déterminer en fonction des données l'expression de la fréquence F_E. En supposant une fréquence cardiaque maximale théorique de 250 battements par minute, proposer une valeur maximale de ΔT_{max}

© UPSTI - Toute reproduction interdite sans l'autorisation de l'UPSTI

permettant de représenter convenablement l'harmonique fondamentale d'un signal cardiaque par échantillonnage numérique ? Quel est le nom du théorème qui permet d'établir ce résultat ?

De façon évidente , $F_E = \frac{1}{\Delta T} = \frac{N}{T_F}$.

La fréquence d'échantillonnage doit être au moins égale au double de la plus grande fréquence présente dans le système étudié. On doit donc avoir $F_E \geq 2 * 250\ min^{-1}$. C'est à dire : $F_E \geq 8,3\ Hz$

Le théorème permettant de dire ceci est le théorème de Shannon.

Question 35 En utilisant un tel schéma d'intégration d'Euler, déterminer la relation de récurrence double vérifiée par un signal de sortie échantillonné Y_n en fonction d'un signal échantillonné X_n pour $1 < n \leq N$, dont les signaux analogiques correspondants $y(t)$ et $x(t)$ sont reliés par l'équation différentielle suivante : $\frac{d^2y(t)}{dt^2} + a.\frac{dy(t)}{dt} + b.y(t) = x(t)$.

On applique le schéma d'Euler sur la fonction $y'(t)$:

$\forall n > 0, \frac{dy(t)}{dt} \approx \frac{Y_n - Y_{n-1}}{\Delta T}$

On applique une deuxième fois ce schéma sur la fonction $y''(t)$:

$\forall n > 1, \frac{d^2y(t)}{dt^2} \approx \frac{y'(T_n) - y'(T_{n-1})}{\Delta T} \approx \frac{\frac{Y_n - Y_{n-1}}{\Delta T} - \frac{Y_{n-1} - Y_{n-2}}{\Delta T}}{\Delta T}$

$\forall n > 1, \frac{d^2y(t)}{dt^2} \approx \frac{Y_n - 2.Y_{n-1} + Y_{n-2}}{\Delta T^2}$

L'équation différentielle devient alors :

$\forall n > 1, \frac{Y_n - 2.Y_{n-1} + Y_{n-2}}{\Delta T^2} + a.\frac{Y_n - Y_{n-1}}{\Delta T} + b.Y_n = X_n$

$$\boxed{\forall n > 1, \left(\frac{1}{\Delta T^2} + \frac{a}{\Delta T} + b\right).Y_n - \left(\frac{2}{\Delta T^2} + \frac{a}{\Delta T}\right).Y_{n-1} + \left(\frac{1}{\Delta T^2}\right).Y_{n-2} = X_n}$$

4.2 Récepteurs d'informations barométriques

Question 36 Etablir l'équation différentielle reliant les signaux temporels continus d'entrée $pa(t)$ et de sortie $pb(t)$ d'un barorécepteur.

Dans le domaine complexe, on a :

$\frac{\underline{pb}}{\underline{pa}} = \frac{K_b}{1 + j\omega\tau_b} \Leftrightarrow \underline{pb}(1 + j\omega\tau_b) = K_b.\underline{pa}$

En revenant dans le domaine temporel, on trouve :

$$\boxed{pb(t) + \tau_b.\frac{dpb(t)}{dt} = K_b.pa(t)}$$

Question 37 En déduire la relation de récurrence définissant la séquence discrète (Pb_n) en fonction des valeurs d'entrée (Pa_n).

$\forall n > 0, Pb_n + \tau_b.\frac{Pb_n - Pb_{n-1}}{DT} = K_b.Pa_n$

$\forall n > 0, Pb_n.(1 + \frac{\tau_b}{DT}) = \frac{\tau_b}{DT}.Pb_{n-1} + K_b.Pa_n$

$$\boxed{\forall n > 0, Pb_n = \frac{DT}{DT + \tau_b}\left(\frac{\tau_b}{DT}.Pb_{n-1} + K_b.Pa_n\right)}$$

Question 38 Ecrire le code python d'une procédure modifiant le signal de sortie Pb.

```
def passe_bas_gain(n:int , Pa:np.ndarray , Pb:np.ndarray , tau:float , K:float , DT:float):
    if n > 0:
        Pb[n] = DT/(DT+tau)*(tau/DT*Pb[n-1]+K*Pa[n]) # calcul de Pb(t)
    # Pas besoin de renvoyer le tableau Pb.
    # Il est gardé en mémoire à la sortie de la fonction.
```


© UPSTI - Toute reproduction interdite sans l'autorisation de l'UPSTI

4.3 Modélisation des effecteurs

Question 39 Tracer l'allure d'une courbe C^0_{-1} définie par $F_x(Pb)$ pour $a_x = 0$, $b_x = 1$, $P^0_x = 0$ avec $T_x = -1$ sur l'intervalle $-10 \leq Pb \leq 10$. Vous déterminerez les asymptotes pour $Pb \to -\infty$, $Pb \to +\infty$, la valeur en $Pb = 0$ et la pente associée. Ajouter sur le graphique la courbe C^0_1 pour $Fx(Pb)$ pour $a_x = 0$, $b_x = 1$, $P^0_x = 0$ mais avec $T_x = 1$.

Pour les valeurs données, la fonction $Fx(Pb(t))$ s'écrit :

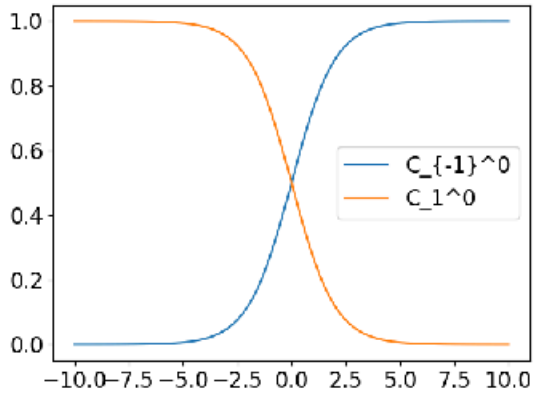
$Fx(Pb(t)) = \frac{1}{1+e^{-Pb(t)}}$

Les asymptotes sont :

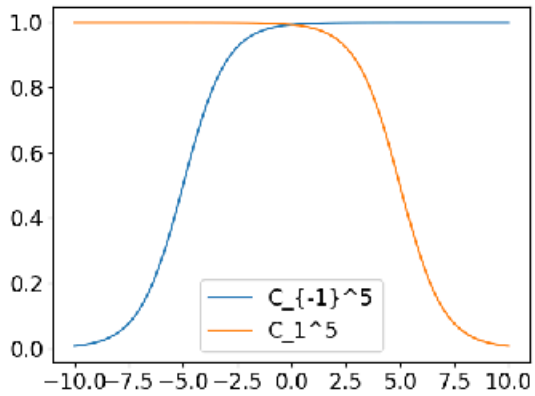
- en $+\infty$: $y = 1$
- en $-\infty$: $y = 0$

En 0, la fonction $Fx(Pb)$ vaut 0.5.

La pente en 0 vaut : $Fx'(0) = \frac{-e^{-0}}{(1+e^{-0})^2} = \frac{-1}{2^2} = -\frac{1}{4}$



Question 40 En vous aidant des schémas précédents, superposer l'allure des courbes C^5_{-1} et C^5_1 définies par $Fx(Pb)$ pour les mêmes valeurs $a_x = 0$, $b_x = 1$ mais avec $P^0_x = 5$ et respectivement avec $T_x = -1$ et $T_x = 1$. Quelle est la nature de la grandeurs physique que représente le paramètre P^0_x ? Quel peut-être l'intérêt de l'utilisation de ce type de fonction dans un mécanisme de séparation des voies, en particulier sur le signe du paramètre T_x vis-à-vis de la régulation physiologique attendue des deux voies ?



teaching sciences ... innovation

© UPSTI - Toute reproduction interdite sans l'autorisation de l'UPSTI

P_x^0 correspond à la valeur du signal d'entrée Pb que l'on choisira pour le séparer en deux. Il permet de choisir un seuil entre les activités vagale et sympathique.

Le signe de T_x permet de conserver les basses pressions (signe +) ou les hautes pressions (signe -) du signal Pb. On peut donc bien séparer le signal Pb en deux, en choisissant l'endroit du changement d'activité.

Question 41 Ecrire le code Python d'une procédure produisant le signal de sortie Fx.

```
def sigmoide(n:int , Pb:np.ndarray , Fx:np.ndarray , ax:float , bx:float , Tx:float , P0x:float):
    if n >= 0:
        Fx[n] = ax + bx/(1+np.exp(Tx*(Pb[n]-P0x))) # calcul de Fx(Pb(t))
```

Question 42 Ecrire le code Python d'une procédure produisant un retard discret sur un signal d'entrée X.

```
def retard_discret(n:int , X:np.ndarray , Y:np.ndarray , rt:float , DT:float):
    indice_retard = round(rt/DT) # calcul de l'indice correspondant au retard à appliquer
    # On utilise la fonction 'round' pour arrondir à l'instant le plus proche de la discrétisation.
    if indice_retard > n:
        Y[n] = X[0] # on garde la valeur initiale du signal
    else:
        Y[n] = X[n-indice_retard] # calcul de Y(t)
```

Note : Il est dit dans le sujet que toutes les variables commencent à 0. Or l'exemple en fin de sujet montre des fonctions qui ne partent pas de 0. Nous choisissons donc de donner la valeur initiale $X[0]$ de la fonction X pour le début de la fonction Y.

Question 43 En s'appuyant sur la figure 24, déterminer la valeur $V_{i+\alpha}$ interpolant linéairement la valeur du signal V à l'instant T_{i+1} (avec $0 \leq \alpha < 1$).

La courbe est linéaire entre les points i et $i+1$. On a donc : $\frac{V_{i+1}-V_i}{T_{i+1}-T_i} = \frac{V_{i+\alpha}-V_i}{T_{i+\alpha}-T_i}$

$$\boxed{V_{i+\alpha} = \frac{(V_{i+1}-V_i).(T_{i+\alpha}-T_i)}{\Delta T} + V_i}$$

Question 44 En déduire l'écriture d'une procédure Python produisant un retard sur un signal continu linéaire par morceaux X.

```
def retard_lin(n:int , X:np.ndarray , Y:np.ndarray , rt:float , DT:float):
    instant = n - rt / DT # on doit avoir Y(n.Delta T) = X(n.Delta T - rt)
    alpha = rt % DT # Retard alpha entre 2 échantillonnages

    if instant < 0:
        Y[n] = X[0] # on garde la valeur initiale du signal
    else:
        Y[n] = (X[int(instant)+1]-X[int(instant)])*alpha + X[int(instant)] # calcul de Y(t)
```

Question 45 Ecrire une fonction 'IPFM'.

```
def IPFM(n:int , X:np.ndarray , PulseC:np.ndarray , It:float , R:float , DT:float) -> float: # rajout du
    temps d'échantillonnage DT
    Integ = It + X[n]*DT # Calcul de la nouvelle valeur de It
    if Integ < R: # Si on n'a pas atteint la valeur de consigne R
        PulseC[n] = 0
    else:         # Sinon
        PulseC[n] = 1
        Integ = 0
    return Integ
```

4.4 Identification et validation du modèle

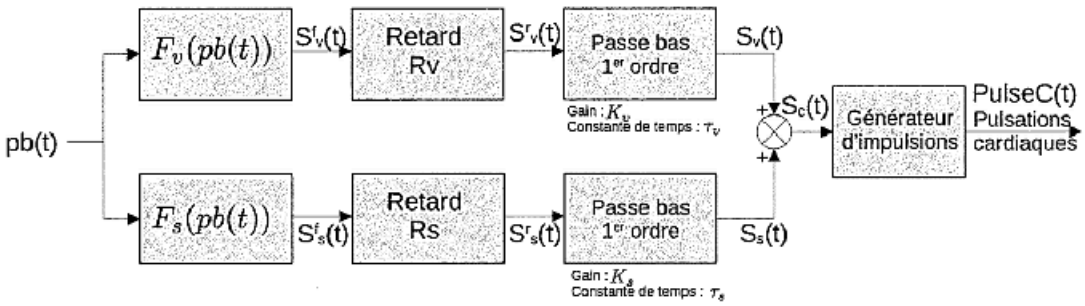
Question 46 A l'aide des figures 22 et 23, établir une classe Python $ParametresSNA$ renseignant ses attributs correspondant à l'ensemble des paramètres du modèle du SNA initialisés à des valeurs nulles suivant l'exemple à compléter.

© UPSTI - Toute reproduction interdite sans l'autorisation de l'UPSTI

```python
class ParametresSNA:
    # parametre du filtre de pression arterielle
    tau_b = 0. # constante de temps
    K_b = 0. # gain barorecepteur

    # parametres de la voie vagale ou v est substitue a x
    a_v = 0. # $a_x$
    b_v = 0. # $b_x$
    T_v = 0. # $T_x$
    P0_v = 0. # $P0_x$
    # parametres du filtre passe bas voie v
    tau_v = 0. # constante de temps
    K_v = 0. # gain
    # retard
    rv = 0. # retard branche vagale

    # parametres de la voie sympathique ou s est substitue a x
    a_s = 0. # $a_x$
    b_s = 0. # $b_x$
    T_s = 0. # $T_x$
    P0_s = 0. # $P0_x$
    # parametres du filtre passe bas voie s
    tau_s = 0. # constante de temps
    K_s = 0. # gain
    # retard
    rs = 0. # retard branche sympathique

    # IPFM
    R = 0. # seuil
```

Question 47 A l'aide d'appels aux différentes fonctions précédemment définies, en utilisant les classes *SignauxSNA* et *ParametresSNA*, compléter la procédure.

On suit le schéma de la figure 23 :




```python
def SNA(n:int , s:SignauxSNA , p:ParametresSNA):
    # Filtrage de la pression arterielle
    passe_bas_gain(n , s.Pa , s.Pb , p.tau_b , p.K_b , s.DT)

    ###############
    # Voie vagale #
    ###############
    sigmoide(n , s.Pb , s.Sfv , p.a_v , p.b_v , p.T_v , p.P0_v)
    retard_lin(n , s.Sfv , s.Srv , p.rv , s.DT) # retard Rv
    # Nouveau filtrage
    passe_bas_gain(n , s.Srv , s.Sv , p.tau_v , P.K_v , s.DT)

    ####################
    # Voie sympathique #
```


© UPSTI - Toute reproduction interdite sans l'autorisation de l'UPSTI

```
    ####################
    sigmoide(n , s.Pb , s.Sfs , p.a_s , p.b_s , p.T_s , p.P0_s)
    retard_lin(n , s.Sfs , s.Srs , p.rs , s.DT)  # retard Rs
    # Nouveau filtrage
    passe_bas_gain(n , s.Srs , s.Ss , p.tau_s , P.K_s , s.DT)

    s.Sc = s.Sv + s.Ss # sommateur
    s.It = IPFM(n , s.Sc , s.PulseC , s.It , p.R , s.DT) # générateur d'impulsions
```

Question 48 En première approximation grossière, on considère ici que l'évolution de la pression cardiaque suit un signal périodique sinusoïdal défini par : $pa(t) = P_M + \Delta P.sin(\omega t)$. Déterminer les valeurs de P_M et ΔP pour que la pression artérielle évolue entre une valeur diastolique de $80 mmHg$ et une valeur systolique de $120\ mmHg$.

Si la constante de temps τ_b du filtre passe-bas de la figure 22 vaut 2 secondes et $K_b = 1$, en utilisant la fonction de transfert, déterminer l'amplitude des oscillations en régime permanent du signal $pb(t)$ pour une activité cardiaque évoluant dans la plage de pulsation cardiaque considérée. Que peut-on en conclure ?

Pour que $pa(t) = P_M + \Delta P.sin(\omega t)$ varie entre 80 et 120 mmHg, il faut :

$$\begin{cases} P_M = 100\ mmHg \\ \Delta P = 20\ mmHg \end{cases}$$

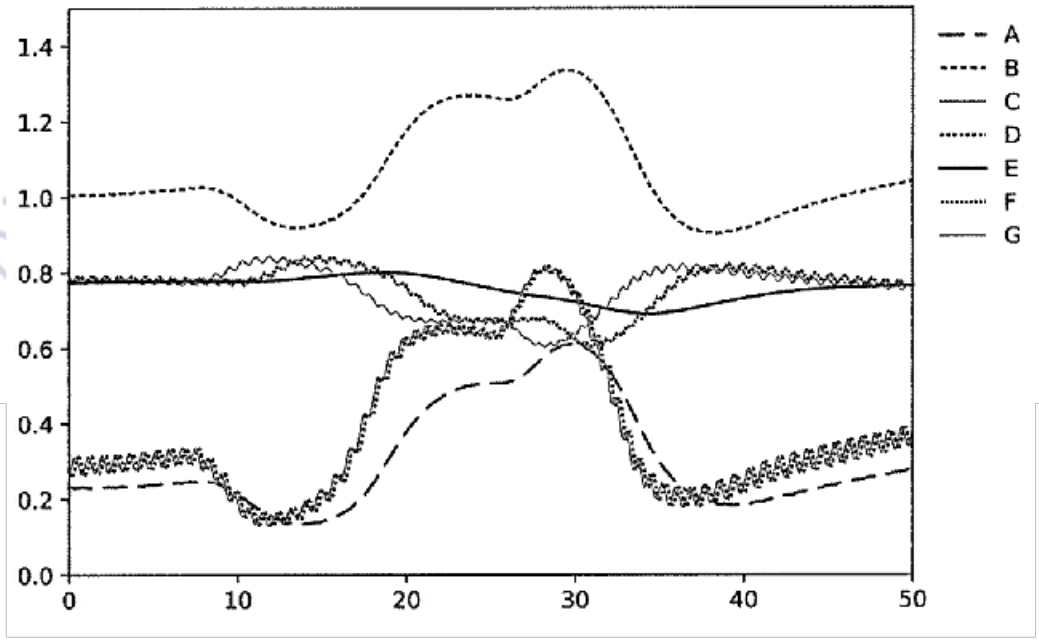
Le gain G de la fonction de transfert du filtre passe-bas est toujours strictement décroissant. La plage de pulsations cardiaque est : $[4; 20]\ rad.s^{-1}$. Le gain G varie donc entre :

$G(20) = \frac{1}{|1+j*20*2|} = \frac{1}{\sqrt{1601}} \approx 0.025$ et $G(4) = \frac{1}{|1+j*4*2|} = \frac{1}{\sqrt{65}} \approx 0.12$.

L'amplitude des oscillations pa en entrée étant de $40\ mmHg$, les oscillation pb en sortie, en régime permanent, varieront entre $G(20) * 40 \approx 1\ mmHg$ **et** $G(4) * 40 \approx 4.96\ mmHg$ dans la plage de pulsations cardiaques considérée.

En conclusion, le capteur barométrique va diviser l'amplitude réelle des pressions d'un facteur 4 à 20, ce qui est beaucoup ! On change d'ordre de grandeur de pression.

Question 49 En notant que les activités vagale et sympathique ont des comportements opposés lors d'une évolution de la pression artérielle, pouvez-vous retrouver, en le justifiant, chacun des 7 signaux S_v^f, S_v^r, S_v, S_s^f, S_s^r, S_s et S_c (indiqués sur la figure 23) sur les courbes notées de A à G de la figure 27(d) ?.



© UPSTI - Toute reproduction interdite sans l'autorisation de l'UPSTI

Attente d'un sujet scanné en couleur.

S_v^r est retardé de 0.2 s par rapport à S_v^f. Donc $G = S_v^f$ et $F = S_v^r$.

S_s^r est retardé de 3 s par rapport à S_s^f. Donc $C = S_s^f$ et $D = S_s^r$.

La courbe B est bien la somme des courbes $A = S_v$ et $E = S_s$. Donc $B = S_c$

$$\begin{cases} A : S_v \\ B : S_c \\ C : S_s^f \\ D : S_s^r \\ E : S_s \\ F : S_v^r \\ G : S_v^f \end{cases}$$

Question 50 Vous avez à votre disposition une base de données contenant des ECG et des enregistrements synchronisés de pressions artérielles sur un très grand nombre de patients. Comment feriez-vous pour calibrer un tel modèle ?

Par quel type de modélisation, très en vogue aujourd'hui, pourrait-on essayer de remplacer ce type de modèle paramétrique phénoménologique ? Pourquoi cette approche fait encore face à une réticence importante dans le domaine médical ?

On pourrait utiliser une approche statistique pour calibrer un tel modèle. Le grand nombre de données permet de trouver les valeurs des paramètres du modèle les plus proches de la réalité.

Cette modélisation pourrait être remplacée par une approche de type "machine learning". Nous pourrions faire construire à l'ordinateur un réseau de neurones qui apprendrait par lui-même.

Cette approche fait face à une réticence car elle n'est basée sur aucun comportement physique. Elle fait juste appel à des calculs statistiques mathématiques. Si les paramètres entrés ne sont pas "les bons" ou suffisants, la machine donnera quand même un résultat mais qui pourrait être totalement erroné.

© UPSTI - Toute reproduction interdite sans l'autorisation de l'UPSTI