

Proposition de corrigé

Concours : X-ENS

Année : 2019

Filière : PSI

Épreuve : Modélisation

Ceci est une proposition de corrigé des concours de CPGE, réalisée bénévolement par des enseignants de Sciences Industrielles de l'Ingénieur et d'Informatique, membres de l'[UPSTI](https://www.upsti.fr) (Union des Professeurs de Sciences et Techniques Industrielles), et publiée sur le site de l'association :

<https://www.upsti.fr/espace-etudiants/annales-de-concours>

A l'attention des étudiants

Ce document vous apportera des éléments de corrections pour le sujet traité, mais n'est ni un corrigé officiel du concours, ni un corrigé détaillé ou exhaustif de l'épreuve en question.

L'UPSTI ne répondra pas directement aux questions que peuvent soulever ces corrigés : nous vous invitons à vous rapprocher de vos enseignants si vous souhaitez des compléments d'information, et à vous adresser à eux pour nous faire remonter vos éventuelles remarques.

Licence et Copyright

Toute représentation ou reproduction (même partielle) de ce document faite sans l'accord de l'UPSTI est **interdite**. Seuls le téléchargement et la copie privée à usage personnel sont autorisés (protection au titre des [droits d'auteur](#)).

En cas de doute, n'hésitez pas à nous contacter à : corrigesconcours@upsti.fr.

Informez-vous !

Retrouvez plus d'information sur les [Sciences de l'Ingénieur](#), l'[orientation](#), les [Grandes Ecoles](#) ainsi que sur les [Olympiades de Sciences de l'Ingénieur](#) et sur les [Sciences de l'Ingénieur au Féminin](#) sur notre site : www.upsti.fr

L'équipe UPSTI

Étude d'un véhicule sous-marin autonome : modélisation, identification et localisation

Corrigé : X-ENS Modélisation PSI 2019

Question 1 Réparation d'installations sous-marines, inspection d'épaves, sauvetage d'équipage de sous-marins, exploration des fonds marins, mesures océanographiques...

Question 2 $\begin{cases} \vec{x}_0 = \cos \psi \vec{x}_2 - \sin \psi \vec{y}_2 \\ \vec{y}_0 = \sin \psi \vec{x}_2 + \cos \psi \vec{y}_2 \end{cases}$ donc $\mathbb{P}_\psi = \begin{pmatrix} \cos \psi & -\sin \psi & 0 \\ \sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Question 3 De même $\mathbb{P}_\theta = \begin{pmatrix} \cos \theta & 0 & \sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \theta & 0 & \cos \theta \end{pmatrix}$ et $\mathbb{P}_\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varphi & -\sin \varphi \\ 0 & \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}$

Question 4 $\overrightarrow{V_{10}(C)} = \left. \frac{d\overrightarrow{OC}}{dt} \right|_{B_0} = \dot{x}\vec{x}_0 + \dot{y}\vec{y}_0 + \dot{z}\vec{z}_0 = \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{bmatrix}_{B_0}$. Or $\overrightarrow{V_{10}(C)} = u\vec{x}_1 + v\vec{y}_1 + w\vec{z}_1 = \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix}_{B_1}$ donc

$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{bmatrix}_{B_0} = \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix}_{B_1}$. On en déduit que $\dot{\eta}_1 = \mathbb{P}_{01}\nu_1$ d'où $\mathbb{P}_1 = \mathbb{P}_{01} = \mathbb{P}_\psi \cdot \mathbb{P}_\theta \cdot \mathbb{P}_\varphi$, qui s'exprime

$$\mathbb{P}_1(\eta_2) = \begin{pmatrix} \cos \theta \cos \psi & -\cos \varphi \sin \psi + \sin \varphi \sin \theta \cos \psi & \sin \varphi \sin \psi + \cos \varphi \sin \theta \cos \psi \\ \cos \theta \sin \psi & \cos \varphi \cos \psi + \sin \varphi \sin \theta \sin \psi & -\sin \varphi \cos \psi - \cos \varphi \sin \theta \sin \psi \\ -\sin \theta & \sin \varphi \cos \theta & \cos \varphi \cos \theta \end{pmatrix}$$

Question 5 Pour le maintien de cap, le mouvement est plan à une altitude d'immersion h
 $\eta = (x, y, \underline{h}, \underline{0}, \underline{0}, \psi)^T$ et $\nu = (\underline{V}, v, \underline{0}, \underline{0}, \underline{0}, r)^T$.

Alors

$$\mathbb{P}_1(\eta_2) = \begin{pmatrix} \cos \psi & -\sin \psi & 0 \\ \sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbb{P}_2(\eta_2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

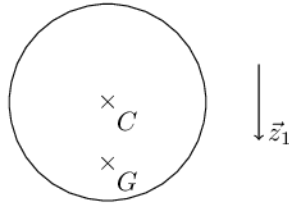
$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = V \cdot \cos(\psi) - v \cdot \sin(\psi) \\ \frac{dy}{dt} = V \cdot \sin(\psi) + v \cdot \cos(\psi) \\ \frac{d\psi}{dt} = r \end{cases}$$

Question 6 On considère que le fluide est bien au repos et que le drone n'est soumis qu'à son poids et à la poussée d'Archimède. Comparons la norme de la poussée d'Archimède et du poids :

$$\|\vec{\Pi}_A\| = \rho_{\text{eau}} g V_{\text{drone}} \approx 10^3 \times g \times \pi \left(\frac{22 \cdot 10^{-2}}{2} \right)^2 \times 2 \approx 6.28 \times 121 \times g \cdot 10^{-1} > 6 \times 12 \times g \approx 72 \times g \text{ N}$$

La masse maximale du drone est de 70 kg d'après l'énoncé, donc son poids d'environ 70g N, ce qui inférieur à la poussée d'Archimède. Dans ce cas, le drone remonterait à la surface sans apport d'énergie.

Remarque : Les valeurs sont assez proches et la poussée d'Archimède semble juste légèrement supérieure pour remplir cette exigence.



Question 7 Au repos, le drone n'est soumis qu'à deux glisseurs : le poids s'appliquant au centre de gravité G et la poussée d'Archimède, au centre de carène C . Si le drone est à l'équilibre alors ces deux glisseurs sont directement opposés. Ainsi $\overrightarrow{CG}$ est colinéaire à $\vec{z}_0$. Afin d'assurer la stabilité, il faut que le centre de masse se situe sous le centre de carène. La condition de stabilité peut s'écrire $\overrightarrow{CG} \cdot \vec{z}_1 = Z_G > 0$

Par ailleurs, $Y_G \neq 0$ impliquerait $\varphi \neq 0$ et $X_G \neq 0$ conduirait à $\theta \neq 0$.

Les conditions de stabilité sont donc

$$X_G = 0, \quad Y_G = 0 \quad Z_G > 0$$

Question 8 La forme est cylindrique mais rien n'est signalé sur la répartition des masses. Les figures 2,4,5,6 et 7 laisse supposer que le plan $(G, \vec{x}_1, \vec{z}_1)$ est un plan de symétrie, les produits I_{xy} et I_{yz} sont donc nuls. Sans autres informations, rien ne permet de simplifier la matrice d'inertie, il n'y a pas de raison que le volume occupé par le drone soit homogène (motorisation à l'arrière,...). Si on admet que la répartition des masses est symétrique par rapport au plan $(G, \vec{x}_1, \vec{z}_1)$ alors

$$I(G) = \begin{pmatrix} I_{xx} & 0 & -I_{xz} \\ 0 & I_{yy} & 0 \\ -I_{xz} & 0 & I_{zz} \end{pmatrix}$$

Question 9 Comme C et G sont matériellement liés au drone, on peut écrire la formule de Varignon :

$$\overrightarrow{V_{10}(G)} = \overrightarrow{V_{10}(C)} + \vec{\Omega}_{10} \wedge \overrightarrow{CG} = u\vec{x}_1 + w\vec{z}_1 + q\vec{y}_1 \wedge Z_G\vec{z}_1 = (u + qZ_G)\vec{x}_1 + w\vec{z}_1$$

Question 10

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\Gamma_{10}(G)} &= \left(\frac{du}{dt} + Z_G \frac{dq}{dt} \right) \vec{x}_1 (u + Z_G q) q \vec{y}_1 \wedge \vec{x}_1 + \frac{dw}{dt} \vec{z}_1 + w q \vec{y}_1 \wedge \vec{z}_1 \\ &= \left(\frac{du}{dt} + Z_G \frac{dq}{dt} + wq \right) \vec{x}_1 + \left(\frac{dw}{dt} - uq - Z_G q^2 \right) \vec{z}_1 \end{aligned}$$

donc

$$A_\gamma = Z_G, \quad B_\gamma = 1, \quad C_\gamma = -1, \quad D_\gamma = -Z_G$$

Question 11

$$\overrightarrow{\delta_{10}(C)} = \overrightarrow{\delta_{10}(G)} + m \overrightarrow{\Gamma_{10}(G)} \wedge \overrightarrow{GC}$$

$$\text{avec } \overrightarrow{\delta_{10}(G)} = \left. \frac{d\overrightarrow{\sigma_{10}(G)}}{dt} \right|_{\mathcal{B}_0} = \left. \frac{d}{dt} (I(G) \vec{\Omega}_{10}) \right|_{\mathcal{B}_0} = \left. \frac{d}{dt} I_{yy} q \vec{y}_1 \right|_{\mathcal{B}_0}$$

Donc

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\delta_{10}(C)} &= I_{yy} \frac{dq}{dt} \vec{y}_1 + Z_G \vec{z}_1 \wedge m \overrightarrow{\Gamma_{10}(G)} \\ &= \left(I_{yy} \frac{dq}{dt} + m Z_G \left(\frac{du}{dt} + \frac{dq}{dt} Z_G + wq \right) \right) \vec{y}_1 \end{aligned}$$

d'où

$$A_\delta = I_{yy} + m Z_G^2, \quad B_\delta = m Z_G, \quad C_\delta = m Z_G$$

Question 12 Le PFD (problème plan) appliqué au système en C s'écrit :

$$\begin{cases} m \overrightarrow{\Gamma_{10}(G)} \cdot \vec{x}_1 &= \Sigma \vec{R}_{\text{ext}} \cdot \vec{x}_1 \\ m \overrightarrow{\Gamma_{10}(G)} \cdot \vec{z}_1 &= \Sigma \vec{R}_{\text{ext}} \cdot \vec{z}_1 \\ \overrightarrow{\delta_{10}(C)} \cdot \vec{y}_1 &= \Sigma \vec{M}_{\text{ext}}(C) \cdot \vec{y}_1 \end{cases}$$

d'où

$$\begin{cases} m \frac{du}{dt} + m A_\gamma \frac{dq}{dt} + m B_\gamma q w &= \Sigma \vec{R}_{\text{ext}} \cdot \vec{x}_1 \\ m \frac{dw}{dt} + m C_\gamma q u + m D_\gamma q^2 &= \Sigma \vec{R}_{\text{ext}} \cdot \vec{z}_1 \\ A_\delta \frac{dq}{dt} + B_\delta \frac{du}{dt} + C_\delta q w &= \Sigma \vec{M}_{\text{ext}}(C) \cdot \vec{y}_1 \end{cases}$$

Certains termes ne sont pas linéaires en ν et peuvent de ce fait s'écrire sous différentes formes. En préférant, l'une d'entre elles, les matrices auront des propriétés particulières (choix non imposé mais *suggéré* par l'énoncé) :

$$\mathbb{M}_v = \begin{pmatrix} m & 0 & mA\gamma \\ 0 & m & 0 \\ B_\delta & 0 & A_\delta \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbb{C}_v(\nu) = \begin{pmatrix} 0 & mB_\gamma q & 0 \\ mC_\gamma q & 0 & mD_\gamma q \\ 0 & C\delta q & 0 \end{pmatrix}$$

Au vu des valeurs des coefficients déterminés précédemment, $\mathbb{M}_v$ est symétrique et $\mathbb{C}_v(\nu)$ est antisymétrique.

Remarque : La matrice de masse $\mathbb{M}_v$ est habituellement une matrice symétrique définie positive ce qui est bien le cas ici.

Question 13 $v_{\text{drone/EAU}} \ll c_{\text{son}}$ donc l'écoulement peut être supposé incompressible. La conservation de la masse s'écrit alors $\text{div}(\rho \vec{v}) = 0$ soit $\text{div}(\vec{v}) = 0$ car $\rho = \text{cte}$ par hypothèse.

Question 14 $Re = \frac{Lv\rho}{\mu} = 3 \cdot 10^5 \gg 1$ avec L une longueur caractéristique, ici le diamètre du drone. L'écoulement est donc turbulent.

Question 15

$$\begin{cases} d\vec{F}_{h0} = - \int_{\mathcal{D}} \rho \vec{g} dV \\ d\vec{F}_{h1} = \int_{\mathcal{D}} \frac{\partial \rho \vec{u}_e}{\partial t} dV + \int_{\partial \mathcal{D}} \rho (\vec{u}_e \cdot \vec{n}) \vec{u}_e \mathcal{S} \\ d\vec{F}_{h2} = - \int_{\mathcal{D}} \mu \Delta \vec{u}_e dV \end{cases}$$

Question 16 $\{\mathcal{T}_{\text{pes} \rightarrow \text{drone}}\} = \left\{ \begin{matrix} m\vec{g} \\ \vec{0} \end{matrix} \right\}_G$ et $\{\mathcal{T}_{\text{poussée Archimède} \rightarrow \text{drone}}\} = \left\{ \begin{matrix} -m\vec{g} \\ \vec{0} \end{matrix} \right\}_C$ car $m = \int_{\mathcal{D}} \rho dV$

Donc

$$\begin{aligned} \{\mathcal{F}_S\} &= \{\mathcal{T}_{\text{pes} \rightarrow \text{drone}}\} + \{\mathcal{T}_{\text{poussée Archimède} \rightarrow \text{drone}}\} \\ &= \left\{ \begin{matrix} m\vec{g} \\ mgZ_g \sin(\theta) \vec{y}_1 \end{matrix} \right\}_C + \left\{ \begin{matrix} -m\vec{g} \\ \vec{0} \end{matrix} \right\}_C \\ &= \left\{ \begin{matrix} \vec{0} \\ mgZ_g \sin(\theta) \vec{y}_1 \end{matrix} \right\}_C \end{aligned}$$

Question 17

- pesanteur négligée
- écoulement irrotationnel ($\text{rot}(\vec{u}) = \vec{0}$) ou écoulement potentiel
- fluide parfait ($\mu = 0$)

Question 18 Tous les termes s'opposent au mouvement potentiel (force de frottement). Chacun est composé d'une partie proportionnelle à la grandeur cinématique correspondante et d'un terme quadratique. Remarquons que ce terme n'est pas proportionnel au carré de la vitesse mais uniquement de la projection considérée. Le couplage entre les grandeurs cinématiques est négligé.

Question 19

$$\{\text{Gouverne}_i\} = \left\{ \begin{matrix} -F_D(\alpha_i) \vec{x}_1 - F_L(\alpha_i) \vec{c}_i \\ -RF_L(\alpha_i) \vec{x}_1 - lF_L(\alpha_i) \vec{b}_i + RF_D(\alpha_i) \vec{c}_i \end{matrix} \right\}_C$$

$$\text{car } \vec{\mathcal{M}}_{\text{Gouverne}_i}(C) = \vec{\mathcal{M}}_{\text{Gouverne}_i}(H_i) + \vec{R}_{\text{Gouverne}_i} \wedge \vec{H}_i \vec{C}$$

Les relations ci-dessous permettent de se ramener dans la base $(\vec{x}_1, \vec{b}_0, \vec{b}_1)$:

$$\begin{cases} \vec{b}_i \wedge \vec{b}_{i+1} = \vec{x}_1 \\ \vec{b}_i \wedge \vec{c}_i = \vec{x}_1 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} \vec{c}_i = \vec{b}_{i+1} \\ \vec{b}_{i+2} = -\vec{b}_i \end{cases}$$

C'est à dire $\vec{c}_0 = \vec{b}_1$ et $\vec{c}_1 = -\vec{b}_0$, on a

$$\{\text{Gouverne}_0\} = \left\{ \begin{matrix} -F_D(\alpha_0) \vec{x}_1 - F_L(\alpha_0) \vec{c}_0 \\ -RF_L(\alpha_0) \vec{x}_1 - lF_L(\alpha_0) \vec{b}_1 + RF_D(\alpha_0) \vec{c}_0 \end{matrix} \right\}_C$$

De même,

$$\{\text{Gouverne}_1\} = \left\{ \begin{array}{c} -F_D(\alpha_1)\vec{x}_1 - F_L(\alpha_1)\vec{c}_1 \\ -RF_L(\alpha_1)\vec{x}_1 - lF_L(\alpha_1)\vec{b}_1 + RF_D(\alpha_1)\vec{c}_1 \end{array} \right\}_C$$

d'où

$$\left\{ \begin{array}{l} \{\text{Gouverne}_0\} = \left\{ \begin{array}{cc} -F_D(\alpha_0) & -RF_L(\alpha_0) \\ 0 & -lF_L(\alpha_0) \\ -F_L(\alpha_0) & RF_D(\alpha_0) \end{array} \right\}_{C,(\vec{x}_1,\vec{b}_0,\vec{b}_1)} \\ \{\text{Gouverne}_1\} = \left\{ \begin{array}{cc} -F_D(\alpha_1) & -RF_L(\alpha_1) \\ +F_L(\alpha_1) & -RF_D(\alpha_1) \\ 0 & -lF_L(\alpha_1) \end{array} \right\}_{C,(\vec{x}_1,\vec{b}_0,\vec{b}_1)} \end{array} \right.$$

Question 20

$$\{\text{Gouvernes}\} = \left\{ \begin{array}{cc} -4F_D(\alpha) & -4RF_L(\alpha) \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{array} \right\}_{C,(\vec{x}_1,\vec{b}_0,\vec{b}_1)}$$

Les forces de portance F_L des différentes gouvernes permettent de créer un couple permettant de contrer le couple moteur (et éventuellement de faire tourner le drone autour de son axe principal).

Question 21

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{R}_{\text{Gouvernes}} \cdot \vec{y}_1 = 0 \\ \vec{M}_{\text{Gouvernes}}(C) \cdot \vec{x}_1 = -T_m \\ \vec{M}_{\text{Gouvernes}}(C) \cdot \vec{z}_1 = 0 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} F_L(\alpha_0) + F_L(\alpha_1) + F_L(\alpha_2) + F_L(\alpha_3) = \frac{T_m}{R} \\ F_D(\alpha_0) + F_D(\alpha_3) = F_D(\alpha_1) + F_D(\alpha_2) \end{array} \right.$$

Question 22 Il y a 4 gouvernes et un moteur donc *a priori* 5 degrés de liberté que l'on peut piloter *indépendamment*. Or, il existe 3 conditions scalaires à vérifier pour que le mouvement reste plan. Ces conditions fixent obligatoirement 3 des mouvements pilotés; il reste donc 2 mobilités. Pour évoluer librement dans le plan, il faudrait 3 mobilités. Le drone ne peut donc pas piloter indépendamment tous ses mouvements dans le plan. Il est possible de remarquer que le mouvement d'avance et le tangage seront pilotés tandis que la vitesse de descente dépendra des 2 autres.

Question 23

$$\frac{1}{\omega_c} \frac{ds}{dt}(t) + s(t) = e(t)$$

Après lecture de la courbe, on voit 3 oscillations entre 8,5 s et 14,5 s. On en déduit une période du signal de $T = \frac{6}{3} = 2$ s. La pulsation apparente du signal est donc d'environ de π . Comme ω_c vaut un tiers de cette pulsation, on a $\omega_c \approx 1$ rad/s

Question 24 $\frac{ds}{dt}(t_k) \approx \frac{s_k - s_{k-1}}{h}$

$$s_k - s_{k-1} = \omega_c \int_{t_{k-1}}^{t_k} (e(u) - s(u)) du \approx \omega_c \times h \times (e(t_{k-1}) - s(t_{k-1})) \text{ donc } s_k = h\omega_c e_{k-1} + (1 - h\omega_c)s_{k-1}$$

Question 25 Remarque : On aurait pu préférer une notation simple, w_c , par exemple, adaptée à l'écriture sur machine.

```
def filtre1(e,h,ωc):
    s=[e[0]]
    for ek in e[0:len(e)-1]:
        s.append(h*ωc*ek+(1-h*ωc)*s[-1])
    return s
```

```
def filtre1(e,h,ωc):
    n=len(e)
    s=numpy.zeros(n)
```

```

s[0]=e[0]
for k in range(1,n):
    s[k]=h*omega_c*e[k-1]+(1-h*omega_c)*s[k-1])
return s

```

Question 26 `s2=filtre1(filtre1(sBr,h,omega_c),h,omega_c)`

Question 27 $H_r(j\omega_n) = \frac{x_n}{x_d} = 0,01\sqrt{2}$ donc l'atténuation vaut $20 \log(0,01\sqrt{2}) = 20 \log(0,01) + \frac{1}{2}20 \log(2) = -40 + 3\text{dB} = -37\text{dB}$

Question 28 Dans le domaine temporel :

$$\omega_n^2 e(t) + 2hx_n\omega_n \frac{de}{dt}(t) + \frac{d^2e}{dt^2}(t) = \omega_n^2 s(t) + 2hx_d\omega_n \frac{ds}{dt}(t) + \frac{d^2s}{dt^2}(t)$$

En exprimant $\frac{ds}{dt}(t_k) = \frac{s_k - s_{k-1}}{h}$, $\frac{d^2s}{dt^2} = \frac{1}{h} \left(\frac{ds}{dt}(t_k) - \frac{ds}{dt}(t_{k-1}) \right) = \frac{s_k - 2s_{k-1} + s_{k-2}}{h^2}$ et de même pour e , on a :

$$s_k = \frac{2(hx_n\omega_n + 1)s_{k-1} - s_{k-2} + (\omega_n^2 h^2 + 2hx_d\omega_n + 1)e_k - 2(hx_d\omega_n + 1)e_{k-1} + e_{k-2}}{1 + 2hx_n\omega_n + h^2\omega_n^2}$$

d'où

$$\begin{cases} a0 &= \omega_n^2 h^2 + 2hx_d\omega_n + 1 \\ a1 &= -2(hx_d\omega_n + 1) \\ a2 &= 1 \\ b0 &= \omega_n^2 h^2 + 2hx_n\omega_n + 1 \\ b1 &= -2(hx_n\omega_n + 1) \\ b2 &= 1 \end{cases}$$

Remarque : Tous les coefficients sont définis au facteur a_2 près. Pourquoi imposer dans le sujet $a_2 = \omega_n^2 h^2$? Il est plus simple de l'imposer à 1.

Question 29

```

def jacob(T):
    res=[]
    for v in T:
        res.append([1,v,v**2])
    return res

def jacob(T):
    res=numpy.zeros(len(T),3)
    for i in range(len(T)):
        for j in range(3):
            res[i][j]=T[i]**j
    return res

```

Question 30

```

def variance(T):
    moyenne=0
    for t in T:
        moyenne+=t
    moyenne/=len(T)
    var=0
    for t in T:
        var+=(t-moyenne)**2
    var/=len(T)
    return var

```

```

def variance(T):
    s1,s2,n = 0,0, len(T)

```

```

for t in T:
    s1+=t
    s2+=t**2
return s2/n-(s1/n)**2

```

Question 31

```

def poids(T,i):
    valeurs=[]
    for k in range(i%6,len(T),6): # car 6 valeurs de vitesse
        valeurs.append(T[k])
    return 1/variance(valeurs)

```

```

def poids(T,i):
    valeurs=[]
    for k in range(len(T)):
        if T[k]==T[i] : valeurs.append(T[k])
    return 1/variance(valeurs)

```

```

def poids(T,i):
    return 1/variance(T[i%6::6])

```

Question 32

$$\underline{\underline{A}} = \underline{\underline{J}}^t \underline{\underline{W}} \underline{\underline{J}} \quad \underline{x} = \underline{C} \quad \underline{b} = \underline{\underline{J}}^t \underline{\underline{W}} \underline{Q}$$

Question 33 Le drone évolue à l'horizontale donc $\vec{H}_T \cdot \vec{z}_1 = 0$. La connaissance de sa projection sur une base du plan suffit à connaître le vecteur et donc à déterminer l'angle de lacet.

Question 34

- perturbations magnétiques (extérieures ou dues aux autres systèmes embarqués)
- non-uniformité du champ magnétique terrestre

Question 35 L'accéléromètre mesure $\vec{g} \cdot \vec{x}_1$ (avec $\vec{g} = +g\vec{z}_0$) donc $-g \sin(\theta)$. Comme θ appartient raisonnablement à $]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$, on peut en déduire θ .

Si l'accéléromètre était placé suivant $\vec{z}_1$, alors il mesurerait $g \cos(\theta)$ et l'information du signe de θ serait perdue.

Question 36 Pour déterminer $q = \dot{\theta}$ il faudrait dériver a_{mx} qui présente un bruit de fréquence élevée. La dérivation numérique amplifie alors ce bruit et la valeur de q obtenue ne sera pas exploitable.

En ce qui concerne la mesure q_m , il faudrait l'intégrer pour déterminer θ . La composante constante du biais induirait donc une dérive en θ qui rendrait la valeur inexploitable.

Question 37

$$\begin{cases} \dot{\hat{\theta}} &= \dot{\theta} + (q_b - \hat{q}_b) - l_1 g (\hat{\theta} - \theta) \\ \dot{\hat{q}}_b &= l_2 g (\hat{\theta} - \theta) \\ \hat{q}_b &= \dot{\theta} + (q_b - \hat{q}_b) \end{cases}$$

donc

$$\begin{cases} \dot{e}_\theta &= -e_b - l_1 g e_\theta \\ \dot{\hat{q}}_b &= l_2 g (\hat{\theta} - \theta) \\ \hat{q}_b &= \dot{\theta} + (q_b - \hat{q}_b) \end{cases}$$

d'où

$$\ddot{e}_\theta + l_1 g \dot{e}_\theta + l_2 g e_\theta = 0$$

Question 38 Pour que l'équation différentielle précédente admette une limite, il faut que $l_1 > 0$ et que $l_2 > 0$. Si e_θ converge alors il le fait vers 0 car l'équation est homogène. L'observateur estime donc correctement θ .

Question 39 Dans ce cas $\dot{e}_\theta \rightarrow 0$ et donc $e_b \rightarrow 0$. On en déduit que $\hat{q}_b \sim q_b$ et donc $\hat{q} \sim \dot{\theta}$ et q est correctement estimé.

Question 40 En reprenant le système initial et en y ajoutant l'influence de ϵ_a :

$$\begin{cases} \dot{e}_\theta &= -e_b - l_1 g e_\theta - l_1 \epsilon_a \\ \dot{e}_b &= l_2 g \dot{e}_\theta + l_2 \epsilon_a \end{cases}$$

d'où

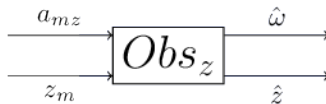
$$\ddot{e}_\theta + l_1 \dot{e}_\theta + l_2 g e_\theta = -(l_1 \dot{\epsilon}_a + l_2 \epsilon_a)$$

et dans le domaine de Laplace

$$\frac{E_\theta(p)}{\epsilon_a(p)} = \frac{-1}{g} \frac{1 + \frac{l_1}{l_2} p}{1 + \frac{l_1}{l_2} p + \frac{1}{g l_2} p^2}$$

Question 41 Le bruit ϵ_a est supposé de haute fréquence et $\frac{E_\theta(j\omega)}{\epsilon_a(j\omega)} \xrightarrow{\omega \rightarrow +\infty} 0$ donc l'erreur tend vers 0 et le bruit de haute fréquence est filtré. En revanche, en l'absence de l'observateur, on a $\frac{E_\theta(j\omega)}{\epsilon_a(j\omega)} = \frac{1}{g} \xrightarrow{\omega \rightarrow +\infty} \frac{1}{g} \neq 0$ et l'estimation est donc influencée par le bruit.

Question 42



Question 43

Le système précédent sans le bruit donne :

Nous vérifions les équations suivantes :

$$\dot{\theta} = q_m - q_b = q$$

$$\dot{q}_b = 0 \text{ (dérivée constante)}$$

$$\theta = -\frac{a_{mx}}{g}$$

$$\dot{w} = a_{mx} + g_0 + k \cdot z$$

$$\dot{z} = w$$

$$z = z_m$$

En s'inspirant des équations de Obs_θ , on obtient

$$\dot{\hat{w}} = a_{mx} + g_0 + k \hat{z} + l_3 (z_m - \hat{z})$$

$$\dot{\hat{z}} = \hat{w} + l_4 (z_m - \hat{z})$$

Remarque : la notation $\hat{y}$ est abusive puisqu'elle ne représente pas une dérivation temporelle mais une dérivation numérique.

Question 44 En posant $e_w = \hat{w} - w$ et $e_z = \hat{z} - z$, les équations de l'observateur se réécrivent :

$$\ddot{e}_z + l_4 \dot{e}_z + (l_3 - k) e_z = 0$$

$$\ddot{e}_w + l_4 \dot{e}_w + (l_3 - k) e_w = 0$$

Les deux erreurs convergent donc bien vers 0 dès lors que $l_3 > k$ ($k > 0$) et $l_4 > 0$: polynômes du deuxième degré.

Question 45 S'il n'y plus de capteur d'immersion, cela revient à prendre $l_3 = l_4 = 0$. Les équations précédentes deviennent : $\ddot{e}_z - k e_z = 0$. L'immersion diverge donc exponentiellement avec une constante de temps $\tau = 1/\sqrt{k}$.

Question 46

- présence d'obstacles
- précision du positionnement des émetteurs
- atténuation due à la distance

Question 47 On suppose que les conditions de bonne utilisation sont remplies : pas d'obstacles ; connaissance précise de la vitesse acoustique de l'eau ; connaissance précise de la position des balises ; synchronisation des balises ; etc. Il faut alors au minimum 3 balises. La position du drone est à l'intersection des 3 sphères centrées sur les balises et de rayon donnée par la mesure du temps de trajet acoustique du signal. Par continuité, on peut déduire la position du drone.

Question 48 Il manque le cap ψ pour pouvoir établir le lien entre le système de coordonnées fixe et celui du drone.

Question 49

