

Proposition de corrigé

Concours : Concours Centrale-Supélec

Année : 2022

Filière : PSI

Épreuve : Sciences Industrielles pour l'Ingénieur

Ceci est une proposition de corrigé des concours de CPGE, réalisée bénévolement par des enseignants de Sciences Industrielles de l'Ingénieur et d'Informatique, membres de l'[UPSTI](https://www.upsti.fr) (Union des Professeurs de Sciences et Techniques Industrielles), et publiée sur le site de l'association :

<https://www.upsti.fr/espace-etudiants/annales-de-concours>

A l'attention des étudiants

Ce document vous apportera des éléments de corrections pour le sujet traité, mais n'est ni un corrigé officiel du concours, ni un corrigé détaillé ou exhaustif de l'épreuve en question.

L'UPSTI ne répondra pas directement aux questions que peuvent soulever ces corrigés : nous vous invitons à vous rapprocher de vos enseignants si vous souhaitez des compléments d'information, et à vous adresser à eux pour nous faire remonter vos éventuelles remarques.

Licence et Copyright

Toute représentation ou reproduction (même partielle) de ce document faite sans l'accord de l'UPSTI est **interdite**. Seuls le téléchargement et la copie privée à usage personnel sont autorisés (protection au titre des [droits d'auteur](#)).

En cas de doute, n'hésitez pas à nous contacter à : corrigesconcours@upsti.fr.

Informez-vous !

Retrouvez plus d'information sur les [Sciences de l'Ingénieur](#), l'[orientation](#), les [Grandes Ecoles](#) ainsi que sur les [Olympiades de Sciences de l'Ingénieur](#) et sur les [Sciences de l'Ingénieur au Féminin](#) sur notre site : www.upsti.fr

L'équipe UPSTI

Stabilisateur GyroLock

Corrigé UPSTI

I Résultats expérimentaux et modélisation du mécanisme

- Objectif -

Exploiter les résultats d'une campagne expérimentale afin de modéliser la liaison entre la table d'opération et le stabilisateur, puis exprimer le déplacement en bout de stabilisateur.

I.A – Mesure du déplacement en bout de stabilisateur

Question 1 Déterminer, à partir de la figure 4, les valeurs minimales et maximales de déplacement du point P dans la direction dorso-ventrale, notées $u_d^{\max}$ et $u_d^{\min}$, et dans le plan frontal, notées $u_f^{\max}$ et $u_f^{\min}$. Déterminer laquelle des deux stabilisations (passive ou active) est nécessaire pour respecter le diagramme des exigences figure 3.

Dans la direction dorso-ventrale, à l'imprécision de mesure près et par rapport à la référence 0 en ordonnée sur le graphe de la figure 4, le déplacement maximal du point P est $u_d^{\max} \approx 3,5\text{mm}$ et le déplacement minimum est $u_d^{\min} \approx -2,3\text{mm}$.

De même dans le plan frontal, on mesure $u_f^{\max} \approx 0,2\text{mm}$ et $u_f^{\min} \approx -0,3\text{mm}$.

L'exigence 1.1 stipule que le déplacement en bout de stabilisateur ne dépasse pas $\pm 2\text{mm}$ en régime permanent. Or le déplacement dans la direction dorso-ventrale est supérieur à la valeur imposée par cette exigence avec un stabilisateur passif. Une stabilisation active est alors nécessaire pour cette direction.

I.B – Formulation du modèle de la liaison entre la table d'opération et le stabilisateur

Question 2 Exprimer le vecteur $\overrightarrow{P_0P}$ dans la base $\mathcal{B}_0$. En déduire l'expression de $u_d = \overrightarrow{P_0P} \cdot \vec{y}_0$ correspondant au déplacement en bout de stabilisateur dans la direction dorso-ventrale et $u_f = \|\overrightarrow{P_0P} - u_d \vec{y}_0\|$ traduisant le déplacement en bout de stabilisateur dans le plan frontal.

On a $\overrightarrow{P_0P} = \overrightarrow{P_0O_0} + \overrightarrow{O_0P} = L \vec{z}_1 - L \vec{z}_0$. Or :

$$\vec{z}_1 = \cos(\theta_{1y}) \vec{z}'_1 + \sin(\theta_{1y}) \vec{x}'_1 = \cos(\theta_{1y}) \cos(\theta_{1x}) \vec{z}_0 - \cos(\theta_{1y}) \sin(\theta_{1x}) \vec{y}_0 + \sin(\theta_{1y}) \vec{x}_0$$

Donc :

$$\overrightarrow{P_0P} = L [\sin(\theta_{1y}) \vec{x}_0 - \cos(\theta_{1y}) \sin(\theta_{1x}) \vec{y}_0 + (\cos(\theta_{1y}) \cos(\theta_{1x}) - 1) \vec{z}_0]$$

$$\text{Donc } u_d = \overrightarrow{P_0P} \cdot \vec{y}_0 = -L \cos(\theta_{1y}) \sin(\theta_{1x}) \text{ et } u_f = \|\overrightarrow{P_0P} - u_d \vec{y}_0\| = L \sqrt{\sin^2(\theta_{1y}) + (\cos(\theta_{1y}) \cos(\theta_{1x}) - 1)^2}.$$

Question 3 Déterminer les expressions linéarisées à l'ordre 1 de u_d et u_f (θ_{1x} et θ_{1y} sont proches de 0). En utilisant le résultat de la question 1, donner la valeur numérique (en radian) des débattements angulaires $\Delta\theta_{1x} = \max(\theta_{1x}) - \min(\theta_{1x})$ et $\Delta\theta_{1y}$ du stabilisateur. En déduire qu'une rotation peut être négligée (en précisant laquelle). En supposant que la rotation d'axe $(O_0, \vec{z}_0)$ est également négligeable, proposer une « nouvelle » liaison (en précisant ses caractéristiques géométriques) modélisant le mouvement du stabilisateur (1) par rapport à la table d'opération (0).

On suppose $\cos(\theta_i) \approx 1$ et $\sin(\theta_i) \approx \theta_i$ pour $\theta_i = \theta_{1x}$ ou $\theta_i = \theta_{1y}$.

Par conséquent $\vec{P_0P} \approx L [\theta_{1y} \vec{x}_0 - \theta_{1x} \vec{y}_0]$ donc :

$$u_d \approx -L\theta_{1x} \quad ; \quad u_f \approx L|\theta_{1y}|$$

En s'appuyant sur la question 1 :

$$\Delta\theta_{1x} = \frac{u_d^{\min} - u_d^{\max}}{L} \approx \frac{-2,3 - 3,5}{0,3 \cdot 10^3} \approx -1,9 \cdot 10^{-2} \text{ rad} \quad ; \quad \Delta\theta_{1y} = \frac{u_f^{\max} - u_f^{\min}}{L} \approx \frac{0,2 + 0,3}{0,3 \cdot 10^3} \approx 1,7 \cdot 10^{-3} \text{ rad}$$

Remarque : en toute rigueur on devrait redéfinir u_f pour autoriser les valeurs négatives, c'est ce qu'on a fait dans l'application numérique pour le calcul du débattement.

Le débattement $\Delta\theta_{1y}$ est **un ordre de grandeur inférieur** au débattement $\Delta\theta_{1x}$. On peut donc supposer que la rotation autour de l'axe $(O_0, \vec{y}_1)$ est négligeable par rapport à celle autour de l'axe $(O_0, \vec{x}_0)$.

Si on néglige aussi la rotation d'axe $(O_0, \vec{z}_0)$, on peut alors simplifier la liaison sphérique en O_0 et supposer que c'est un **pivot d'axe** $(O_0, \vec{x}_0)$.

Question 4 Préciser alors la direction du moment de compensation que devra générer le système GyroLock afin de réduire le déplacement du point P .

Puisqu'on veut compenser les mouvements dans la direction dorso-ventrale générant la rotation d'axe $(O_0, \vec{x}_0)$, il faut un moment de compensation selon ce même axe.

II Effet gyroscopique et modélisation du stabilisateur

- Objectif -

Étudier les actions mécaniques créées par le système GyroLock, définir et régler la chaîne d'asservissement de l'étrier puis modéliser le comportement du stabilisateur grâce à une étude dynamique.

II.A – Étude de l'effet gyroscopique généré par le système GyroLock

Question 5 Exprimer, dans la base $\mathcal{B}_2$, le moment cinétique au point G_3 du solide (3) en mouvement dans le référentiel $\mathcal{R}_0$, noté $\vec{\sigma}(G_3, 3/0)$.

Au centre d'inertie on a : $\vec{\sigma}(G_3, 3/0) = \mathcal{I}(G_3, 3) \vec{\Omega}(3/0)$ avec par **composition des vitesses**

$\vec{\Omega}(3/0) = \underbrace{\vec{\Omega}(3/2)}_{\dot{\theta}_3 \vec{y}_2} + \underbrace{\vec{\Omega}(2/1)}_{\dot{\theta}_2 \vec{z}_2} + \underbrace{\vec{\Omega}(1/0)}_{\vec{0}}$ la vitesse de rotation du solide (3) par rapport à (0) exprimée dans la

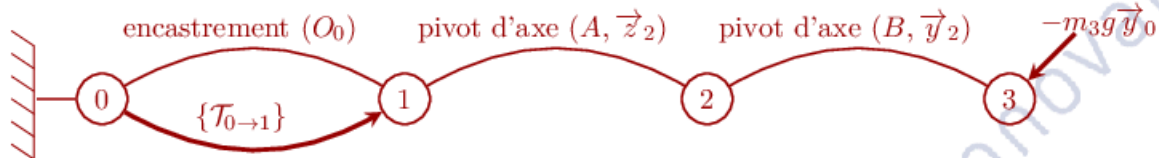
base $\mathcal{B}_2$. Alors : $\vec{\sigma}(G_3, 3/0) = B_3 \dot{\theta}_3 \vec{y}_2 + A_3 \dot{\theta}_2 \vec{z}_2$.

Question 6 En déduire, dans la base $\mathcal{B}_2$, le moment dynamique au point G_3 du solide (3) en mouvement dans le référentiel $\mathcal{R}_0$, noté $\vec{\delta}(G_3, 3/0)$.

Toujours **au centre d'inertie** on a $\vec{\delta}(G_3, 3/0) = \frac{d\vec{\sigma}(G_3, 3/0)}{dt} \Big|_0 = -B_3\dot{\theta}_2\dot{\theta}_3\vec{x}_2 + B_3\ddot{\theta}_3\vec{y}_2 + A_3\ddot{\theta}_2\vec{z}_2$.

Question 7 Après avoir clairement précisé le système isolé et le théorème utilisé, exprimer L_{01} , M_{01} et N_{01} en fonction de θ_2 , θ_3 (et leurs dérivées temporelles), A_3 et B_3 .

Pour la clarté on propose le graphe des liaisons ci-dessous avec les différentes actions mécaniques qui s'exercent sur le système :



On isole le système $\Sigma = \{1 + 2 + 3\}$ soumis à :

- l'action de (0) sur (1) en G_3 : $\{T_{0 \rightarrow 1}\}$;
- l'action du poids en G_3 : $-m_3g\vec{y}_0$.

On applique le **théorème du moment dynamique au système Σ au point G_3** :

$$\vec{\delta}(G_3, \Sigma/0) = L_{01}\vec{x}_1 + M_{01}\vec{y}_1 + N_{01}\vec{z}_1$$

Or $\vec{\delta}(G_3, \Sigma/0) = \vec{\delta}(G_3, 3/0)$ car **on néglige les effets dynamiques de (1) et (2)**. Par conséquent :

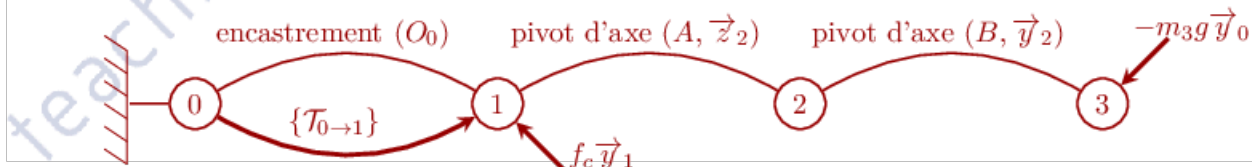
$$-B_3\dot{\theta}_2\dot{\theta}_3\vec{x}_2 + B_3\ddot{\theta}_3\vec{y}_2 + A_3\ddot{\theta}_2\vec{z}_2 = L_{01}\vec{x}_1 + M_{01}\vec{y}_1 + N_{01}\vec{z}_1$$

Dans la base $\mathcal{B}_1$ on obtient le système d'équations :

$$\begin{cases} L_{01}(t) = -B_3\dot{\theta}_3\dot{\theta}_2 \cos(\theta_2(t)) - B_3\ddot{\theta}_3 \sin(\theta_2) \\ M_{01}(t) = -B_3\dot{\theta}_3\dot{\theta}_2 \sin(\theta_2(t)) + B_3\ddot{\theta}_3 \cos(\theta_2) \\ N_{01}(t) = A_3\ddot{\theta}_2(t) \end{cases}$$

Question 8 En supposant que la toupie (3) tourne à vitesse constante par rapport à l'étrier (2), exprimer $\dot{\theta}_2$ en fonction de K_3 , θ_2 , f_c et $L - L_{G_3}$ permettant de garantir $L_{01} = 0$ et de compenser l'effet de l'effort cardiaque f_c .

Cette fois-ci le graphe des liaisons devient :



On reprend la stratégie précédente mais on ajoute le moment en G_3 provoqué par la résultante $\vec{R}_{c \rightarrow 1}$ en P : $\vec{M}(G_3, \vec{R}_{c \rightarrow 1}) = \vec{G_3P} \wedge f_c\vec{y}_1 = (L - L_{G_3})f_c\vec{x}_1$. L'équation du mouvement précédente écrite dans la base $\mathcal{B}_1$ donne alors le système d'équations :

$$\begin{cases} L_{01}(t) + (L - L_{G_3})f_c = -K_3\dot{\theta}_2 \cos(\theta_2(t)) \\ M_{01}(t) = -K_3\dot{\theta}_2 \sin(\theta_2(t)) \\ N_{01}(t) = A_3\ddot{\theta}_2(t) \end{cases}$$

En particulier si on veut $L_{01} = 0$ alors $\dot{\theta}_2 = -\frac{(L - L_{G_3})f_c}{K_3 \cos(\theta_2(t))}$ en faisant attention à avoir $|\theta_2| < \frac{\pi}{2}$.

Question 9 Donner une condition sur l'angle θ_2 et sur l'accélération angulaire $\ddot{\theta}_2$ afin que les moments M_{01} et N_{01} soient faibles.

D'après le système d'équations de la question précédente :

- si on veut $N_{01} \rightarrow 0$ alors il faut $\ddot{\theta}_2 \rightarrow 0$ (accélération angulaire très faible) ;
- si on veut $M_{01} \rightarrow 0$ alors en prenant $\theta_2 \ll 1$ rad on a une chance d'y arriver.

Remarque : d'après la question 8, si on prend ω_3 très grand alors $\dot{\theta}_2$ est potentiellement très petit ce qui aide à « écraser » M_{01} .

Question 10 Vérifier que la condition de réactivité énoncée ci-dessus est respectée. Justifier que la fonction de transfert de l'étrier (2) $H_2(p) = \frac{\Omega_2(p)}{\Omega_{c2}(p)}$ peut alors être approchée par un gain statique K_2 à préciser.

La période du signal perturbateur est $T_c = \frac{1}{f_c}$, donc la demi période est $\frac{T_c}{2} = \frac{1}{2f_c} = 0,33$ s.

Si on veut respecter la condition de réactivité il faut donc que le temps de réponse à 5% soit inférieur à 0,033s.

On lit sur le graphe de droite en figure 7 que la valeur finale est atteinte avant 0,03s donc le temps de réponse à 5% est d'autant plus petit et **la condition de réactivité est respectée.**

Si on considère le système très réactif, comme celui-ci est précis on peut supposer que $H_2(p) = \frac{\Omega_2(p)}{\Omega_{c2}(p)} = K_2 = 1$.

II.B – Réglage du correcteur de la chaîne d'asservissement de l'étrier

Question 11 Exprimer sous forme canonique la fonction de transfert $H_{\theta_2}(p) = \frac{\theta_2(p)}{U(p)}$ en fonction de $C(p)$ et K_2 . Après avoir déterminé $\lim_{t \rightarrow +\infty} \theta_2(t)$ lorsque $U(p)$ est un échelon unitaire dans les deux cas cités précédemment, justifier la pertinence d'une correction proportionnelle-intégrale au regard de la problématique de la dérive de l'étrier.

En prenant $\theta_2^*(p) = 0$ et par méthode directe :

$$\Omega_{c2}(p) = U(p) - C(p) \cdot \frac{K_2}{p} \Omega_{c2}(p)$$

Or $\Omega_{c2}(p) = \frac{p}{K_2} \theta_2(p)$ donc :

$$\frac{p}{K_2} \theta_2(p) = U(p) - C(p) \theta_2(p) \Rightarrow H_{\theta_2}(p) = \frac{K_2}{p + K_2 C(p)}$$

En appliquant le théorème de la valeur finale :

- avec une correction proportionnelle : $\lim_{t \rightarrow +\infty} \theta_2(t) = \lim_{p \rightarrow 0} p\theta_2(p) = \lim_{p \rightarrow 0} p \cdot H_{\theta_2}(p) \frac{1}{p} = \frac{1}{K_{10}}$;
- avec une correction proportionnelle-intégrale : $\lim_{t \rightarrow +\infty} \theta_2(t) = \lim_{p \rightarrow 0} p\theta_2(p) = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{K_2 p}{p^2 + K_2 K_{10} p + K_2 K_{11}} = 0$.

La dérive de l'étrier sera évitée si une correction proportionnelle-intégrale est appliquée.

Question 12 Exprimer sous forme canonique la fonction de transfert $H_m(p)$ en fonction de K_2 , K_{10} et K_{11} .

Par formule de Black :

$$H_m(p) = \frac{H_2(p)}{1 + H_2(p) \frac{C(p)}{p}} = \frac{\frac{1}{K_{11}} p^2}{1 + \frac{K_{10}}{K_{11}} p + \frac{p^2}{K_2 K_{11}}}$$

Question 13 Déterminer les valeurs numériques de K_{10} et K_{11} au regard de ces exigences.

On a $H_m(p) = \frac{\frac{1}{K_{11}} p^2}{1 + \frac{2\xi_m}{\omega_m} p + \frac{p^2}{\omega_m^2}}$. On identifie alors :

$$\omega_m = \sqrt{K_2 K_{11}} \quad ; \quad \xi_m = \frac{1}{2} K_{10} \sqrt{\frac{K_2}{K_{11}}}$$

Avec $K_2 = 1$ trouvé en question 10, on calcule :

$$K_{11} = \frac{\omega_m^2}{K_2} = 6,00 \text{ rad}^2 \cdot \text{s}^{-2} \quad ; \quad K_{10} = \frac{2\xi_m}{\omega_m} K_{11} = 1,81 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$$

II.C – Comportement dynamique du stabilisateur

Question 14 Sans détailler les calculs, donner la méthode permettant de déterminer la loi de mouvement du stabilisateur (équation différentielle en $\theta_1(t)$). L'ensemble isolé, l'inventaire des actions mécaniques extérieures, le théorème utilisé et sa projection scalaire sont à préciser clairement.

On isole le système $\Sigma = \{1 + 2 + 3\}$ soumis :

- au poids du solide (3) au point G_3 : $-m_3 g \vec{y}_0$;
- au poids du solide (1) au point G_1 : $-m_1 g \vec{y}_0$;
- à l'action transmise par la pivot en O_0 ainsi qu'un moment dû à l'imperfection de cette liaison $\vec{M}(O_0, 0 \rightarrow 1) \cdot \vec{x}_0 = -(k\theta_1 + f\dot{\theta}_1)$;
- à l'action du cœur sur le stabilisateur $\{\mathcal{T}_{c \rightarrow 1}\}$.

On applique alors le **Théorème du Moment Dynamique au point O_0 projeté selon $\vec{x}_0$** pour éviter les inconnues de la liaison pivot. On obtient ainsi la loi du mouvement.

Question 15 Exprimer $\vec{\delta}(O_0, 1/0) \cdot \vec{x}_0$, la projection sur $\vec{x}_0$ du moment dynamique au point O_0 du solide (1) en mouvement dans le référentiel $\mathcal{R}_0$.

Par formule de Varignon :

$$\vec{\delta}(O_0, 1/0) \cdot \vec{x}_0 = \vec{\delta}(G_1, 1/0) \cdot \vec{x}_0 + (\vec{O_0 G_1} \wedge m_1 \vec{\Gamma}(G_1, 1/0)) \cdot \vec{x}_0$$

avec $\vec{\Gamma}(G_1, 1/0) = \left. \frac{d^2 \vec{O_0 G_1}}{dt^2} \right|_0 = -L_{G_1} \ddot{\theta}_1 \vec{y}_1 - L_{G_1} \dot{\theta}_1^2 \vec{z}_1$ donc $(\vec{O_0 G_1} \wedge m_1 \vec{\Gamma}(G_1, 1/0)) \cdot \vec{x}_0 = m_1 L_{G_1}^2 \ddot{\theta}_1$.

De plus **au centre d'inertie** G_1 : $\vec{\sigma}(G_1, 1/0) \cdot \vec{x}_0 = \left. \frac{d \vec{\sigma}(G_1, 1/0) \cdot \vec{x}_0}{dt} \right|_0$ avec

$$\vec{\sigma}(G_1, 1/0) \cdot \vec{x}_0 = \mathcal{I}(G_1, 1) \vec{\Omega}(1/0) \cdot \vec{x}_0.$$

Donc $\vec{\sigma}(G_1, 1/0) \cdot \vec{x}_0 = A_1 \dot{\theta}_1$ et $\vec{\delta}(G_1, 1/0) \cdot \vec{x}_0 = A_1 \ddot{\theta}_1$.

Finalement $\vec{\delta}(O_0, 1/0) \cdot \vec{x}_0 = (A_1 + m_1 L_{G_1}^2) \ddot{\theta}_1$.

Question 16 Exprimer littéralement la vitesse $\vec{V}(G_3, 3/0)$ dans la base $\mathcal{B}_1$, puis l'accélération $\vec{\Gamma}(G_3, 3/0)$ dans la base $\mathcal{B}_1$.

Le point G_3 étant **physiquement rattaché à (3)** on peut écrire

$$\vec{V}(G_3, 3/0) = \left. \frac{d \vec{O_0 G_3}}{dt} \right|_0 = -L_{G_3} \dot{\theta}_1 \vec{y}_1 + H_{G_3} \dot{\theta}_1 \vec{z}_1.$$

Ensuite $\vec{\Gamma}(G_3, 3/0) = \left. \frac{d \vec{V}(G_3, 3/0)}{dt} \right|_0 = - (L_{G_3} \ddot{\theta}_1 + H_{G_3} \dot{\theta}_1^2) \vec{y}_1 + (H_{G_3} \ddot{\theta}_1 - L_{G_3} \dot{\theta}_1^2) \vec{z}_1$.

Question 17 En conservant les conditions de fonctionnement issues de la partie II.A ($\ddot{\theta}_2 \approx 0$, $\dot{\theta}_2 \approx 0$ et $\dot{\theta}_3 = \omega_3$ constante), il est possible de montrer que $\vec{\delta}(G_3, 3/0) \cdot \vec{x}_0 = A_3 \ddot{\theta}_1 - c_x(t)$ avec $c_x(t) = B_3 \omega_3 \dot{\theta}_2$ (résultat admis sans démonstration). En déduire $\vec{\delta}(O_0, 3/0) \cdot \vec{x}_0$, en fonction de A_3 , $c_x(t)$, m_3 , L_{G_3} , H_{G_3} et $\ddot{\theta}_1(t)$.

Par formule de Varignon :

$$\begin{aligned} \vec{\delta}(O_0, 3/0) \cdot \vec{x}_0 &= \vec{\delta}(G_3, 3/0) \cdot \vec{x}_0 + (\vec{O_0 G_3} \wedge m_3 \vec{\Gamma}(G_3, 3/0)) \cdot \vec{x}_0 \\ &= A_3 \ddot{\theta}_1 - c_x(t) + m_3 L_{G_3} (L_{G_3} \ddot{\theta}_1 + H_{G_3} \dot{\theta}_1^2) + m_3 H_{G_3} (H_{G_3} \ddot{\theta}_1 - L_{G_3} \dot{\theta}_1^2) \\ &= (A_3 + m_3 L_{G_3}^2 + m_3 H_{G_3}^2) \ddot{\theta}_1 - c_x(t) \end{aligned}$$

Question 18 Exprimer J_x en fonction de A_1 , A_3 , m_1 , m_3 , L_{G_1} , L_{G_3} et H_{G_3} permettant d'écrire la loi de mouvement du stabilisateur (1) sous la forme suivante :

$$J_x \ddot{\theta}_1(t) + f \dot{\theta}_1(t) + k \theta_1(t) = c_x(t) - L f_c(t)$$

En appliquant la stratégie vue en question 14 on a l'équation (effets dynamiques de (2) négligés et actions de la pesanteur négligées) :

$$\vec{\delta}(O_0, 1/0) \cdot \vec{x}_0 + \vec{\delta}(O_0, 3/0) \cdot \vec{x}_0 = -(k \theta_1 + f \dot{\theta}_1) + (\vec{O_0 P} \wedge f_c \vec{y}_1) \cdot \vec{x}_0$$

Tout calcul fait avec $\vec{O_0 P} = L \vec{z}_1$:

$$(A_1 + A_3 + m_1 L_{G_1}^2 + m_3 L_{G_3}^2 + m_3 H_{G_3}^2) \ddot{\theta}_1 + f \dot{\theta}_1 + k \theta_1 = c_x(t) - L f_c(t)$$

On identifie $J_x = A_1 + A_3 + m_1 L_{G_1}^2 + m_3 L_{G_3}^2 + m_3 H_{G_3}^2$.

Question 19 En déduire les expressions littérales des fonctions de transfert $H_{\text{pert}}(p)$ et $H_1(p)$ du schéma bloc figure 10 en fonction de L , J_x , f et k .

Le schéma-bloc donne $\frac{Y(p)}{H_1(p)} = C_x(p) - H_{\text{pert}}(p)F_c(p)$. L'équation différentielle précédente rapportée dans le domaine de Laplace (**conditions initiales nulles**) s'écrit (avec $Y(p) = L\theta_1(p)$) :

$$(J_x p^2 + fp + k) \frac{Y(p)}{L} = C_x(p) - L F_c(p)$$

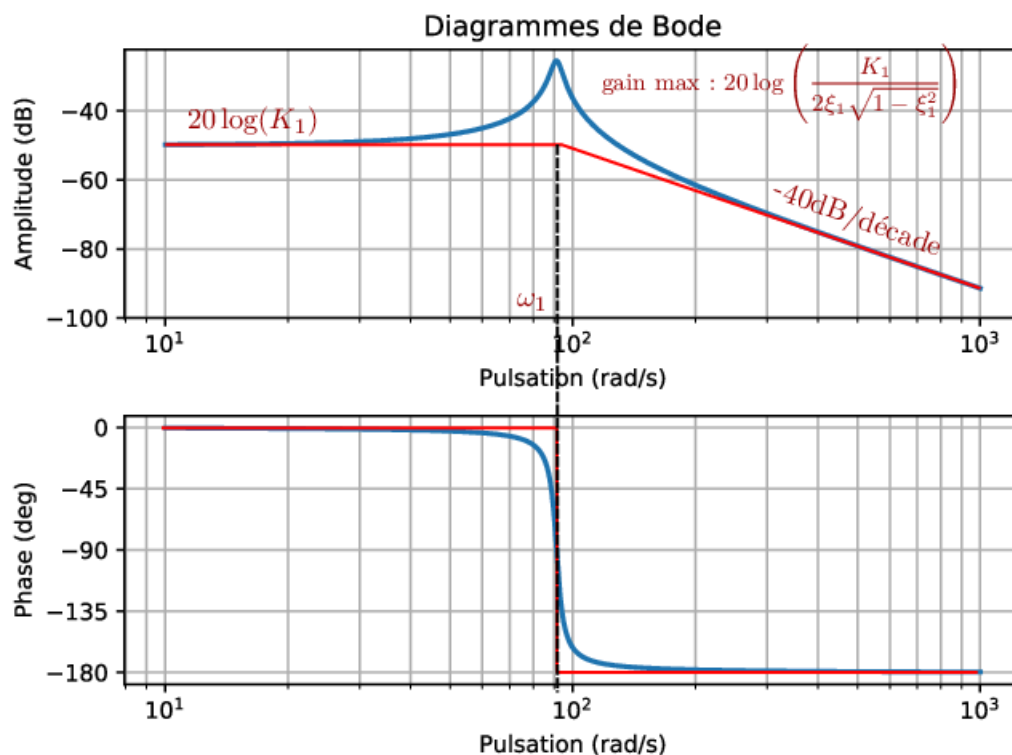
On identifie $H_1(p) = \frac{L}{J_x p^2 + fp + k}$ et $H_{\text{pert}}(p) = L$.

Question 20 Écrire $H_1(p)$ sous forme canonique, puis calculer les valeurs de ses paramètres caractéristiques : gain statique K_1 , amortissement ξ_1 et pulsation propre ω_1 . Commenter le comportement associé (fréquentiel ou temporel).

On a $H_1(p) = \frac{\frac{L}{k}}{1 + \frac{f}{k}p + \frac{J_x}{k}p^2}$, on identifie alors :

- le gain statique $K_1 = \frac{L}{k} = \frac{0,3}{95} = 3,2 \cdot 10^{-3} \text{ rad/N}$;
- la pulsation propre $\omega_1 = \sqrt{\frac{k}{J_x}} = \sqrt{\frac{95}{1,14 \cdot 10^{-2}}} = 91,3 \text{ rad/s}$;
- l'amortissement $\xi_1 = \frac{1}{2} \cdot \frac{f}{\sqrt{k J_x}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{64 \cdot 10^{-3}}{\sqrt{95 \times 1,14 \cdot 10^{-2}}} = 0,03$.

On choisit de décrire le comportement dans le domaine fréquentiel. On a un système d'ordre 2 avec résonance (car $\xi_1 < \frac{\sqrt{2}}{2}$) à la pulsation $\omega_r = \omega_1 \sqrt{1 - 2\xi_1^2}$. Le diagramme de Bode associé est le suivant :



III Réglage de la loi de commande du stabilisateur

- Objectif

Régler une loi de commande permettant de respecter les exigences figure 3.

III.A – Valeur maximale de K_p

Question 21 Exprimer la fonction de transfert en boucle ouverte $H_{BO}(p) = \frac{Y(p)}{\varepsilon(p)}$ en fonction de K_p , K_3 , K_v , $H_m(p)$ et $H_1(p)$.

On suppose $F_c(p) = 0$, alors :
$$H_{BO}(p) = \frac{K_p}{p} \cdot \frac{p \cdot K_3 H_m(p) H_1(p)}{1 + p \cdot K_v K_3 H_m(p) H_1(p)}.$$

Question 22 À partir de la figure 12, donner la valeur maximale de K_p telle que le système soit stable en boucle fermée.

On suppose que $H_{BO}(p)$ possède des pôles à partie réelle négative, par conséquent le critère du revers stipule qu'on est à la limite de l'instabilité si lorsque la phase est à -180° , le gain est nul.

Par lecture graphique pour la phase de -180° on lit qu'on peut monter le gain de $+65\text{dB}$ pour atteindre la limite de l'instabilité.

Par conséquent $20 \log(K_p^{\max}) = +65$ donc
$$K_p^{\max} = 10^{65/20} = 1778,3 \text{ rad} \cdot (\text{s} \cdot \text{m})^{-1}.$$

Remarque : d'après le schéma de la figure 8, $U(p)$ doit être en rad/s d'où l'unité de K_p .

III.B – Vérification de la valeur de K_p

Question 23 Déterminer la valeur maximale $G_{\max}$ du gain de la fonction de transfert $\left| \frac{Y(j\omega)}{F_c(j\omega)} \right|$ qui permet de garantir le respect des exigences du diagramme figure 3.

L'exigence 1.1.1 fournit $f_c(t) = F \sin(\omega t)$, donc le déplacement s'écrit pour ce système linéaire

$$y(t) = F \left| \frac{Y(j\omega)}{F_c(j\omega)} \right| \sin(\omega t + \varphi(\omega)).$$

Or l'exigence 1.1 demande $F \left| \frac{Y(j\omega)}{F_c(j\omega)} \right| \leq 2 \cdot 10^{-3} \text{ m}$. Avec $F = 5 \text{ N}$ on trouve :
$$G_{\max} = \frac{2 \cdot 10^{-3}}{5} = 4 \cdot 10^{-4} \text{ m} \cdot \text{N}^{-1}.$$

Question 24 À partir de la figure 13, déterminer la valeur minimale de K_p permettant de respecter l'exigence 1.1. Vérifier la cohérence de cette valeur avec celle trouvée à la question 22.

Sur le graphe de la figure 13 on lit $K_p = 2800 \text{ rad} \cdot (\text{s} \cdot \text{m})^{-1}$ pour le gain maximal $G_{\max} = 4 \cdot 10^{-4} \text{ m} \cdot \text{N}^{-1}$. Cette valeur de K_p est une valeur minimale sinon on ne respecte plus le cahier des charges.

C'est incohérent avec la valeur trouvée en question 22 : il faut ajouter au schéma-bloc une boucle de compensation. C'est ce qui est proposé dans la suite du sujet.

III.C – Amélioration des performances par compensation de l'effort cardiaque

Question 25 Exprimer la fonction de transfert $H_{F_c}^{\text{est}}(p) = \frac{Y(p)}{F_c(p)}$ en fonction de K_p , K_v , K_3 , $H_{\text{pert}}(p)$, τ , $C_a(p)$, $H_m(p)$ et $H_1(p)$.

Par méthode directe :

$$H_{F_c}^{\text{est}}(p) = \frac{H_m(p)K_3 \frac{C_a(p)}{1+\tau p} - H_{\text{pert}}(p)}{\frac{1}{H_1(p)} + (K_p + pK_v)H_m(p)K_3}$$

Question 26 En déduire l'expression de $C_a(p)$ permettant de rejeter la perturbation $F_c(p)$, en fonction de $H_{\text{pert}}(p)$, τ , K_3 et $H_m(p)$, puis en fonction de L , τ , ξ_m , ω_m et K_3 .

Pour rejeter la perturbation on veut $H_{F_c}^{\text{est}}(p) = 0$, soit $C_a(p) = \frac{H_{\text{pert}}(p)(1+\tau p)}{K_3 H_m(p)}$, ou

$$C_a(p) = \frac{L(1+\tau p)(p^2 + 2\xi_m\omega_m p + \omega_m^2)}{K_3 p^2}.$$

Question 27 Analyser les problèmes éventuels liés à la réalisation de ce correcteur. Conclure sur la possibilité de son implantation dans le système de commande.

La réalisation d'un tel correcteur met en évidence 2 problèmes notables :

- les constantes qui interviennent doivent être parfaitement connues au risque de dégrader les performances du système ;
- le degré du polynôme au numérateur est supérieur au degré du dénominateur, ce correcteur présente donc l'inconvénient d'amplifier les signaux en hautes fréquences (sensibilité au bruit).

L'implantation d'un tel correcteur est donc risquée.

Question 28 À partir de la figure 16 et de l'exigence 1.1.1, justifier qu'une approximation de $C_a(p)$ sous la forme d'un gain proportionnel $\widetilde{C}_a(p) = K_a$ est suffisante. Déterminer la valeur numérique de K_a .

L'exigence 1.1.1 indique que la pulsation ω se situe entre 6,3rad/s et 23rad/s. Sur cette plage :

- le gain varie entre 4dB et 6dB ;
- la phase varie entre -20° et 0°.

Sur cette plage de pulsations et à l'erreur de mesure près il est raisonnable de penser que le gain peut être assimilé à une constante. Toutefois la variation de phase de 20° pose problème.

Si on regarde l'expression obtenue précédemment pour $C_a(p)$ on peut deviner au diagramme de Bode qu'en basse fréquence c'est l'intégration en $\frac{1}{p^2}$ qui domine. Puis on a un méplat sur la bande de pulsation qui nous intéresse. Alors le terme $p^2 + 2\xi_m\omega_m p + \omega_m^2$ est venu compenser le $\frac{1}{p^2}$ tandis que le terme $1 + \tau p$ reste équivalent à 1. Enfin en haute fréquence le terme $1 + \tau p$ intervient enfin.

Donc sur la plage de pulsation d'intérêt on a une asymptote horizontale en gain à $\sim 5\text{dB}$ et une asymptote horizontale en phase à 0°.

L'approximation $\widetilde{C}_a(p) = K_a = 10^{\frac{5}{20}} = 1,8$ convient.

Question 29 Analyser les courbes des figures 17 et 18 et les commenter en considérant des critères (non exhaustifs) comme les coefficients d'amortissement obtenus, les niveaux d'atténuation de la perturbation d'effort au regard du cahier des charges défini figure 3, la cohérence des résultats montrés par les figures 17 et 18, etc. Conclure sur la capacité du système GyroLock, tel qu'il a été modélisé dans cette étude, à maintenir la zone à opérer lors d'une opération à coeur battant.

Sur le graphe montrant l'évolution temporelle de $y(t)$:

- la pulsation relevée est $\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{1} \approx 6,3\text{rad/s}$ (borne inférieure des pulsations autorisées par le cahier des charges) ;
- le déplacement maximal par rapport à la référence 0 du stabilisateur est de 2mm.

On déduit qu'avec compensation le cahier des charges est respecté pour une pulsation de 6,3rad/s.

Si on regarde le diagramme de gain en boucle fermée, pour la plage de pulsations entre 6,3rad/s et 23rad/s du cahier des charges, on a :

- avec anticipation/compensation on a une atténuation d'environ -70dB ;
- sans anticipation/compensation on a une atténuation de -60dB.

On a vu grâce au tracé temporel qu'avec anticipation on validait tout juste le cahier des charges, donc sans anticipation on devine que le système ne convient pas.

Par contre il a été supposé en question 17 que $\theta_2 \approx 0$, or on voit qu'il varie sur $\pm 45^\circ = \pm \frac{\pi}{4}\text{rad}$. L'hypothèse des petits mouvements n'est pas validée.

Pour conclure le système GyroLock tel qu'il a été modélisé dans cette étude permet de valider le cahier des charges mais une autre étude devrait être menée pour vérifier que l'hypothèse $\theta_2 \approx 0$ ne dégrade pas trop la qualité du modèle.