

Proposition de corrigé

Concours : Concours Commun Mines-Ponts

Année : 2023

Filière : PSI

Épreuve : Sciences Industrielles pour l'Ingénieur

Ceci est une proposition de corrigé des concours de CPGE, réalisée bénévolement par des enseignants de Sciences Industrielles de l'Ingénieur et d'Informatique, membres de l'[UPSTI](https://www.upsti.fr) (Union des Professeurs de Sciences et Techniques Industrielles), et publiée sur le site de l'association :

<https://www.upsti.fr/espace-etudiants/annales-de-concours>

A l'attention des étudiants

Ce document vous apportera des éléments de corrections pour le sujet traité, mais n'est ni un corrigé officiel du concours, ni un corrigé détaillé ou exhaustif de l'épreuve en question.

L'UPSTI ne répondra pas directement aux questions que peuvent soulever ces corrigés : nous vous invitons à vous rapprocher de vos enseignants si vous souhaitez des compléments d'information, et à vous adresser à eux pour nous faire remonter vos éventuelles remarques.

Licence et Copyright

Toute représentation ou reproduction (même partielle) de ce document faite sans l'accord de l'UPSTI est **interdite**. Seuls le téléchargement et la copie privée à usage personnel sont autorisés (protection au titre des [droits d'auteur](#)).

En cas de doute, n'hésitez pas à nous contacter à : corrigesconcours@upsti.fr.

Informez-vous !

Retrouvez plus d'information sur les [Sciences de l'Ingénieur](#), l'[orientation](#), les [Grandes Ecoles](#) ainsi que sur les [Olympiades de Sciences de l'Ingénieur](#) et sur les [Sciences de l'Ingénieur au Féminin](#) sur notre site : www.upsti.fr

L'équipe UPSTI

ETUDE DU SISMOMETRE SEIS

Corrigé UPSTI

I - Présentation

II - Réglage de la position d'équilibre du pendule

II.1 - Compensation de la gravité terrestre

Objectif : établir les conditions que doit respecter le contrepoids pour compenser la gravité terrestre lors d'expériences sur Terre.

Question 1 Ecrire l'équation traduisant l'équilibre de l'ensemble mobile $\{(2)+(3)\}$ sur Terre lorsque $\alpha(t) = \alpha_{eq}$. Préciser le bilan des actions mécaniques extérieures, le théorème ou principe utilisé, et les éléments d'application (projection, point éventuel).

On isole l'ensemble mobile $\{(2)+(3)\}$.

Bilan des actions mécaniques extérieures :

- Frottement visqueux :

Liaison pivot d'axe $O_1\bar{z}_1^-$ (les frottements visqueux ayant une contribution nulle à l'équilibre) :

$$\{\tau_{1 \rightarrow (2+3)}\} = \begin{Bmatrix} X_O \bar{x}_1^- + Y_O \bar{y}_1^- + Z_O \bar{z}_1^- \\ L_O \bar{x}_1^- + M_O \bar{y}_1^- \end{Bmatrix}_{O_1}$$

- Rappel du ressort :

$$\{\tau_{ressort \rightarrow (2+3)}\} = \begin{Bmatrix} \bar{0} \\ (C_0 - k(\alpha_{eq} - \alpha_0)) \bar{z}_1^- \end{Bmatrix}_{O_1}$$

- Poids de (3) :

$$\{P_{(3)}\} = \begin{Bmatrix} -M_3 g \bar{y}_1^- \\ \bar{0} \end{Bmatrix}_{G_2}$$

D'après la formule de Varignon, on a :

$$\{P_{(3)}\} = \begin{Bmatrix} -m_3 g_T \bar{y}_1^- \\ \bar{O}_1 \bar{G}_3^- \wedge -m_3 g_T \bar{y}_1^- \end{Bmatrix}_{O_1}$$

$$\{P_{(3)}\} = \begin{Bmatrix} -m_3 g_T \bar{y}_1^- \\ -b \bar{y}_2^- \wedge -m_3 g_T \bar{y}_1^- \end{Bmatrix}_{O_1}$$

$$\{P_{(3)}\} = \begin{Bmatrix} -m_3 g_T \bar{y}_1^- \\ -b m_3 g_T \sin(\alpha_{eq}) \bar{z}_1^- \end{Bmatrix}_{0_1}$$

- Poids de (2) :

$$\{P_{(2)}\} = \begin{Bmatrix} -M_2 g_T \bar{y}_1^- \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_{G_2}$$

D'après la formule de Varignon, on a :

$$\{P_{(2)}\} = \begin{Bmatrix} -M_2 g_T \bar{y}_1^- \\ \vec{O}_1 G_2^- \wedge -M_2 g_T \bar{y}_1^- \end{Bmatrix}_{0_1}$$

$$\{P_{(2)}\} = \begin{Bmatrix} -M_2 g_T \bar{y}_1^- \\ a \bar{y}_2^- \wedge -M_2 g_T \bar{y}_1^- \end{Bmatrix}_{0_1}$$

$$\{P_{(2)}\} = \begin{Bmatrix} -M_2 g_T \bar{y}_1^- \\ a M_2 g_T \sin(\alpha_{eq}) \bar{z}_1^- \end{Bmatrix}_{0_1}$$

D'après le théorème du moment statique en O_1 projeté selon $\bar{z}_1^-$, on a :

$$C_0 - k(\alpha_{eq} - \alpha_0) - b m_3 g_T \sin(\alpha_{eq}) + a M_2 g_T \sin(\alpha_{eq}) = 0$$

Question 2 Donner la condition sur la masse m_3 et la variable b pour compenser la différence de pesanteur entre la Terre et Mars. Pour cela, exprimer le produit $b m_3$ en fonction de a , M_2 , g_T et g_M .

On veut sur Terre :

$$C_0 - k(\alpha_{eq} - \alpha_0) - b m_3 g_T \sin(\alpha_{eq}) + a M_2 g_T \sin(\alpha_{eq}) = 0$$

On veut sur Mars :

$$C_0 - k(\alpha_{eq} - \alpha_0) + a M_2 g_M \sin(\alpha_{eq}) = 0$$

On en déduit donc :

$$-b M_3 g_T \sin(\alpha_{eq}) + a M_2 g_T \sin(\alpha_{eq}) - a M_2 g_M \sin(\alpha_{eq}) = 0$$

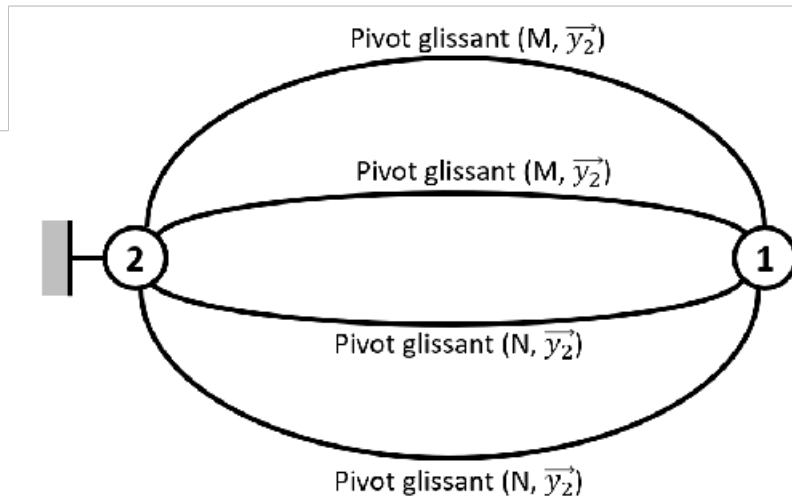
$$-b M_3 g_T + a M_2 g_T - a M_2 g_M = 0$$

$$b M_3 = \frac{a M_2 (g_T - g_M)}{g_T}$$

II.2 - Conception d'un mécanisme de translation du centre d'inertie du pendule

Objectif : justifier les choix de conception du mécanisme de translation du centre d'inertie du pendule.

Question 3 Compléter, sur le Cahier Réponses, le graphe des liaisons fournis avec les noms et la (les) caractéristique(s) géométrique(s) des liaisons. Donner le nombre de boucles indépendantes (nombre cyclomatique γ) de ce modèle.



On a :

$$\gamma = 4 - 2 + 1 = 3 \text{ cycles indépendants}$$

Question 4 Déterminer le degré d'hyperstatisme h de ce modèle. Préciser les mobilités internes (m_i) et utiles (m_u). Justifier, au regard du système et de son contexte d'utilisation, l'intérêt d'un tel degré d'hyperstatisme pour la réalisation du guidage.

$$m_i = 0$$

$$m_u = 1$$

$$h = 6 * \gamma - I_c + m_u + m_i$$

$$h = 6 * 3 - 4 * 2 + 1 + 0 = 11$$

L'hyperstatisme permet de rigidifier la liaison glissière et donc d'éviter des déformations qui perturberaient le comportement dynamique.

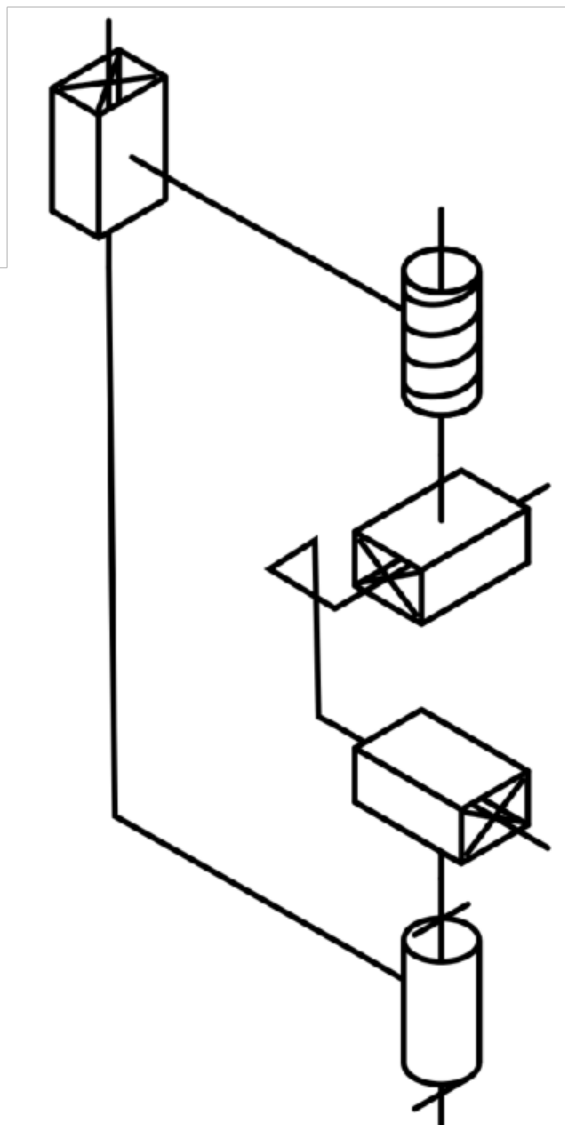
Question 5 A l'aide de la FIGURE 7 et par analyse des surfaces de contact, identifier la liaison entre (N) et (5) d'une part, entre (N) et (v) d'autre part. Compléter le schéma cinématique en 3D du Cahier Réponses en traçant ces liaisons.

Liaison (N)/(5) - glissière de direction $\vec{z}_5^-$:

- Appui plan de normale $\vec{y}_5^-$
- 2 appui plan de normale $\vec{x}_5^-$

Liaison (N)/(v) - glissière de direction $\vec{x}_5^-$:

- Appui plan de normale $\vec{y}_5^-$
- 2 appui plan de normale $\vec{z}_5^-$



Question 6 Pour chacune des 5 propositions de défauts géométriques du tableau du Cahier Réponses, entourer OUI lorsque le joint d'Oldham permet de rattraper le défaut et entourer NON lorsque ce n'est pas le cas.

OUI	NON
OUI	NON
OUI	NON
OUI	NON
OUI	NON

II.3 - Validation de la précision du positionnement du centre d'inertie du pendule

Objectif : vérifier que l'exigence 1.1 de précision du positionnement du centre d'inertie du pendule est bien validée.

Question 7 Justifier que $\omega_{4/2} = 0$. Etablir l'expression du rapport de transmission d'un étage $k = \frac{\omega_{5/2}}{\omega_{7/2}}$ en fonction des nombres de dents Z_i et faire l'application numérique.

Le solide (2) est en translation par rapport au solide (4) (liaison glissière), on a donc $\omega_{4/2} = 0$.

D'après la formule de Willis :

$$\frac{\omega_{4/2} - \omega_{5/2}}{\omega_{7/2} - \omega_{5/2}} = -\frac{Z_7 Z_6}{Z_6 Z_4} = -\frac{Z_7}{Z_4}$$

$$\frac{\omega_{5/2}}{\omega_{7/2} - \omega_{5/2}} = \frac{Z_7}{Z_4}$$

$$\omega_{5/2} Z_4 = Z_7 (\omega_{7/2} - \omega_{5/2})$$

$$\omega_{5/2} (Z_4 + Z_7) = Z_7 \omega_{7/2}$$

$$k = \frac{\omega_{5/2}}{\omega_{7/2}} = \frac{Z_7}{Z_7 + Z_4} = \frac{1}{4}$$

Question 8 Exprimer le rapport de transmission global du réducteur $k_g = \frac{\omega_{5/2}}{\omega_{m/2}}$ en fonction de k .

$$k_g = k^4$$

Question 9 En s'appuyant sur les notations et données de la FIGURE 8, établir l'expression du déplacement linéaire d_v de la vis (v) par pas du moteur en fonction de N_m , k_g et p_v . Faire l'application numérique et conclure vis-à-vis de l'exigence 1.1 de précision du positionnement du centre d'inertie.

$$d_v = \frac{p_v k^4}{N_m} = 0,068 \mu m$$

On a $0,068 \mu m < 3 \mu m$. On en déduit que l'exigence 1.1 est vérifiée.

En toute rigueur, pour assurer une précision de $\pm 3 \mu m$, il suffirait d'une résolution de $6 \mu m$. Mais la résolution n'est pas la seule chose à prendre en compte, il y a aussi par exemple les jeux (ci-dessous) ...

Question 10 Proposer une cause de la non-linéarité qui apparait au changement de sens de rotation du moteur.

La présence de jeux fonctionnels dans les trains épicycloïdaux (et le système vis-écrou) peut expliquer ce phénomène.

Question 11 Donner l'erreur de positionnement due à la non-linéarité. Conclure à nouveau vis-à-vis de l'exigence 1.1 de précision du positionnement du centre d'inertie.

L'erreur de positionnement vaut environ $30d_v$ soit $2,05 \mu m < 3 \mu m$. On en déduit que le cahier des charges est respecté.

III - Caractérisation dynamique de l'ensemble mobile

Objectif : établir le lien entre la raideur du ressort et la pulsation propre de l'ensemble mobile ; choisir un ressort et une articulation à lamelles de façon à respecter les exigences 2.1 et 2.2.

III.1 - Modélisation dynamique de l'ensemble mobile en réponse à un séisme

Question 12 Quel plan de symétrie de l'ensemble mobile $\{(2)+(3)\}$ serait cohérent avec les valeurs numériques de la matrice $\bar{I}_{(O_1,2+3)}$ déterminée par le logiciel de CAO ? En déduire, sous sa forme littérale, l'écriture simplifiée de la matrice d'inertie.

$(O_1, \bar{x}_2, \bar{y}_2)$ est plan de symétrie car les termes I_{xz} et I_{yz} sont négligeables devant les autres composantes.

On en déduit :

$$\bar{I}_{(O_1,2+3)} = \begin{bmatrix} I_{xx} & -I_{xy} & 0 \\ -I_{xy} & I_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz} \end{bmatrix}$$

Question 13 Déterminer, dans son mouvement par rapport au repère R_0 , l'expression du moment cinétique de $\{(2)+(3)\}$ en O_1 , $\bar{\sigma}_{O_1,(2+3)/0}$. On l'exprimera en fonction des paramètres cinétiques de $\{(2)+(3)\}$ et des paramètres géométriques et cinématiques du système.

Par définition, on a :

$$\bar{\sigma}_{O_1,(2+3)/0} = \bar{I}_{(O_1,2+3)} \cdot \bar{\Omega}_{(2+3)/0} + \bar{O}_1 \bar{G} \wedge M \bar{V}_{O_1,(2+3)/0}$$

$$\bar{\sigma}_{O_1,(2+3)/0} = \bar{I}_{(O_1,2+3)} \cdot \dot{\alpha} \bar{z}_1 + M d \bar{y}_2 \wedge (V_x \bar{x}_1 + V_y \bar{y}_1)$$

$$\bar{\sigma}_{O_1,(2+3)/0} = I_{zz} \dot{\alpha} \bar{z}_1 - M d (V_x \cos \alpha + V_y \sin \alpha) \bar{z}_1$$

Question 14 Montrer que la projection sur $\bar{z}_1$ du moment dynamique de $\{(2)+(3)\}$ dans son mouvement par rapport au repère R_0 en O_1 est de la forme suivante :

$$\bar{\delta}_{O_1,(2+3)/0} \cdot \bar{z}_1 = I_{zz} \ddot{\alpha} \bar{z}_1 - M d \gamma_{x2}(t)$$

Par définition, on a :

$$\bar{\delta}_{O_1,(2+3)/0} = \left. \frac{d\bar{\sigma}_{O_1,(2+3)/0}}{dt} \right|_0 + M \bar{V}_{O_1,(2+3)/0} \wedge \bar{V}_{G,(2+3)/0}$$

$$\bar{V}_{O_1,(2+3)/0} = V_x \bar{x}_1 + V_y \bar{y}_1$$

$$\bar{V}_{G,(2+3)/0} = \bar{V}_{O_1,(2+3)/0} + \bar{G} \bar{O}_1 \wedge \bar{\Omega}_{(2+3)/0}$$

$$\bar{V}_{G,(2+3)/0} = V_x \bar{x}_1 + V_y \bar{y}_1 - d \bar{y}_2 \wedge \dot{\alpha} \bar{z}_2$$

$$\bar{V}_{G,(2+3)/0} = V_x \bar{x}_1 + V_y \bar{y}_1 - d \bar{y}_2 \wedge \dot{\alpha} \bar{z}_2$$

$$\bar{V}_{G,(2+3)/0} = V_x \bar{x}_1 + V_y \bar{y}_1 - d \dot{\alpha} \bar{x}_2$$

$$\bar{V}_{O_1,(2+3)/0} \wedge \bar{V}_{G,(2+3)/0} = (V_x \bar{x}_1 + V_y \bar{y}_1) \wedge (V_x \bar{x}_1 + V_y \bar{y}_1 - d \dot{\alpha} \bar{x}_2)$$

$$\bar{V}_{O_1,(2+3)/0} \wedge \bar{V}_{G,(2+3)/0} = (-V_x d \dot{\alpha} \sin \alpha + V_y d \dot{\alpha} \cos \alpha) \bar{z}_1$$

$$\bar{\delta}_{O_1,(2+3)/0} = \left. \frac{d(I_{zz} \dot{\alpha} \bar{z}_1 - M d (V_x \cos \alpha + V_y \sin \alpha) \bar{z}_1)}{dt} \right|_0 + M (-V_x d \dot{\alpha} \sin \alpha + V_y d \dot{\alpha} \cos \alpha) \bar{z}_1$$

$$\bar{\delta}_{O_1,(2+3)/0} = I_{zz} \ddot{\alpha} \bar{z}_1 - M d \dot{\alpha} (-V_x \sin \alpha + V_y \cos \alpha) \bar{z}_1 - M d \dot{\alpha} (\dot{V}_x \cos \alpha + \dot{V}_y \sin \alpha) \bar{z}_1 + M d \dot{\alpha} (-V_x \sin \alpha + V_y \cos \alpha) \bar{z}_1$$

$$\bar{\delta}_{O_1(2+3)/0}^- = I_{zz}\ddot{\bar{z}}_1^- - M d \dot{\alpha} (\dot{V}_x \cos \alpha + \dot{V}_y \sin \alpha) \bar{z}_1^-$$

On a donc par identification :

$$\gamma_{x2}(t) = (\dot{V}_x \cos \alpha + \dot{V}_y \sin \alpha) \dot{\alpha}$$

Question 15 Préciser, sans faire de calculs, le système isolé et l'équation issue du Principe Fondamental de la Dynamique qui permet d'obtenir l'équation du mouvement de l'ensemble mobile suivante :

$$I_{zz}\ddot{\alpha}(t) + \mu\dot{\alpha}(t) + k(\alpha(t) - \alpha_0) = aM_2g_M \sin \alpha(t) + dM\gamma_{x2}(t) + C_0$$

Donner les éléments d'applications (équation, projection, point éventuel...) du théorème utilisé. Justifier que l'équation obtenue n'est pas linéaire, indépendamment de l'expression de .

On isole {2+3}.

Théorème utilisé : TMD en O_1 projeté selon $\bar{z}_1^-$.

$\gamma_{x2}(t)$ est exprimé selon $\cos \alpha$ et $\sin \alpha$ qui sont non-linéaire. L'équation est donc non linéaire.

Question 16 Montrer que l'équation du mouvement linéarisée s'écrit :

$$I_{zz}\Delta\ddot{\alpha}(t) + \mu\Delta\dot{\alpha}(t) + k\Delta\alpha(t) = aM_2g_M \cos \alpha_0 \Delta\alpha(t) + dM\gamma_{x2}(t)$$

On a :

$$\alpha(t) = \alpha_0 + \Delta\alpha(t)$$

$$\dot{\alpha}(t) = \Delta\dot{\alpha}(t)$$

$$\ddot{\alpha}(t) = \Delta\ddot{\alpha}(t)$$

On obtient donc :

$$I_{zz}\Delta\ddot{\alpha}(t) + \mu\Delta\dot{\alpha}(t) + k\Delta\alpha(t) = aM_2g_M \sin(\alpha_0 + \Delta\alpha(t)) + dM\gamma_{x2}(t) + C_0$$

Or :

$$aM_2g_M \sin(\alpha_0 + \Delta\alpha(t)) + C_0 = aM_2g_M (\sin \alpha_0 \cos \Delta\alpha(t) + \cos \alpha_0 \sin \Delta\alpha(t)) + C_0$$

Avec l'équation traduisant l'équilibre (éq. 1')

$$aM_2g_M \sin(\alpha_0 + \Delta\alpha(t)) + C_0 = aM_2g_M \cos \alpha_0 \sin \Delta\alpha(t)$$

$$aM_2g_M \sin(\alpha_0 + \Delta\alpha(t)) + C_0 = aM_2g_M \cos \alpha_0 \Delta\alpha(t)$$

On retrouve donc :

$$I_{zz}\Delta\ddot{\alpha}(t) + \mu\Delta\dot{\alpha}(t) + k\Delta\alpha(t) = aM_2g_M \cos \alpha_0 \Delta\alpha(t) + dM\gamma_{x2}(t)$$

Question 17 Exprimer, sous forme canonique, la fonction de transfert de l'ensemble mobile $\frac{\alpha(p)}{\gamma_{x2}(p)}$ et donner la condition de stabilité de l'ensemble mobile sous la forme d'une inéquation. Conclure sur le rôle stabilisateur du ressort.

Dans le domaine de Laplace, on a :

$$I_{zz}p^2\alpha(p) + \mu p\alpha(p) + k\alpha(p) = aM_2g_M\cos\alpha_0\alpha(p) + dM\gamma_{x2}(p)$$

$$I_{zz}p^2\alpha(p) + \mu p\alpha(p) + k\alpha(p) - aM_2g_M\cos\alpha_0\alpha(p) = dM\gamma_{x2}(p)$$

On en déduit :

$$\frac{\alpha(p)}{\gamma_{x2}(p)} = \frac{dM}{I_{zz}p^2 + \mu p + k - aM_2g_M\cos\alpha_0}$$

I_{zz} et μ sont positifs. Le système sera stable si et seulement si :

$$k - aM_2g_M\cos\alpha_0 > 0$$

Sans ressort ($k=0$), $aM_2g_M\cos\alpha_0$ sera négatif et le système sera instable. Le ressort permet donc de garantir la stabilité du système.

Question 18 Donner, en fonction des constantes du problème, les expressions des constantes caractéristique de cette fonction de transfert : gain d'amplification mécanique noté A , pulsation propre ω_0 et d'amortissement ξ .

Par identification, on a :

$$A = \frac{dM}{k - aM_2g_M\cos\alpha_0}$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k - aM_2g_M\cos\alpha_0}{I_{zz}}}$$

$$\xi = \frac{\mu}{2\sqrt{I_{zz}(k - aM_2g_M\cos\alpha_0)}}$$

III.2 - Choix du couple ressort/articulation pour le système

Question 19 Déterminer la valeur numérique de C_0 pour assurer l'équilibre du pendule

On a :

$$dMg_M\sin\alpha_0 + C_0 = 0$$

$$C_0 = -dMg_M\sin\alpha_0$$

Or $\alpha_0 = 30^\circ$. On a donc :

$$C_0 = -\frac{dMg_M}{2} = -8,8 \cdot 10^{-3} \text{ Nm}$$

Question 20 Donner les 2 inéquations qui régissent le choix de la raideur k du couple ressort/articulation, afin de satisfaire l'exigence 2.1 et d'avoir un système stable. A l'aide d'applications numériques, en déduire la plage de valeurs acceptables pour k afin de satisfaire ces deux exigences.

On veut :

$$k - dMg_M \cos \alpha_0 > 0$$

$$A > A_{\min} = 2 \text{ rad} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{s}^2$$

On a donc :

$$k > dMg_M \cos \alpha_0$$

$$\frac{dM}{k - dMg_M \cos \alpha_0} > A_{\min}$$

$$dM > A_{\min}(k - dMg_M \cos \alpha_0)$$

$$dM + A_{\min} dMg_M \cos \alpha_0 > A_{\min} k$$

$$\frac{dM(1 + A_{\min} g_M \cos \alpha_0)}{A_{\min}} > k$$

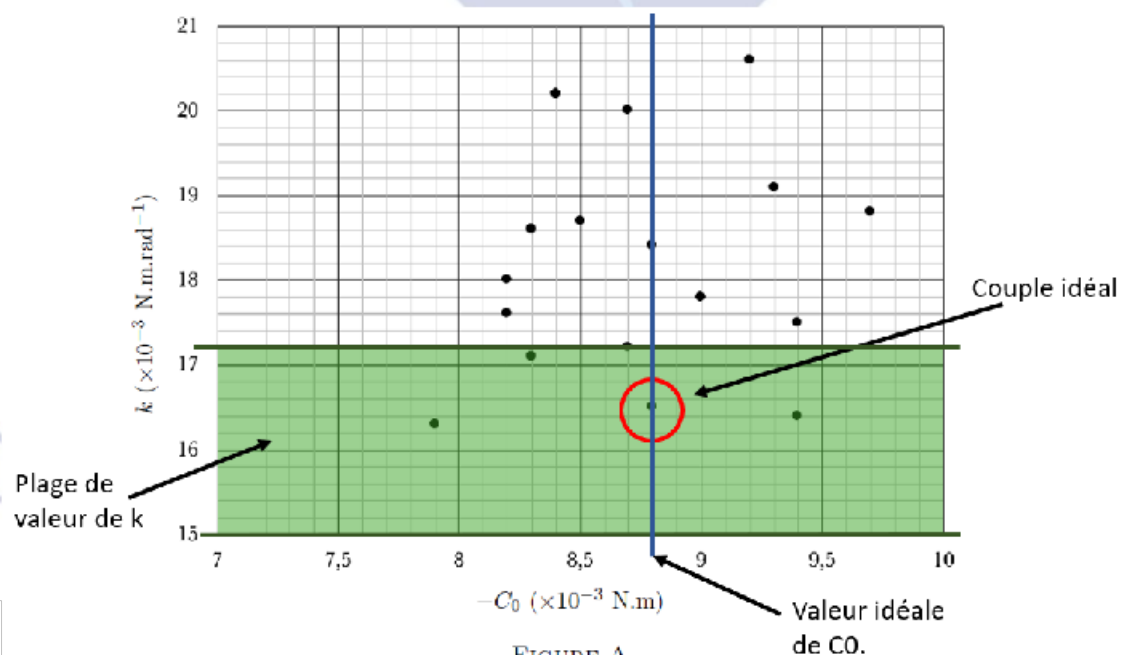
On a donc :

$$\frac{dM(1 + A_{\min} g_M \cos \alpha_0)}{A_{\min}} > k > dMg_M \cos \alpha_0$$

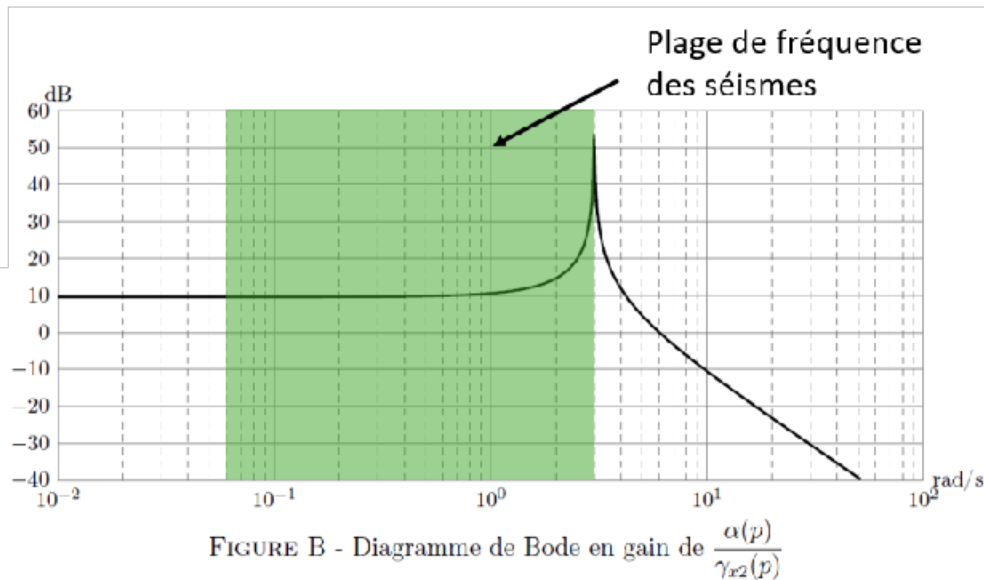
Soit :

$$17,2 \cdot 10^{-3} > k > 15 \cdot 10^{-3} \text{ N} \cdot \text{m} / \text{rad}$$

Question 21 Sur la FIGURE A du Cahier Réponses, tracer les droites encadrant les valeurs acceptables pour k et la droite correspondant à la valeur idéale de $-C_0$. En déduire le meilleur couple ressort/articulation pour le pendule étudié en entourant le point correspondant sur le diagramme.



Question 22 Conclure vis-à-vis de l'exigence 2.2. Les tracés nécessaires devront figurer sur la FIGURE B du Cahier Réponses. Le système est-il satisfaisant pour la mesure des mouvements du sol martien dans la plage de fréquence des séismes attendus sur Mars ?



Les gains pour des pulsations entre 0,06 et 3 rad/s sont supérieurs à 10dB. L'exigence 2.2 est donc vérifiée. On observe toutefois de la résonance pour une fréquence de 3 rad/s. En l'état, le système n'est pas satisfaisant pour la mesure des mouvements du sol martien.

IV - Performances de l'asservissement

Objectif : Régler la correction des bobines HF et BF.

Question 23 Déterminer la fonction de transfert $H_Y(p) = \frac{U(p)}{\gamma_{x2}(p)}$, avec $U_C(p) = 0$, en l'exprimant sous la forme :

$$H_Y(p) = K_{HF} \frac{1 + a_1 p}{1 + b_1 p + b_2 p^2 + b_3 p^3}$$

Où l'on précisera les expressions de K_{HF} , a_1 , b_1 , b_2 et b_3 .

D'après la formule de Black, on a :

$$H_Y(p) = dM \frac{\frac{K_D}{K + Jp^2}}{1 + \frac{K_D K_H K_1 p}{(K + Jp^2)(1 + \tau_H p)}}$$

$$H_Y(p) = dM \frac{\frac{K_D}{K + Jp^2}}{\frac{(K + Jp^2)(1 + \tau_H p) + K_D K_H K_1 p}{(K + Jp^2)(1 + \tau_H p)}}$$

$$H_Y(p) = dM \frac{K_D}{K + Jp^2} \frac{(K + Jp^2)(1 + \tau_H p)}{(K + Jp^2)(1 + \tau_H p) + K_D K_H K_1 p}$$

$$H_Y(p) = dM K_D \frac{1 + \tau_H p}{(K + Jp^2)(1 + \tau_H p) + K_D K_H K_1 p}$$

$$H_Y(p) = dM K_D \frac{1 + \tau_H p}{J\tau_H p^3 + Jp^2 + (K\tau_H + K_D K_H K_1)p + K}$$

$$H_Y(p) = \frac{dMK_D}{K} \frac{1 + \tau_H p}{1 + \frac{K\tau_H + K_D K_H K_1}{K} p + \frac{J}{K} p^2 + \frac{J\tau_H}{K} p^3}$$

Par identification, on a :

$$K_{HF} = \frac{dMK_D}{K}$$

$$a_1 = \tau_H$$

$$b_1 = \frac{K\tau_H + K_D K_H K_1}{K}$$

$$b_2 = \frac{J}{K}$$

$$b_3 = \frac{J\tau_H}{K}$$

Question 24 Justifier que $H_Y(p)$ correspond à un système stable quelle que soit la valeur retenue pour K_1 dans la gamme $[0,05 ; 5]$ s. Choisir, en justifiant, la valeur de K_1 , parmi les valeurs proposées, la plus adaptée au réglage de l'asservissement avec l'action de la bobine HF seule.

Tous les pôles ont des parties réelles strictement négatives. On en déduit que le système est stable au sens entrée bornée-sortie bornée.

L'exigence 3.4 n'est pas respectée pour une valeur de K_1 de 0,05 (gain supérieur à 120 dB). On cherche une bande passante la plus grande possible pour respecter l'exigence 3.1. On choisit donc une valeur de K_1 de 0,5.

Question 25 En s'appuyant sur les données numérique de la TABLE 4 et de l'Annexe 5, justifier que, pour la valeur retenue de K_1 , la fonction de transfert peut s'écrire sous la forme :

$$H_Y(p) = \frac{dMK_D}{K} \frac{1}{(1 + \tau_2 p)(1 + \tau_3 p)}$$

Préciser les valeurs des constantes de temps τ_2 et τ_3 .

$$\tau_1 = -\frac{1}{p_1} = 1/1000s^{-1} \quad \tau_2 = -\frac{1}{p_2} = 1/0,64s^{-1} \quad \tau_3 = -\frac{1}{p_3} = 1/9,32s^{-1}$$

On constate que $\tau_2 \gg \tau_1$ et $\tau_3 \gg \tau_1$. Le pôle p_1 pourrait être négligé (constante de temps très faible par rapport aux autres. Mais ici il se simplifie avec le zéro de la fonction de transfert ($\tau_1 = \tau_H$))

$$H_Y(p) = \frac{dMK_D}{K} \frac{1}{(1 + \tau_2 p)(1 + \tau_3 p)}$$

Question 26 Justifier que l'asservissement avec l'action de la bobine HF seule ne permet pas de satisfaire les exigences 3.2 et 3.3.

L'exigence 3.2 impose un écart statique nul en réponse à un échelon d'accélération du sol. Cette exigence n'est pas satisfaite. Pour le justifier :

- Soit remarquer qu'il n'y a pas d'intégration en amont de la perturbation, l'écart statique vis-à-vis de cette perturbation est donc non nul.
- Soit calculer la limite de l'écart lorsque t tend vers l'infini avec $u_c(t) = 0$ et $\gamma_{x2}(t) = \gamma_0 u(t)$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (\varepsilon(t)) = \lim_{p \rightarrow 0} (-pU(p)) = \lim_{p \rightarrow 0} (-H_\gamma(p) \cdot \gamma_0) = -\frac{dMK_D}{K} \gamma_0 \neq 0$$

Le gain n'est pas supérieur à 110dB sur toute la gamme de fréquence. On en déduit que l'exigence 3.3 n'est pas respectée non plus.

Question 27 Préciser l'intérêt de la chaîne d'action BF vis-à-vis de l'exigence 3.2.

L'action BF permet d'augmenter la classe de la FTBO. Il y a une intégration en amont de la perturbation, l'écart statique vis-à-vis de cette perturbation est donc nul. L'exigence 3.2. est satisfaite.

Question 28 Donner l'expression de la fonction de transfert en boucle ouverte de l'asservissement $H_{BO}(p) = \frac{U(p)}{\varepsilon(p)}$. Donner en justifiant, la valeur retenue pour τ_4 .

$$H_{BO}(p) = \frac{K_D K_4 K_B (1 + \tau_4 p)}{Kp(1 + \tau_B p)(1 + \tau_2 p)(1 + \tau_3 p)}$$

On cherche à éliminer le pôle dominant. On a donc : $\tau_4 = \tau_2$

$$H_{BO}(p) = \frac{K_D K_4 K_B}{Kp(1 + \tau_B p)(1 + \tau_3 p)}$$

Question 29 Choisir en justifiant, la valeur de K_4 qui permet de vérifier au mieux les exigences 3.3 et 3.4. Les tracés nécessaires apparaîtront sur la FIGURE C du Cahier Réponses.

Pour $K = 0.0001 \text{ s}^{-1}$, on amplifie (Gain $\geq 110 \text{ dB}$) sur une bande $[0.01 ; 3] \text{ rad/s}$.

Pour $K = 0.01 \text{ s}^{-1}$, on amplifie sur une bande $[0.2 ; 3] \text{ rad/s}$.

On choisit donc une valeur de K de 0.001 s^{-1} (on amplifie sur une bande $[0.06 ; 3] \text{ rad/s}$).

Question 30 Donner le nom du type de filtre réalisé par le pendule asservi et préciser l'intérêt de cette solution pour la mesure des séismes par le sismomètre VBB.

Il s'agit d'un filtre passe bande. Il permet de sélectionner les fréquences souhaitées en amplifiant uniquement ces dernières.