

Proposition de corrigé

Concours : Concours Commun INP

Année : 2022

Filière : PSI

Épreuve : Sciences Industrielles pour l'Ingénieur

Ceci est une proposition de corrigé des concours de CPGE, réalisée bénévolement par des enseignants de Sciences Industrielles de l'Ingénieur et d'Informatique, membres de l'[UPSTI](https://www.upsti.fr) (Union des Professeurs de Sciences et Techniques Industrielles), et publiée sur le site de l'association :

<https://www.upsti.fr/espace-etudiants/annales-de-concours>

A l'attention des étudiants

Ce document vous apportera des éléments de corrections pour le sujet traité, mais n'est ni un corrigé officiel du concours, ni un corrigé détaillé ou exhaustif de l'épreuve en question.

L'UPSTI ne répondra pas directement aux questions que peuvent soulever ces corrigés : nous vous invitons à vous rapprocher de vos enseignants si vous souhaitez des compléments d'information, et à vous adresser à eux pour nous faire remonter vos éventuelles remarques.

Licence et Copyright

Toute représentation ou reproduction (même partielle) de ce document faite sans l'accord de l'UPSTI est **interdite**. Seuls le téléchargement et la copie privée à usage personnel sont autorisés (protection au titre des [droits d'auteur](#)).

En cas de doute, n'hésitez pas à nous contacter à : corrigesconcours@upsti.fr.

Informez-vous !

Retrouvez plus d'information sur les [Sciences de l'Ingénieur](#), l'[orientation](#), les [Grandes Ecoles](#) ainsi que sur les [Olympiades de Sciences de l'Ingénieur](#) et sur les [Sciences de l'Ingénieur au Féminin](#) sur notre site : www.upsti.fr

L'équipe UPSTI

Drone à Géométrie Variable

Corrigé UPSTI

PARTIE I : INFLUENCE DES MOUVEMENTS DES BRAS DU DRONE SUR SON COMPORTEMENT

Objectif : Conséquences des mouvements des bras sur le comportement dynamique du drone

I - Influence de la rotation des bras sur l'envergure – vérification des exigences Id 1 et Id 1.1

Question 1 À partir de la figure 23 de l'annexe 2, déterminer l'expression de la largeur ℓ en fonction de γ_1 et des données de la géométrie du drone

Par lecture de la figure et par symétrie :

$$\ell = 2 \cdot \left(r_h + \frac{L_1}{2} \cdot \sin \gamma_1 \right) = 2 \cdot r_h + L_1 \cdot \sin \gamma_1$$

Question 2 En déduire la valeur de la réduction d'envergure $A = 1 - \frac{\ell_{\min}}{\ell_{\max}}$ et l'exprimer en %. Conclure sur la performance liée à l'exigence de réduction d'envergure Id 1.1

$$\gamma_1 = 0$$

$$\ell = \ell_{\min} = 2 \cdot r_h$$

$$\gamma_1 = 90^\circ$$

$$\ell = \ell_{\max} = 2 \cdot r_h + L_1$$

$$A = 1 - \frac{\ell_{\min}}{\ell_{\max}} = \frac{L_1}{2 \cdot r_h + L_1}$$

A.N. :

$$A = \frac{140}{140 + 2 \times 68} \times 100 = 52,2\%$$

La réduction d'envergure doit être de 50% au minimum, l'Id 1.1 est respectée.

Question 3 Relever pour l'essai n°4, la valeur de ℓ_{proj} avant repliement (notée ℓ_{proj}^{max}) et la comparer à $\ell_{\max}$ de la question précédente. De même pour la valeur après repliement (notée ℓ_{proj}^{min}) à comparer à $\ell_{\min}$. Si des écarts sont constatés entre les valeurs expérimentales et les valeurs théoriques, expliquer l'(les) origine(s) de ces écarts.
Conclure sur la vérification de l'exigence liée au passage d'ouverture Id 1.

Instant du repliement, bras déployés

$$\ell_{proj}^{max} = 0,12 + 0,14 = 0,26 \text{ m}$$

$$\ell_{proj}^{max} < \ell_{max}$$

Les bras ne sont donc pas tout à fait déployés :

$$\gamma_1 = \arcsin\left(\frac{\ell_{proj}^{max} - 2 \cdot r_h}{L_1}\right) \approx 71^\circ$$

Le drone n'aborde pas de façon orthogonale l'obstacle. La largeur projetée mesurée n'est donc pas la valeur de la largeur réelle du drone. Si l'angle de lacet est non nul la largeur projetée devrait être plus grande. Si l'angle de roulis est non nul, la largeur projetée devrait être plus petite. Comme ici elle est légèrement plus petite, on en déduit que l'angle de roulis n'est pas tout à fait nul comme cela est supposé dans l'énoncé.

Bras repliés

$$\ell_{proj}^{min} = 0,06 + 0,07 = 0,13 \text{ m}$$

$$\ell_{proj}^{min} \approx \ell_{min}$$

Même si l'angle de tangage est non nul ($\theta_T \approx 25^\circ$), le drone est presque dans l'axe de l'obstacle ($\theta_L \approx 0$). L'exigence Id 1.1 est bien respectée au vu de la figure, et même au-delà car la zone de collision mesure 50 cm (au lieu de 1 cm !).

II - Influence de la rotation des bras sur la vitesse en bout de pale – vérification de l'exigences Id 4

Question 4 Déterminer l'expression littérale de $\vec{V}(P, H1/\mathcal{R}_G)$, la vitesse en bout de pale de l'hélice H1 par rapport à $\mathcal{R}_G$, en fonction des données et notamment de $\dot{\gamma}_1$ et de ω_1 .

$$\vec{V}(P, H1/\mathcal{R}_G) = \frac{d\vec{O_G P}}{dt} \Big|_{\mathcal{R}_G} = \frac{d\vec{O_G O}}{dt} \Big|_{\mathcal{R}_G} + \frac{d\vec{O I_1}}{dt} \Big|_{\mathcal{R}_G} + \frac{d\vec{I_1 P}}{dt} \Big|_{\mathcal{R}_G} = V_x \cdot \vec{x}_0 - \frac{L_1}{2} \cdot \frac{d\vec{x}_1}{dt} \Big|_{\mathcal{R}_G} + r_h \cdot \frac{d\vec{x}_{H1}}{dt} \Big|_{\mathcal{R}_G}$$

$$\vec{V}(P, H1/\mathcal{R}_G) = V_x \cdot \vec{x}_0 - \frac{L_1}{2} \cdot \dot{\gamma}_1 \cdot \vec{y}_1 + r_h \cdot (\dot{\gamma}_1 + \omega_1) \cdot \vec{y}_{H1}$$

Commentaire : Le repère $\mathcal{R}_G$ n'est jamais défini

Question 5 Dans quelle condition du bras et de la pale cette vitesse en bout de pale est-elle maximale ? Déterminer dans ce cas l'expression maximale de la norme, notée V_{max} . Réaliser l'application numérique en déterminant au préalable la valeur numérique de chacun des termes de V_{max} . Commenter l'influence de la vitesse de rotation des bras du drone sur la valeur V_{max} et sur la vérification de l'exigence Id 4.

La norme de la vitesse $\vec{V}(P, H1/\mathcal{R}_G)$ est maximale quand les trois composantes de celle-ci sont dans le même sens soit dans la direction $\vec{x}_0$. Si le drone avance, $V_x > 0$ et $\omega_1 > 0$. De plus en phase de dépliement $\dot{\gamma}_1 > 0$. Quand le bras est en fin de phase de dépliement, $\gamma_1 = 90^\circ$, $\vec{y}_1 = -\vec{x}_0$ et $\alpha = 180^\circ$

$$V_{max} = \vec{V}(P, H1/\mathcal{R}_G)_{\gamma_1=90^\circ} \cdot \vec{x}_0 = V_x + \frac{L_1}{2} \cdot \dot{\gamma}_1 + r_h \cdot (\dot{\gamma}_1 + \omega_1)$$

A.N.

$$V_x = 2,5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

$$\frac{L_1}{2} \cdot \dot{\gamma}_1 = 70 \cdot 10^{-3} \times \left(\frac{\pi}{2} \times \frac{1}{300 \cdot 10^{-3}}\right) = 0,37 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

$$r_h \cdot (\dot{\gamma}_1 + \omega_1) = 64 \cdot 10^{-3} \times \left[\left(\frac{\pi}{2} \times \frac{1}{300 \cdot 10^{-3}}\right) + 13400 \times \frac{\pi}{30}\right] = 90,14 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

$$V_{max} = 93 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

La vitesse de rotation des bras est négligeable sur la vitesse en bout de pale V_{max} .

$V_{max} < 200 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$, l'exigence Id 4 est donc vérifiée.

III - Influence de la rotation des bras sur comportement dynamique du drone selon l'axe du lacet – vérification de l'exigence Id 1.1.1

Question 6 Déterminer l'expression littérale du moment dynamique du bras 1 calculé en O selon $\vec{z}_0$: $\vec{\delta}(O, 1/\mathcal{R}_0) \cdot \vec{z}_0$. En déduire l'expression littérale du moment dynamique du bras 2 calculé en O selon $\vec{z}_0$: $\vec{\delta}(O, 2/\mathcal{R}_0) \cdot \vec{z}_0$.

$$\vec{\delta}(O, 1/\mathcal{R}_0) = \vec{\delta}(A_1, 1/\mathcal{R}_0) + \overrightarrow{OA_1} \wedge m_b \cdot \vec{\Gamma}(A_1, 1/\mathcal{R}_0)$$

Or le mouvement est rectiligne uniforme donc $\vec{\Gamma}(A_1, 1/\mathcal{R}_0) = \vec{0}$.

$$\vec{\delta}(A_1, 1/\mathcal{R}_0) = \left. \frac{d\vec{\sigma}(A_1, 1/\mathcal{R}_0)}{dt} \right|_{\mathcal{R}_0}$$

A_1 est le centre d'inertie du bras 1

$$\vec{\sigma}(A_1, 1/\mathcal{R}_0) = \mathbb{I}_1(A_1) \cdot \vec{\Omega}(1/\mathcal{R}_0) = \begin{bmatrix} I_{bx} & 0 & 0 \\ 0 & I_{by} & 0 \\ 0 & 0 & I_{bz} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\gamma}_1 \end{bmatrix} = I_{bz} \cdot \dot{\gamma}_1 \cdot \vec{z}_0$$

$$\vec{\delta}(O, 1/\mathcal{R}_0) = \vec{\delta}(A_1, 1/\mathcal{R}_0) = I_{bz} \cdot \dot{\gamma}_1 \cdot \vec{z}_0$$

$$\vec{\delta}(O, 1/\mathcal{R}_0) \cdot \vec{z}_0 = I_{bz} \cdot \dot{\gamma}_1$$

De même :

$$\vec{\delta}(O, 2/\mathcal{R}_0) \cdot \vec{z}_0 = \vec{\delta}(A_2, 2/\mathcal{R}_0) \cdot \vec{z}_0 = I_{bz} \cdot \dot{\gamma}_2$$

Question 7 Déterminer l'expression littérale du moment dynamique de l'hélice H1 calculé en O selon $\vec{z}_0$: $\vec{\delta}(O, H1/\mathcal{R}_0) \cdot \vec{z}_0$.

$$\vec{\delta}(O, H1/\mathcal{R}_0) \cdot \vec{z}_0 = \vec{\delta}(I_1, H1/\mathcal{R}_0) \cdot \vec{z}_0 + [\overrightarrow{OI_1} \wedge m_h \cdot \vec{\Gamma}(I_1, H1/\mathcal{R}_0)] \cdot \vec{z}_0$$

$$\vec{\delta}(I_1, H1/\mathcal{R}_0) \cdot \vec{z}_0 = \left. \frac{d\vec{\sigma}(I_1, H1/\mathcal{R}_0)}{dt} \right|_{\mathcal{R}_0} \cdot \vec{z}_0 = \left. \frac{d\vec{\sigma}(I_1, H1/\mathcal{R}_0) \cdot \vec{z}_0}{dt} \right|_{\mathcal{R}_0}$$

$$\vec{\sigma}(I_1, H1/\mathcal{R}_0) = \mathbb{I}_{H1}(I_1) \cdot \vec{\Omega}(H1/\mathcal{R}_0) = I_{hz} \cdot (\dot{\gamma}_1 + \omega_1) \cdot \vec{z}_0$$

$$\vec{\sigma}(I_1, H1/\mathcal{R}_0) \cdot \vec{z}_0 = I_{hz} \cdot (\dot{\gamma}_1 + \omega_1)$$

$$\vec{\delta}(I_1, H1/\mathcal{R}_0) \cdot \vec{z}_0 = I_{hz} \cdot \dot{\gamma}_1$$

$$\text{Car } \omega_1 = cte$$

$$[\overrightarrow{OI_1} \wedge m_h \cdot \vec{\Gamma}(I_1, H1/\mathcal{R}_0)] \cdot \vec{z}_0 = \overrightarrow{OI_1} \cdot [m_h \cdot \vec{\Gamma}(I_1, H1/\mathcal{R}_0) \wedge \vec{z}_0]$$

$$\vec{\Gamma}(I_1, H1/\mathcal{R}_0) = \frac{d\vec{V}(I_1, H1/\mathcal{R}_0)}{dt} \Big|_{\mathcal{R}_0}$$

$$\vec{V}(I_1, H1/\mathcal{R}_0) = V_x \cdot \vec{x}_0 - \frac{L_1}{2} \cdot \dot{\gamma}_1 \cdot \vec{y}_1$$

$$\vec{\Gamma}(I_1, H1/\mathcal{R}_0) = -\frac{L_1}{2} \cdot \ddot{\gamma}_1 \cdot \vec{y}_1 + \frac{L_1}{2} \cdot \dot{\gamma}_1^2 \cdot \vec{x}_1$$

$$m_h \cdot \vec{\Gamma}(I_1, H1/\mathcal{R}_0) \wedge \vec{z}_0 = -m_h \cdot \frac{L_1}{2} \cdot (\ddot{\gamma}_1 \cdot \vec{x}_1 + \dot{\gamma}_1^2 \cdot \vec{y}_1)$$

$$\vec{OI_1} = \frac{L_0}{2} \cdot \vec{x}_0 - \frac{L_1}{2} \cdot \vec{x}_1 + \frac{h}{2} \cdot \vec{z}_0$$

$$\begin{aligned} \vec{OI_1} \cdot [m_h \cdot \vec{\Gamma}(I_1, H1/\mathcal{R}_0) \wedge \vec{z}_0] &= \left(\frac{L_0}{2} \cdot \vec{x}_0 - \frac{L_1}{2} \cdot \vec{x}_1 + \frac{h}{2} \cdot \vec{z}_0 \right) \cdot \left[-m_h \cdot \frac{L_1}{2} \cdot (\ddot{\gamma}_1 \cdot \vec{x}_1 + \dot{\gamma}_1^2 \cdot \vec{y}_1) \right] \\ &= -m_h \cdot \frac{L_1}{2} \cdot \left(\frac{L_0}{2} \cdot \ddot{\gamma}_1 \cdot \cos \gamma_1 - \frac{L_0}{2} \cdot \dot{\gamma}_1^2 \cdot \sin \gamma_1 - \frac{L_1}{2} \cdot \ddot{\gamma}_1 \right) \end{aligned}$$

$$\vec{\delta}(O, H1/\mathcal{R}_0) \cdot \vec{z}_0 = I_{hz} \cdot \ddot{\gamma}_1 + m_h \cdot \frac{L_1}{2} \cdot \left(-\frac{L_0}{2} \cdot \ddot{\gamma}_1 \cdot \cos \gamma_1 + \frac{L_0}{2} \cdot \dot{\gamma}_1^2 \cdot \sin \gamma_1 + \frac{L_1}{2} \cdot \ddot{\gamma}_1 \right)$$

$$\vec{\delta}(O, H1/\mathcal{R}_0) \cdot \vec{z}_0 = \left[I_{hz} + m_h \cdot \frac{L_1}{4} \cdot (L_1 - L_0 \cdot \cos \gamma_1) \right] \cdot \ddot{\gamma}_1 + m_h \cdot \frac{L_1 \cdot L_0}{4} \cdot \dot{\gamma}_1^2 \cdot \sin \gamma_1$$

Question 8 En déduire l'expression littérale du moment dynamique de l'hélice H2 calculé en O selon $\vec{z}_0$: $\vec{\delta}(O, H2/\mathcal{R}_0) \cdot \vec{z}_0$.

$$\vec{\delta}(O, H2/\mathcal{R}_0) \cdot \vec{z}_0 = \vec{\delta}(I_2, H2/\mathcal{R}_0) \cdot \vec{z}_0 + [\vec{OI_2} \wedge m_h \cdot \vec{\Gamma}(I_2, H2/\mathcal{R}_0)] \cdot \vec{z}_0$$

$$\vec{\delta}(I_2, H2/\mathcal{R}_0) \cdot \vec{z}_0 = I_{hz} \cdot \ddot{\gamma}_1$$

$$\vec{V}(I_2, H2/\mathcal{R}_0) = V_x \cdot \vec{x}_0 + \frac{L_1}{2} \cdot \dot{\gamma}_1 \cdot \vec{y}_1$$

$$\vec{\Gamma}(I_2, H2/\mathcal{R}_0) = \frac{L_1}{2} \cdot \ddot{\gamma}_1 \cdot \vec{y}_1 - \frac{L_1}{2} \cdot \dot{\gamma}_1^2 \cdot \vec{x}_1$$

$$\vec{\delta}(O, H2/\mathcal{R}_0) \cdot \vec{z}_0 = \left[I_{hz} + m_h \cdot \frac{L_1}{4} \cdot (L_1 + L_0 \cdot \cos \gamma_1) \right] \cdot \ddot{\gamma}_1 - m_h \cdot \frac{L_1 \cdot L_0}{4} \cdot \dot{\gamma}_1^2 \cdot \sin \gamma_1$$

Question 9 À partir des résultats des trois questions précédentes, montrer que l'expression du moment dynamique de l'ensemble Σ , calculé en O selon $\vec{z}_0$ se met sous la forme :

$$\vec{\delta}(O, \Sigma/\mathcal{R}_0) \cdot \vec{z}_0 = 2 \cdot I_{eq} \cdot (\ddot{\gamma}_1 + \ddot{\gamma}_2)$$

où I_{eq} est une constante dont l'expression est à préciser.

$$\vec{\delta}(O, H1 + H2/\mathcal{R}_0) \cdot \vec{z}_0 = \vec{\delta}(O, H1/\mathcal{R}_0) \cdot \vec{z}_0 + \vec{\delta}(O, H2/\mathcal{R}_0) \cdot \vec{z}_0 = 2 \cdot \left[I_{hz} + m_h \cdot \left(\frac{L_1}{2} \right)^2 \right] \cdot \ddot{\gamma}_1$$

$$\begin{aligned}\vec{\delta}(O, H1 + H2/\mathcal{R}_0) \cdot \vec{z}_0 + \vec{\delta}(O, H3 + H4/\mathcal{R}_0) \cdot \vec{z}_0 &= 2 \cdot \left[I_{hz} + m_h \cdot \left(\frac{L_1}{2} \right)^2 \right] \cdot \ddot{\gamma}_1 + 2 \cdot \left[I_{hz} + m_h \cdot \left(\frac{L_1}{2} \right)^2 \right] \cdot \ddot{\gamma}_2 \\ &= 2 \cdot \left[I_{hz} + m_h \cdot \left(\frac{L_1}{2} \right)^2 \right] \cdot (\ddot{\gamma}_1 + \ddot{\gamma}_2)\end{aligned}$$

$$\vec{\delta}(O, 1/\mathcal{R}_0) \cdot \vec{z}_0 + \vec{\delta}(O, 2/\mathcal{R}_0) \cdot \vec{z}_0 = I_{bz} \cdot (\ddot{\gamma}_1 + \ddot{\gamma}_2)$$

$$\vec{\delta}(O, 0/\mathcal{R}_0) = \vec{0}$$

Vol rectiligne uniforme

$$\begin{aligned}\vec{\delta}(O, \Sigma/\mathcal{R}_0) \cdot \vec{z}_0 &= \vec{\delta}(O, 0/\mathcal{R}_0) \cdot \vec{z}_0 + \vec{\delta}(O, 1/\mathcal{R}_0) \cdot \vec{z}_0 + \vec{\delta}(O, 2/\mathcal{R}_0) \cdot \vec{z}_0 + \vec{\delta}(O, H1 + H2/\mathcal{R}_0) \cdot \vec{z}_0 \\ &\quad + \vec{\delta}(O, H3 + H4/\mathcal{R}_0) \cdot \vec{z}_0\end{aligned}$$

$$\vec{\delta}(O, \Sigma/\mathcal{R}_0) \cdot \vec{z}_0 = 2 \cdot \left[I_{hz} + m_h \cdot \left(\frac{L_1}{2} \right)^2 \right] \cdot (\ddot{\gamma}_1 + \ddot{\gamma}_2) + I_{bz} \cdot (\ddot{\gamma}_1 + \ddot{\gamma}_2) = \left[2 \cdot I_{hz} + 2 \cdot m_h \cdot \left(\frac{L_1}{2} \right)^2 + I_{bz} \right] \cdot (\ddot{\gamma}_1 + \ddot{\gamma}_2)$$

Par identification :

$$I_{eq} = 2 \cdot I_{hz} + I_{bz} + 2 \cdot m_h \cdot \left(\frac{L_1}{2} \right)^2$$

Question 10 Expliquer en quoi ce choix de conception permet de vérifier l'exigence Id 1.1.1

$$\gamma_2 = \pi - \gamma_1$$

$$\ddot{\gamma}_2 = -\ddot{\gamma}_1$$

$$\ddot{\gamma}_1 + \ddot{\gamma}_2 = 0$$

Le moment dynamique de l'ensemble Σ en O selon $\vec{z}_0$ est donc nul ce qui permet de valider l'exigence Id 1.1.1

IV - Influence de la rotation des bras sur l'inertie du drone – analyse de l'exigence Id 1.2

Question 11 Compte tenu de la géométrie retenue, simplifier la forme de la matrice d'inertie totale $\|_{\Sigma}(O)$. Justifier vos simplifications

$$\gamma_2 = \pi - \gamma_1$$

Il y a donc une symétrie de Σ par rapport à $(O, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$.

$$I_{\Sigma xy} = I_{\Sigma xz} = 0$$

$$\|_{\Sigma}(O) = \begin{pmatrix} I_{\Sigma X} & 0 & 0 \\ 0 & I_{\Sigma Y} & I_{\Sigma yz} \\ 0 & I_{\Sigma yz} & I_{\Sigma Z} \end{pmatrix}_{(O, \mathcal{B}_0)}$$

V - Influence du sens de rotation des hélices sur le comportement dynamique du drone – analyse de l'exigence Id 1.2

Question 12 En déduire en %, les variations maximales d'inertie en roulis, définie par $\frac{\Delta I_{\Sigma X}}{I_{\Sigma X}(\gamma_1 = 90^\circ)}$ et en tangage, définie par $\frac{\Delta I_{\Sigma Y}}{I_{\Sigma Y}(\gamma_1 = 90^\circ)}$. Conclure sur la différence de comportement en vol du drone en roulis et en tangage une fois les bras pliés.

$$\Delta I_{\Sigma X} = 0 - 85 \cdot 10^{-6} = -85 \cdot 10^{-6} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

$$\Delta I_{\Sigma Y} = 85 \cdot 10^{-6} - 0 = 85 \cdot 10^{-6} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

En roulis :

$$\frac{\Delta I_{\Sigma X}}{I_{\Sigma X}(\gamma_1 = 90^\circ)} = \frac{-85 \cdot 10^{-6}}{5,3 \cdot 10^{-4}} = -16 \%$$

En tangage

$$\frac{\Delta I_{\Sigma Y}}{I_{\Sigma Y}(\gamma_1 = 90^\circ)} = \frac{85 \cdot 10^{-6}}{1,96 \cdot 10^{-3}} = 4,3 \%$$

Le repliement augmente le moment d'inertie en tangage et le diminue en roulis.

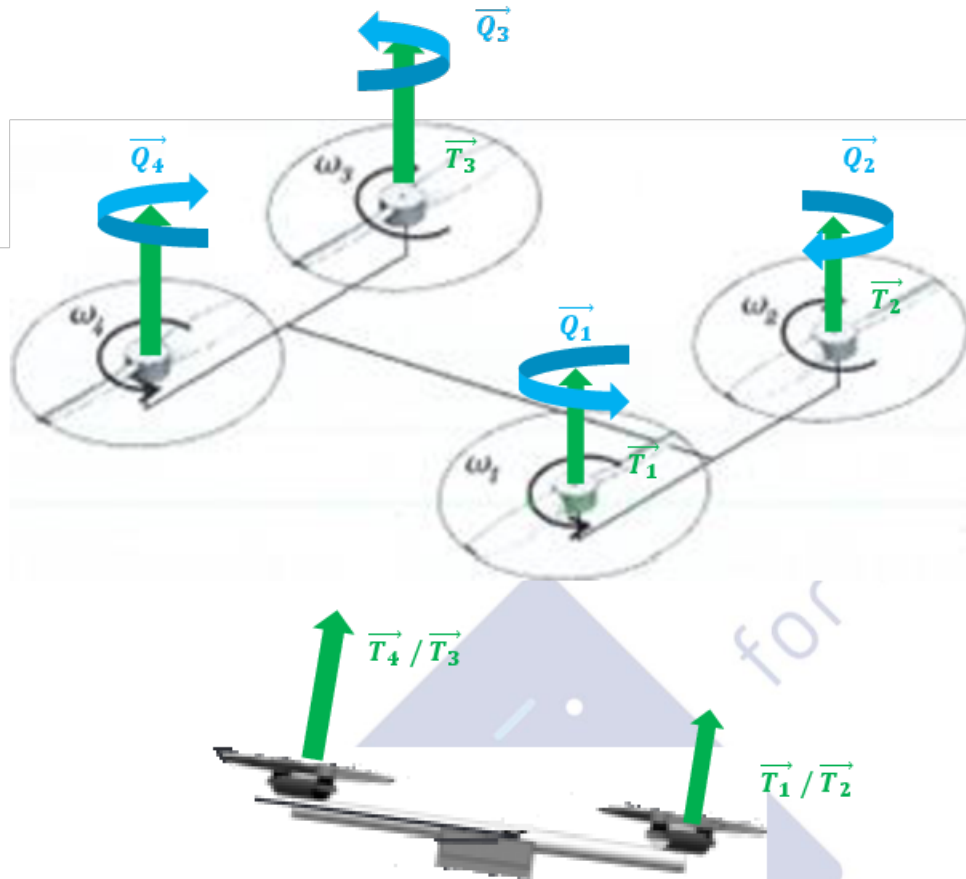
Question 13 Sur la figure du DR, représenter les actions mécaniques $\vec{T}$ et $\vec{Q}$ pour chacune des hélices (en trait plein pour les résultantes et en pointillés pour les moments). En déduire si le drone est en équilibre ou non.

Cas 1 : À l'équilibre Non à l'équilibre	Cas 2 : À l'équilibre Non à l'équilibre
Cas 3 : À l'équilibre Non à l'équilibre	Compléter chacun des cas en représentant les actions mécaniques $\vec{T}$ et $\vec{Q}$. Exemple de représentation des efforts : Pour l'équilibre, entourer la bonne réponse.

Question 14 Quel est le comportement du drone dans le cas où $|\omega_1| = |\omega_2|$ et $|\omega_3| = |\omega_4|$ avec $|\omega_1| < |\omega_3|$?
Vous pouvez vous aider d'un schéma pour représenter les actions et justifier votre réponse.

$$\|\vec{T}_1\| = \|\vec{T}_2\| \text{ et } \|\vec{T}_3\| = \|\vec{T}_4\| \quad \text{et} \quad \|\vec{T}_1\| < \|\vec{T}_3\|$$

$$\|\vec{Q}_1\| = \|\vec{Q}_2\| = \|\vec{Q}_3\| = \|\vec{Q}_4\|, \text{ les couples se compensent}$$



La poussée à l'avant est plus faible, le drone s'incline vers l'avant. De plus, cette poussée sur les quatre hélices s'incline vers l'avant, le drone avance.

Question 15 Déterminer l'expression du torseur de l'action de l'air sur l'hélice $H1$ (défini par l'équation (1)) calculé au point O , centre d'inertie du drone. Les composantes du torseur seront données dans la base $\mathcal{B}_0$ en fonction des grandeurs géométriques, de γ_1 , de c_T , c_Q et de ω_1 .

$$\begin{aligned}
 \vec{M}_{O,air \rightarrow H1} &= \vec{M}_{L_1,air \rightarrow H1} + \vec{OI_1} \wedge \vec{R}(air \rightarrow H1) = -Q \cdot \vec{z}_0 + \left(\frac{L_0}{2} \cdot \vec{x}_0 - \frac{L_1}{2} \cdot \vec{x}_1 + \frac{h}{2} \cdot \vec{z}_0 \right) \wedge T \cdot \vec{z}_0 \\
 &= -Q \cdot \vec{z}_0 - \frac{L_0}{2} \cdot T \cdot \vec{y}_0 + \frac{L_1}{2} \cdot T \cdot \vec{y}_1 = -Q \cdot \vec{z}_0 - \frac{L_0}{2} \cdot T \cdot \vec{y}_0 + \frac{L_1}{2} \cdot T \cdot (-\sin \gamma_1 \cdot \vec{x}_0 + \cos \gamma_1 \cdot \vec{y}_0) \\
 \{\mathcal{J}_{air \rightarrow H1}\} &= \begin{Bmatrix} T \cdot \vec{z}_0 \\ -\frac{L_1}{2} \cdot T \cdot \sin \gamma_1 \cdot \vec{x}_0 + \frac{T}{2} \cdot (L_1 \cdot \cos \gamma_1 - L_0) \cdot \vec{y}_0 - Q \cdot \vec{z}_0 \end{Bmatrix}_O \\
 &= \begin{Bmatrix} c_T \cdot \omega_1^2 \cdot \vec{z}_0 \\ -\frac{L_1}{2} \cdot T \cdot \sin \gamma_1 \cdot \vec{x}_0 + \frac{T}{2} \cdot (L_1 \cdot \cos \gamma_1 - L_0) \cdot \vec{y}_0 - c_Q \cdot \omega_1^2 \cdot \vec{z}_0 \end{Bmatrix}_O
 \end{aligned}$$

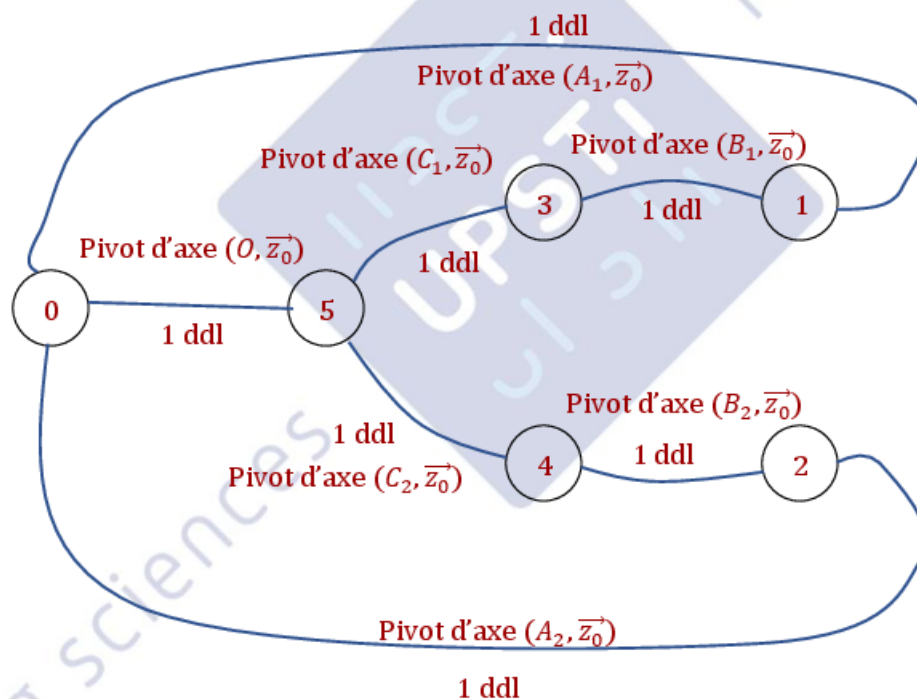
Question 16 Que dire de l'action des hélices dans la position bras repliés $\gamma_1 = 0^\circ$ pour le moment résultant en O selon l'axe de roulis ? Conclure sur le respect de l'exigence Id 1.2 dans cette configuration.

Si $\gamma_1 = 0^\circ$, alors le moment autour de $(O, \vec{x}_0)$, $\sum_{i=1}^4 \vec{M}_{O, air \rightarrow H_i} \cdot \vec{x}_0 = 0$. Dans cette position, le roulis n'est donc pas piloté ce qui ne valide pas l'exigence Id 1.2.

Remarque : dans le texte de l'exigence Id 1.2 « attitude » $\neq$ « altitude », risque de contresens.

PARTIE II : CHOIX D'UN MECANISME DE MODIFICATION DE L'ENVERGURE

Question 17 Calculer le degré d'hyperstaticité de la modélisation spatiale du mécanisme de repliement. Détailler votre analyse en précisant selon la méthode retenue : le nombre d'équations (cinématique ou statique), le nombre d'inconnues (cinématique ou statique) et le nombre de mobilités (utile et interne) en expliquant à quel(s) mouvement(s) et à quelle(s) pièce(s) ces mobilités sont associées.



La rotation du servomoteur lié au palonnier 5 entraîne la rotation des bras 1 et 2 et il n'y a pas de mobilités internes :

$$m = m_u + m_i = 1 + 0 = 1$$

Il y a 7 liaisons pivots donc 7 inconnues cinématiques :

$$I_c = 7$$

Il y a deux boucles indépendantes (évident) : $\gamma = 2$

$$h = m + 6 \times \gamma - I_c = 6$$

Question 18 Préciser succinctement quelle(s) contrainte(s) géométrique(s) est(sont) à respecter pour assurer l'assemblage de ce mécanisme ?

Il est nécessaire de mettre en place des contraintes d'orientation sur les liaisons pivots : parallélisme entre elles par exemple.

Question 19 En modifiant la nature de certaine(s) liaison(s), proposer un modèle de mécanisme de repliement isostatique basé sur un double système 4 barres.

Justifier votre proposition en reprenant le calcul du degré d'hyperstaticité.

En remplaçant les liaisons pivots par des liaisons sphériques en B_1, B_2, C_1 et C_2 , le mécanisme devient isostatique :

Deux mobilités internes apparaissent, rotation propre des bielles 3 et 4 :

$$m = m_u + m_i = 1 + 2 = 3$$

Il y a 3 liaisons pivots et 4 liaisons sphériques donc 15 inconnues cinématiques :

$$I_C = 3 + 4 \times 3 = 15$$

$$h = m + 6 \times \gamma - I_C = 3 + 12 - 15 = 0$$

Question 20 À partir du paramétrage et des hypothèses retenues, écrire la fermeture vectorielle liée à la chaîne de solides {corps 0, bras 1, câble 1 et poulie 5}.

La mettre sous la forme $L_{c1}(\theta) \cdot \vec{x}_{c1} = \dots$

$$\vec{OA_1} + \vec{A_1B_1} + \vec{B_1C_1} + \vec{C_1O} = \vec{0}$$

$$\frac{L_0}{2} \cdot \vec{x}_0 - a_1 \cdot \vec{x}_1 - L_{c1}(\theta) \cdot \vec{x}_{c1} - R_1 \cdot \vec{y}_0 = \vec{0}$$

$$L_{c1}(\theta) \cdot \vec{x}_{c1} = \frac{L_0}{2} \cdot \vec{x}_0 - a_1 \cdot \vec{x}_1 - R_1 \cdot \vec{y}_0$$

Question 21 En déduire une relation du type : $L_{c1}^2 = A \cdot \cos(\gamma_1) + B \cdot \sin(\gamma_1) + C$.

Exprimer les constantes A, B et C en fonction des données géométriques.

$$L_{c1}^2(\theta) = \left(\frac{L_0}{2} \cdot \vec{x}_0 - a_1 \cdot \vec{x}_1 - R_1 \cdot \vec{y}_0 \right)^2 = \left(\frac{L_0}{2} \right)^2 + a_1^2 + R_1^2 - a_1 \cdot L_0 \cdot \cos(\gamma_1) + 2 \cdot a_1 \cdot R_1 \cdot \sin(\gamma_1)$$

$$L_{c1}^2(\theta) = -a_1 \cdot L_0 \cdot \cos(\gamma_1) + 2 \cdot a_1 \cdot R_1 \cdot \sin(\gamma_1) + \left(\frac{L_0}{2} \right)^2 + a_1^2 + R_1^2$$

$$A = -a_1 \cdot L_0$$

$$B = 2 \cdot a_1 \cdot R_1$$

$$C = \left(\frac{L_0}{2} \right)^2 + a_1^2 + R_1^2$$

Question 22 Déterminer approximativement la valeur numérique de L_{c1}^{init} obtenue pour $\gamma_1 = 90^\circ$ et $\theta = 0^\circ$.

Déterminer approximativement la valeur numérique de L_{c1}^{final} obtenue pour $\gamma_1 = 0^\circ$ et $\theta = \Delta\theta$.

En déduire la valeur approchée en degrés de la course angulaire $\Delta\theta$ nécessaire pour assurer le repliement du bras 1, lorsque γ_1 passe de 90° à 0° .

$$L_{c1}^{init} = \sqrt{B + C} \approx 157 \text{ mm}$$

$$L_{c1}^{final} = \sqrt{A + C} \approx 104 \text{ mm}$$

$$L_{c1}^{final} = L_{c1}^{init} - R_1 \cdot \Delta\theta$$

$$\Delta\theta = \frac{L_{c1}^{init} - L_{c1}^{final}}{R_1} \approx 1,77 \text{ rad} \approx 101^\circ$$

Question 23 Déterminer à l'aide de la courbe de la figure 12 une valeur approchée de R_2 solution du système ①.
La valeur numérique de L_{c2}^{init} correspondante est alors $L_{c2}^{init} \approx 141 \text{ mm}$.

$f(R_2) = 0$ donne $R_2 = 23 \text{ mm}$

Question 24 Les critères de performance de l'exigence Id 1.1.2 liés au mécanisme de repliement/dépliage sont-ils respectés ?

- Rigidité avec les bras pliés ou dépliés : il n'y a pas d'oscillations sur les courbes de réponses mais les hélices et le drone sont à l'arrêt, il est donc difficile de conclure ;
- Passer d'une configuration à l'autre en moins de 300 ms : en phase de repliement le passage se fait en 200 ms environ, c'est donc conforme. En phase de dépliement le passage se fait en 325 ms environ, ce qui est non conforme mais c'est moins important et peut être accepté ;
- Assurer une précision angulaire de $\pm 2^\circ$: erreur de position est nulle, conforme ;
- Être de poids limité par rapport au poids total : 6% du poids total, conforme

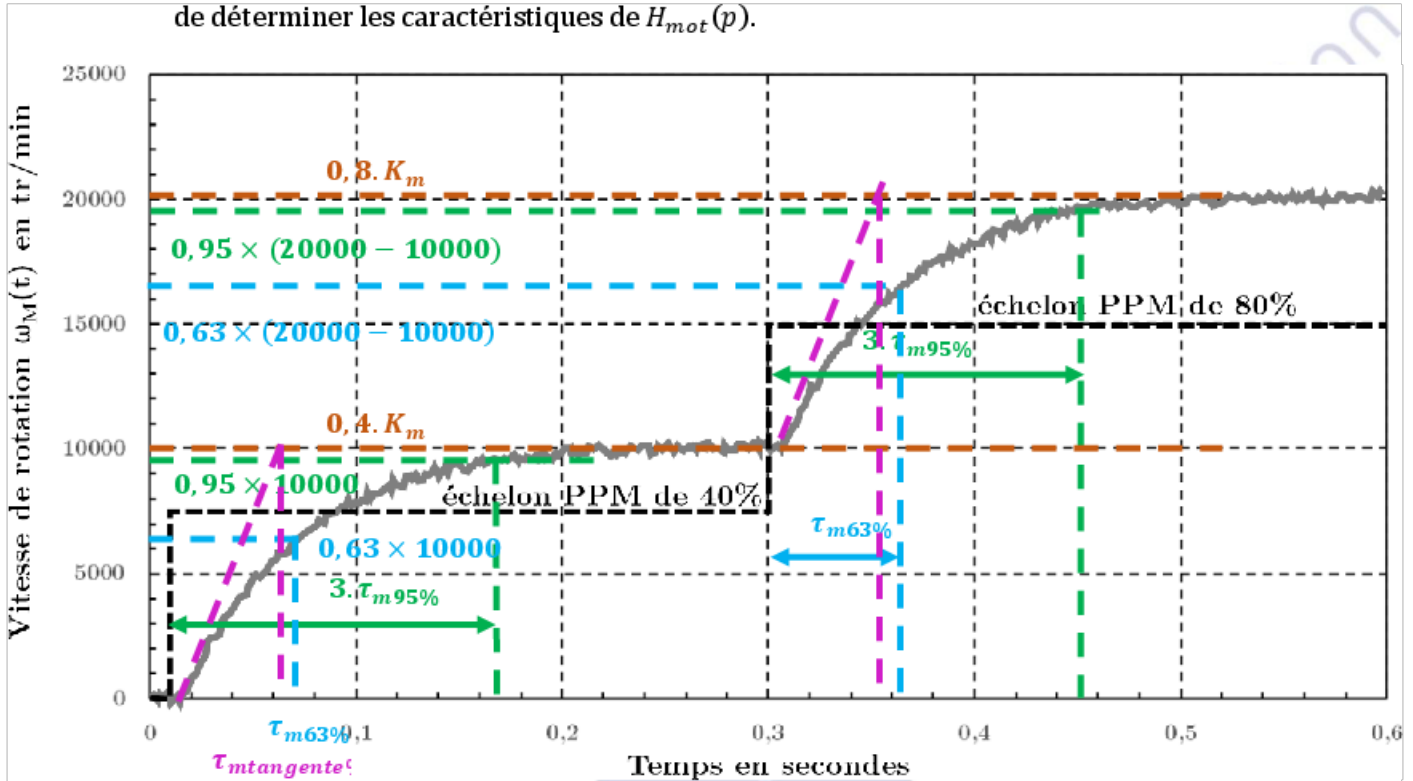
Question 25 Expliquer l'origine physique des oscillations observées sur la position angulaire du bras 1 et dans une moindre mesure sur la position angulaire du bras 2 lors du dépliement des bras.

Les oscillations sont dues à la présence des élastiques pour exercer la force de rappel.

PARTIE III : ANALYSE SIMPLIFIEE DE L'ASSERVISSEMENT DU DRONE

VI - Modélisation du comportement des moteurs brushless

Question 26 Justifier le modèle de comportement retenu pour $H_{mot}(p)$ et déterminer ses caractéristiques (valeurs numériques et unités à préciser). Faire apparaître sur la figure du DR les tracés permettant de déterminer les caractéristiques de $H_{mot}(p)$.



Tangente à l'origine non nulle et pas de dépassement, la réponse à un échelon peut donc être celle d'une fonction du premier ordre :

$$H_{mot}(p) = \frac{K_m}{1 + \tau_m \cdot p}$$

$$\tau_{m95\%} = 0,05 \text{ s}$$

$$\tau_{m63\%} = 0,065 \text{ s}$$

$$\tau_{mtangente} = 0,06 \text{ s}$$

$$0,4 K_m = 10000$$

$$K_m = 25000 \text{ tr} \cdot \text{min}^{-1} \approx 2620 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$$

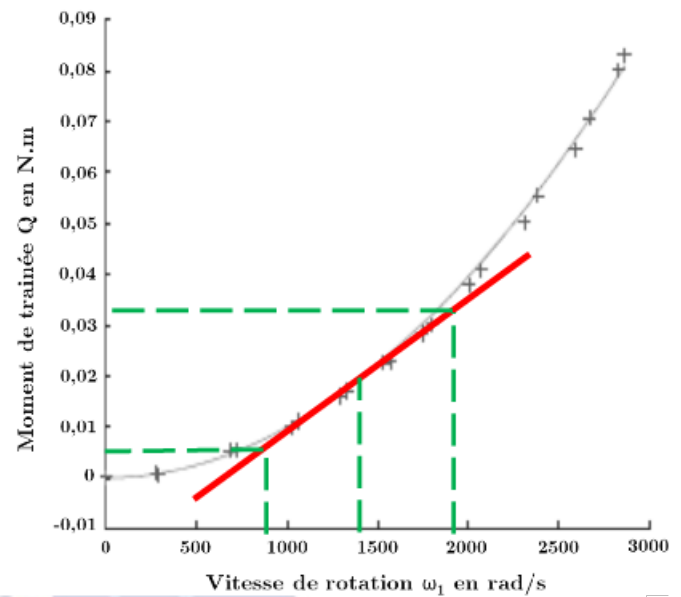
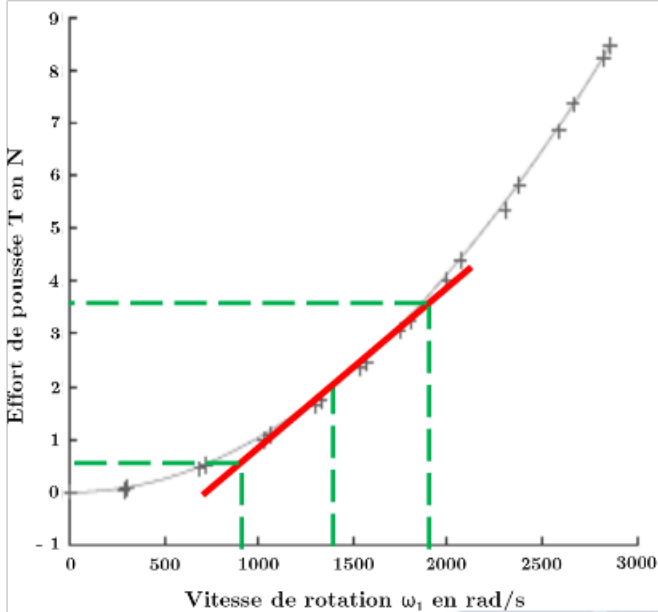
VII - Modélisation du comportement des hélices

Question 27 Justifier la nécessité de décaler l'axe de rotation du moteur de l'axe du capteur d'effort C1 d'une distance d_y et en déduire quel capteur d'effort C1 ou C2 permet de mesurer quelle composante de l'action (effort de poussée T ou moment de trainée Q).

Il est nécessaire de décaler un des deux capteurs de l'axe de l'hélice afin d'avoir un bras de levier et de mesurer le moment de trainée.

Le capteur décalé est le capteur C1 : il permet donc de mesurer le moment de traînée Q et le capteur C2 mesure l'effort de poussée T .

Question 28 Proposer un modèle de comportement linéarisé de la variation de l'effort de poussée ΔT et ΔQ en fonction de la variation de vitesse de rotation $\Delta\omega_1$ autour du point de fonctionnement étudié ($\omega_1 \approx 1400 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$) et valable dans le domaine de variation de $\pm 500 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$ considéré. Laisser apparents sur les courbes du DR les tracés permettant de justifier votre démarche.



$$\Delta T = \frac{3,6 - 0,6}{1000} \cdot \Delta\omega_1 = 3 \cdot 10^{-3} \cdot \Delta\omega_1$$

$$\Delta Q = \frac{0,032 - 0,006}{1000} \cdot \Delta\omega_1 = 26 \cdot 10^{-6} \cdot \Delta\omega_1$$

VIII - Analyse du contrôleur d'attitude en roulis

Question 29 Justifier le choix retenu pour l'expression de $H_S(p)$ et déterminer graphiquement les valeurs numériques et unités des paramètres caractéristiques K_S , z_S et ω_{0S} . Faire apparaître sur la figure du DR, les constructions permettant de justifier les valeurs proposées.

Quand $\omega \rightarrow 0$, la phase tend vers 0° et la courbe de gain a une asymptote à 0 dB.

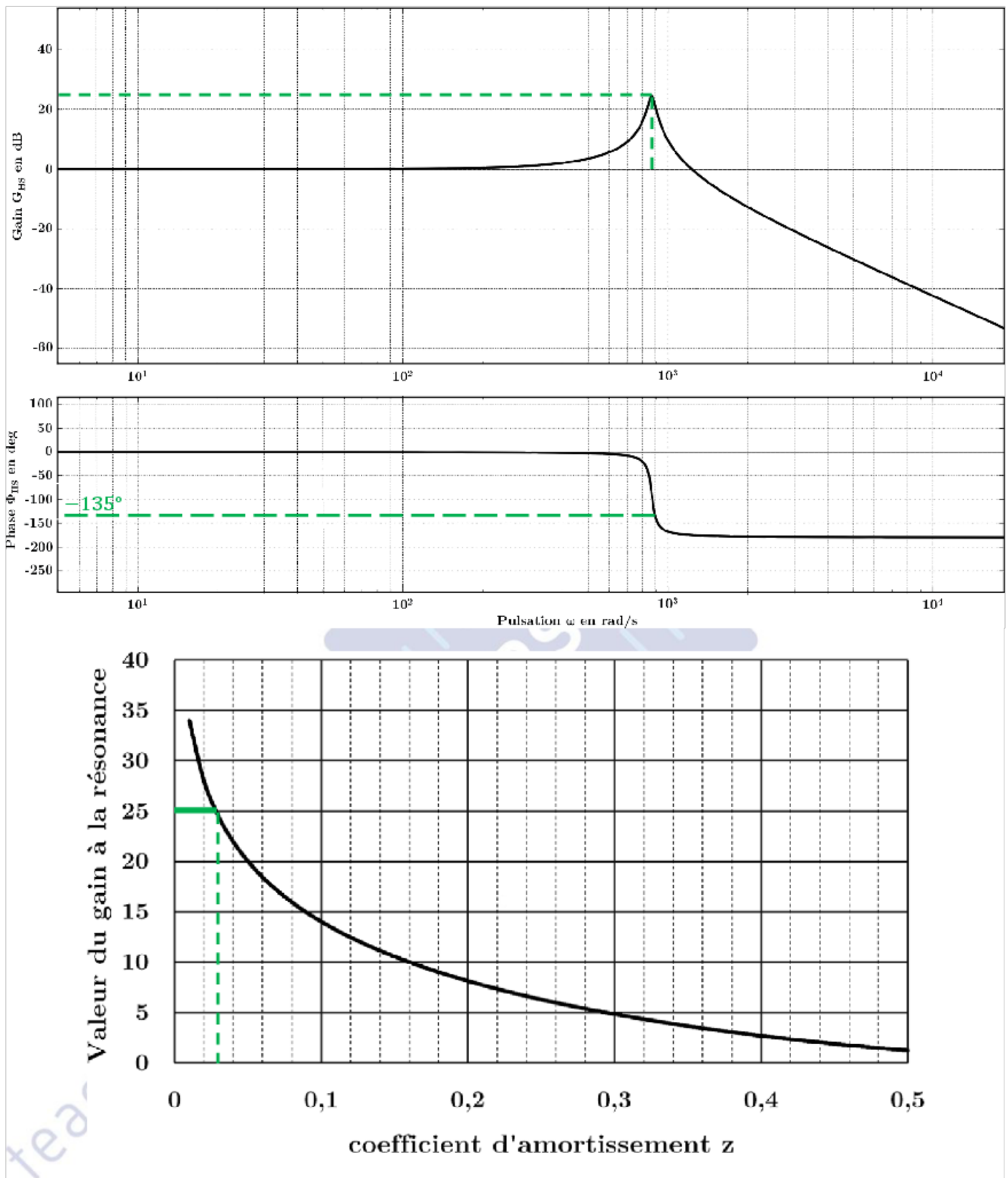
Quand $\omega \rightarrow \infty$, la phase tend vers -180° , la courbe de gain a une asymptote de pente de -40 dB/décade .

Le modèle choisi pour la fonction $H_S(p)$ est donc correct.

La courbe de gain a une asymptote à 0 dB quand $\omega \rightarrow 0$, le gain $K_S = 1$

Pour $\varphi = -135^\circ$, $\omega_{0S} = 900 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$

Il y a une résonance donc $z_S < \frac{\sqrt{2}}{2}$ et à la résonance le gain de la réponse est de 25 dB. Donc d'après l'abaque, $z_S \approx 0,03$



Question 30 Tracer, sur la figure du DR, les courbes de gain $G_{Bo}(\omega)$ et de phase $\Phi_{Bo}(\omega)$ de la réponse fréquentielle de la fonction de transfert en boucle ouverte $H_{Bo}(p) = \frac{\theta_R^{mes}(p)}{\varepsilon(p)}$ non corrigée, c'est à dire pour $C(p) = 1$. Justifier vos tracés.

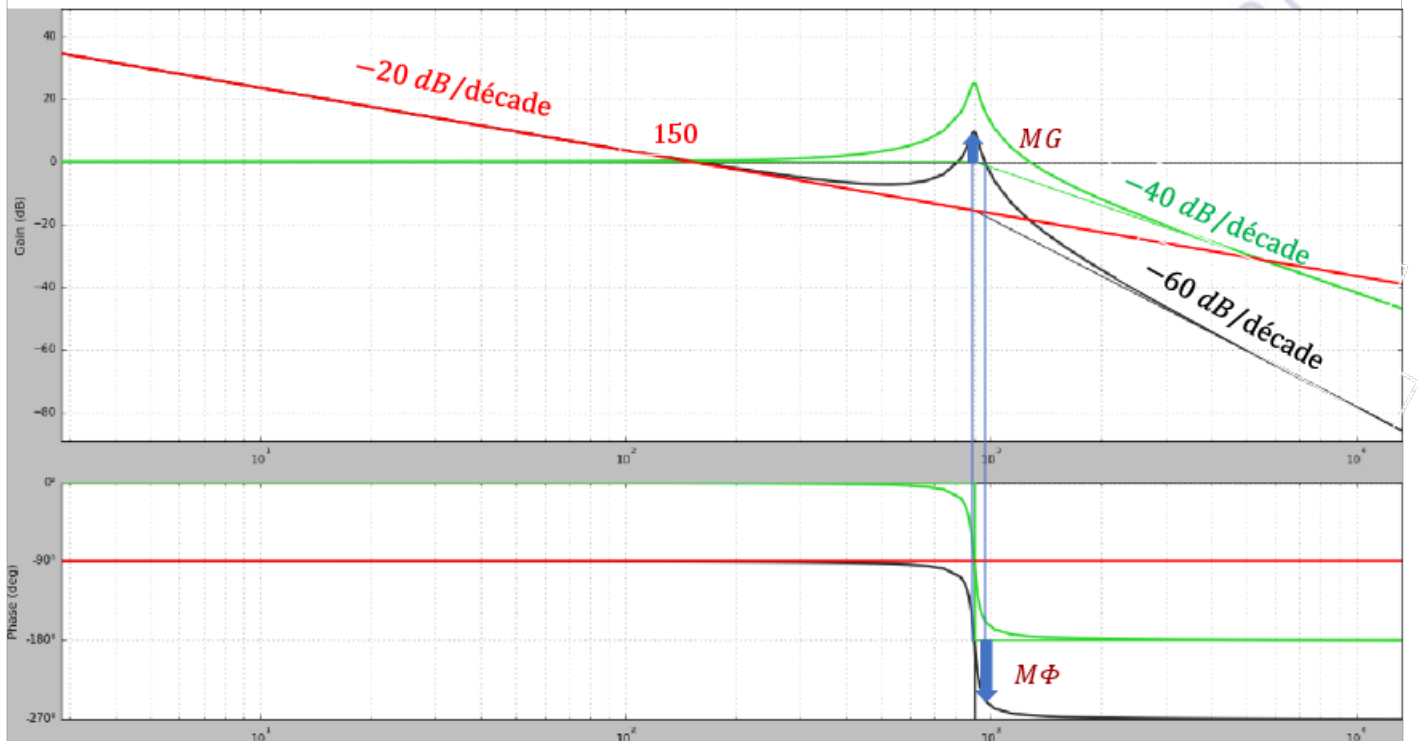
$$H_{Bo}(p) = \frac{\theta_R^{mes}(p)}{\varepsilon(p)} = C(p) \cdot H_S(p) \cdot \frac{1}{p} \cdot K_E = H_S(p) \cdot \frac{K_E}{p}$$

Il faut « ajouter » $\frac{K_G}{p}$ à la courbe précédente : la phase est donc décalée de -90° et une pente de -20 dB/décade à la courbe de gain

— Intégrateur : $\frac{K_G}{p}$

— $H_S(p)$

— $H_{BO}(p)$



(tracé avec PySylic).

Question 31 Représenter, sur le DR, les marges de gain MG et marge de phase $M\Phi$ de la FTBO si elles sont définies. Conclure sur les performances de l'asservissement en roulis sans correction (exigence Id 2).

La pulsation la plus grande pour laquelle le gain en décibel est égal à 0 dB est environ $950 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$. Pour cette pulsation $\Phi_{FTBO}(\omega_{0dB}) = -250^\circ$

$$M\Phi = 180 - 250 = -70^\circ$$

La marge de phase est négative

La pulsation pour laquelle la phase est égale à -180° est environ $900 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$. Pour cette pulsation $G_{dB_{FTBO}}(\omega_{-180^\circ}) = 10 \text{ dB}$

$$MG = -10 \text{ dB}$$

La marge de gain est négative

Les deux marges sont négatives, le système est instable sans correction et ne satisfait pas l'exigence Id 1.2

Question 32 Déterminer graphiquement la valeur à donner à K_p pour vérifier le critère de stabilité.

Pour avoir une marge de gain de 10 dB, il est nécessaire « d'abaisser » la courbe d'au moins 20 dB (10 dB pour annuler la marge de gain et 10 dB pour avoir la marge de gain). Soit un gain K_p tel que :

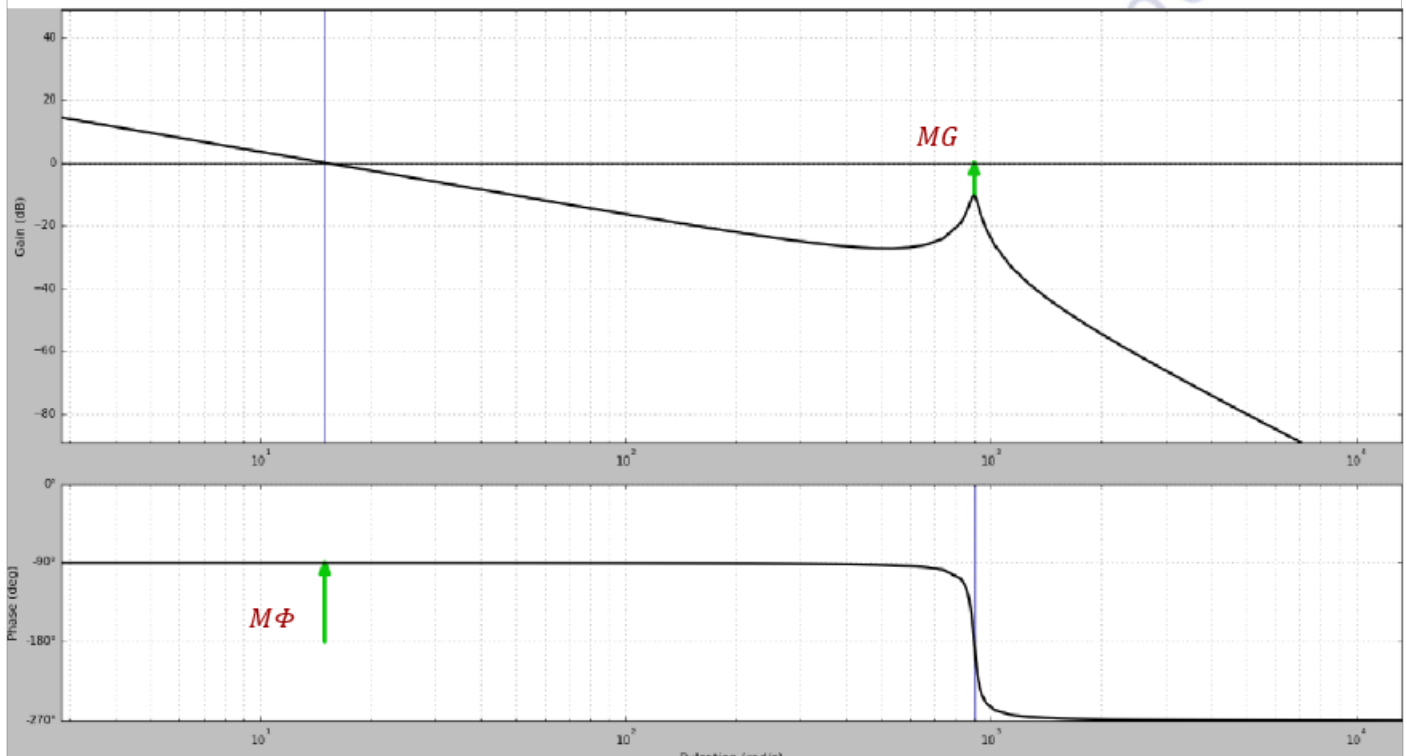
$$20 \cdot \log K_p = -20 \text{ dB}$$

$$K_p = 0,1$$

Cette valeur est alors un maximum.

Le fait de « baisser » la courbe de gain permet aussi d'augmenter la marge de phase :

$$M\phi = 90^\circ$$



Question 33 Déterminer l'expression de $\theta_R(p)$ en fonction de $\theta_R^C(p)$ et de $P(p)$. On rappelle que $C(p) = K_p$ et $H_S(p)$ est définie par l'équation (2).

$$\theta_R(p) = \left([\theta_R^C(p) - \theta_R(p)] \cdot K_p \cdot K_E \cdot \frac{K_S}{1 + \frac{2 \cdot z_S}{\omega_{0S}} \cdot p + \frac{1}{\omega_{0S}^2} \cdot p^2} - P(p) \right) \cdot \frac{1}{p}$$

$$\theta_R(p) \cdot \left(1 + \frac{K_p \cdot K_E \cdot K_S}{p \cdot \left(1 + \frac{2 \cdot z_S}{\omega_{0S}} \cdot p + \frac{1}{\omega_{0S}^2} \cdot p^2 \right)} \right) = \frac{K_p \cdot K_E \cdot K_S}{p \cdot \left(1 + \frac{2 \cdot z_S}{\omega_{0S}} \cdot p + \frac{1}{\omega_{0S}^2} \cdot p^2 \right)} \cdot \theta_R^C(p) - \frac{1}{p} \cdot P(p)$$

$$\theta_R(p) = \frac{K_P \cdot K_E \cdot K_S}{K_P \cdot K_E \cdot K_S + p \cdot \left(1 + \frac{2 \cdot z_S}{\omega_{0S}} \cdot p + \frac{1}{\omega_{0S}^2} \cdot p^2\right)} \cdot \theta_R^c(p) - \frac{1 + \frac{2 \cdot z_S}{\omega_{0S}} \cdot p + \frac{1}{\omega_{0S}^2} \cdot p^2}{K_P \cdot K_E \cdot K_S + p \cdot \left(1 + \frac{2 \cdot z_S}{\omega_{0S}} \cdot p + \frac{1}{\omega_{0S}^2} \cdot p^2\right)} \cdot P(p)$$

Question 34 Déterminer l'expression de la contribution de la perturbation de type échelon d'amplitude P_0 sur la valeur de $\theta_R(t)$ en régime établi dans le cas où la consigne est nulle $\theta_R^c(t) = 0^\circ$.

$$\theta_R(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} \theta_R(t) = \lim_{p \rightarrow 0} p \cdot \theta_R(p) = \lim_{p \rightarrow 0} p \cdot \frac{P_0}{p} \cdot \left(- \frac{1 + \frac{2 \cdot z_S}{\omega_{0S}} \cdot p + \frac{1}{\omega_{0S}^2} \cdot p^2}{K_P \cdot K_E \cdot K_S + p \cdot \left(1 + \frac{2 \cdot z_S}{\omega_{0S}} \cdot p + \frac{1}{\omega_{0S}^2} \cdot p^2\right)} \right) = - \frac{P_0}{K_P \cdot K_E \cdot K_S}$$

Question 35 Quelle valeur donner à K_P pour respecter le critère de précision vis-à-vis de la perturbation ? Conclure sur les limites de la correction proportionnelle.

$$\theta_R(\infty) = - \frac{P_0}{K_P \cdot K_E \cdot K_S} > -0,5^\circ$$

$$\frac{P_0}{K_P \cdot K_E \cdot K_S} < 0,5^\circ$$

$$K_P > \frac{10}{0,5 \times 150 \times 1}$$

$$K_P > 0,13$$

Or pour la stabilité, il faut $K_P < 0,1$. Les deux valeurs ne sont pas compatibles.

Question 36 Justifier que cette correction permet de satisfaire les critères de précision sur la consigne et sur la perturbation.

Le fait de mettre un intégrateur en amont de la perturbation permet d'annuler l'erreur due à un échelon de perturbation.

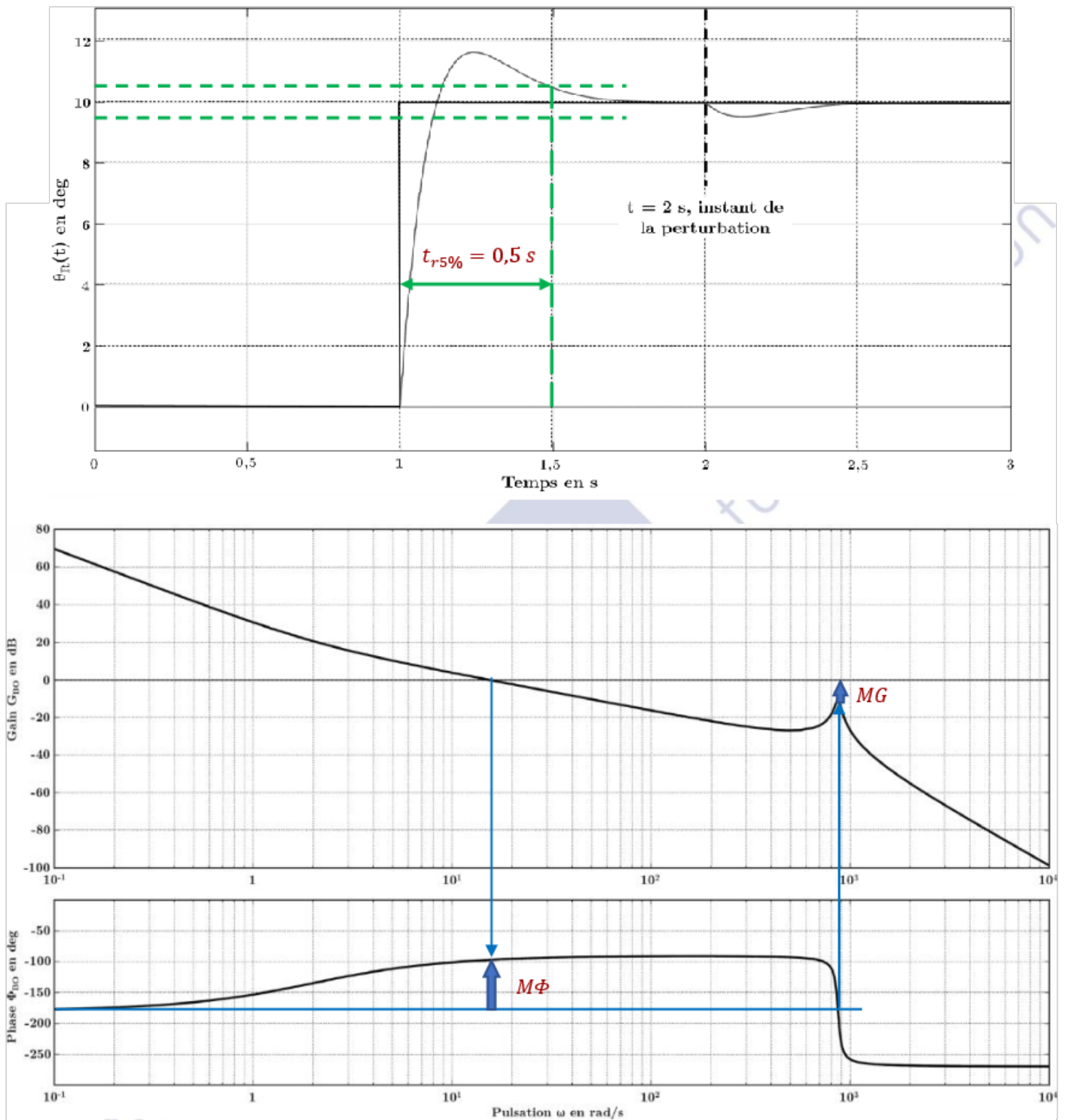
De plus, la classe de la FTBO sera 2. Donc l'erreur de position et l'erreur de vitesse seront nulles.

Question 37 Vérifier les performances temporelles et déterminer les marges de gain et de phase de la FTBO avec correction. Faire apparaître les constructions sur les figures du DR. Conclure sur le réglage et le choix d'un correcteur PI.

En observant le diagramme temporel, la sortie tend vers l'entrée, l'erreur pour une entrée en échelon est donc nulle. De plus, après l'apparition d'une perturbation, la sortie revient vers la valeur initiale.

Les exigences de précision (écart par rapport à la consigne et robustesse vis-à-vis d'une perturbation) sont donc respectées.

De plus, le temps à 5%, $t_{r5\%} = 0,5 \text{ s} < 600 \text{ ms}$, le critère de rapidité est aussi respecté.



La mesure des marges donne :

$$M\phi = 80^\circ > 60^\circ$$

$$MG = 10 \text{ dB}$$

Les deux marges respectent le critère de stabilité.

Le correcteur PI permet de respecter les critères de l'exigence Id 2.

Question 38 Conclure sur l'influence de la phase de repliement des bras et du passage de l'ouverture sur le comportement en roulis du drone avec la correction retenue.

La phase de repliement induit une erreur sur θ_R qui a tendance à diminuer lorsque le repliement est terminé. Le drone semble « vouloir » récupérer sa position initiale.

De plus, l'évolution de la vitesse de roulis confirme l'erreur sur l'angle θ_R .

Le correcteur n'est pas assez rapide réellement. Le modèle retenu de la perturbation est peut-être trop simpliste.

